线性代数

杨　刚　吴惠彬　编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/杨刚等编.—北京:北京理工大学出版社,2002.9
ISBN 7-81045-980-5

Ⅰ.线…　Ⅱ.杨…　Ⅲ.线性代数-高等学校-教材
Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 041707 号

出版发行/北京理工大学出版社
社　　址/北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编/100081
电　　话/(010)68914775(办公室)　68912824(发行部)
网　　址/http://www.bitpress.com.cn
电子邮箱/chiefedit@bitpress.com.cn
经　　销/全国各地新华书店
印　　刷/北京房山先锋印刷厂
装　　订/天津市武清区高村印装厂
开　　本/850 毫米×1168 毫米　1/32
印　　张/12.5
字　　数/313 千字
版　　次/2002 年 9 月第 1 版　2002 年 9 月第 1 次印刷
印　　数/1～4000 册　　　　责任校对/陈玉梅
定　　价/16.50 元　　　　责任印制/王　军

前　言

线性代数是理工院校本科生的一门数学公共基础课，它所讨论的内容和研究的问题是许多近代科学理论与工程学的基础。特别是在自动控制、电子通讯、计算机技术以及工程力学等诸多领域，线性代数都有广泛的应用。另一方面，作为代数学的一个组成部分，线性代数有其自身的数学特点，从方法论的角度上看，它的某些内容是体现数学思维模式的典型范例。因此，线性代数不仅能为其他学科提供强有力的数学工具，而且在数学思维的训练和数学能力的培养上也能发挥重要作用。这也正是本书所力图达到的目标。

线性代数的发展已有100多年的历史，其理论体系和结构框架已非常完备。目前，国内出版的绝大部分线性代数教材在体系结构上都印证着线性代数学科发展的历史踪迹。然而，历史的发展和科技的进步总会使人们对事物产生新的更加深入的认识。线性代数也是这样。过去人们曾经视之为线性代数中心内容的行列式，今天已经退居到次要的地位，许多线性代数内容都可以完全抛开行列式来进行讨论，而矩阵已占据线性代数的核心位置。不难发现，线性代数的所有内容都可利用矩阵进行讨论，在其他学科中被引用最多的概念也是矩阵。因此，客观现实要求数学工作者能提供一本反映时代特征的线性代数教材。本书在这方面进行了初步的尝试，首先对线性代数的体系架构进行了根本性的调整。

全书以矩阵为切入点，以线性方程组为发展线索，把矩阵作为贯穿始终的重要工具，从实际应用到理论推导全方位地突出矩阵

概念。前三章(矩阵、线性方程组、向量空间)的内容完全不涉及行列式,从而可使读者集中精力,理解、掌握矩阵的基本内容,为后续章节的掌握打下良好的基础。行列式的内容被放在第四章,以便计算矩阵的特征值时使用。这样的安排可有效地防止过去那种行列式与矩阵几乎同时引入的模式所产生的两个概念相互混淆的现象发生。作者按照这种体系结构在 4 届试验班上讲授线性代数,均取得良好效果。

线性代数的许多内容或直接来源于实践,或在实践中有重要的应用。但长久以来,线性代数的教材重理论、轻实践者居多。这种理论与实践的相互脱节给学好、用好线性代数带来了不小的障碍,使得线性代数考试成绩突出的学生未必就能在实践中同样突出地使用线性代数解决实际问题。这与加强素质教育的宗旨偏差巨大。针对这种现状,本书加强了实践环节与工程应用的内容。在前三章的基本内容方面,力求做到从实践中来,即概念与结论的引入尽可能源于实际问题或是思维过程的自然延续。在后三章,由于线性代数的知识已经比较充分,故单列一节专门讨论应用问题,重点讨论应用到实践中去的过程。作者多年的教学实践表明,理论联系实际的确会极大地促进对线性代数内容的理解与把握,对提高应用线性代数解决实际问题的能力也会有较大的推动作用。

由于理工科院校各专业对线性代数的要求不尽相同,所以本书有两种学时安排:第一,对机械制造、化学工程以及经济管理等专业,只讲授一至六章,某些较难的例题可略去,大概需要 40 多学时。第二,对电子信息、自动控制以及工程力学等专业,讲授一至六章和两个附录的全部内容,大概需要 60 学时左右。在实际讲授过程中,教师可根据学时及专业自行安排讲授内容。此外,本书的习题均未附答案。我们将在陆续出版的线性代数学习指导中给出较为详细的解答。

在本书即将正式出版前,作者对在编写过程中给予过热情帮

助和大力支持的各位同仁表示衷心的感谢。特别应指出的是，北京理工大学的孙良教授对全书的体系框架提出了非常重要的建设性意见，北京航空航天大学的李心灿教授和北京理工大学的张润琦教授对本书的编写给予了热情的关心和帮助，北京信息工程学院的吴昌悫教授仔细、认真地审阅了全稿，并提出了许多重要的建议。作者再次对上述专家表示衷心的谢意。由于时间仓促，加之作者水平所限，不妥或谬误之处在所难免，恳请读者和使用本教材的教师批评指正。

编　者
2002年7月15日

目　录

第一章　矩　阵

§1.1　矩阵的基本概念与基本运算

在处理许多实际问题的过程中,人们经常涉及一“堆”一“堆”的数。此时,人们不仅要考虑如何表示这些数“堆”,而且还要研究一“堆”数与另一“堆”数之间的关系。

例1.1.1　一个出售饮水机桶装水的商店,有4种品牌的矿泉水:金泉、银泉、天泉、灵泉。商店每周要统计一次销售情况,一般都如表1.1.1所示。

表1.1.1　　　　桶

销量 日期 / 品牌	周一	周二	周三	周四	周五	周六	周日
金泉	6	5	6	3	4	7	7
银泉	6	6	5	4	3	6	7
天泉	4	3	4	2	3	5	6
灵泉	4	4	3	5	4	6	8

在这里,周销量是一“堆”数。通过表1.1.1就把这些数有序地表示出来,使人们对销售情况一目了然。

例1.1.2　某电视机厂生产TC－1、TC－2、TC－3三种型号的35厘米(14英寸)彩电,它们的主要零部件是:$S1$(显像管)、$S2$(电路板)、$S3$(扬声器)、$S4$(机壳),而这些零部件的主要原材料为:$M1$(铜)、$M2$(玻璃)、$M3$(塑料)。生产不同型号的彩电所需零部件的数量以及生产不同的零部件所需原材料的数量在表

1.1.2 和表 1.1.3 中给出。

表 1.1.2

部件 \ 数量 \ 型号	TC-1	TC-2	TC-3
S1	1	1	1
S2	3	4	5
S3	2	4	6
S4	1	1	1

表 1.1.3

材料 \ 数量 \ 部件	S1	S2	S3	S4
M1	2	4	4	0
M2	14	0	0	4
M3	1	2	1	10

在这里，表 1.1.2 与表 1.1.3 不仅把两“堆”数有序地表示出来，使人们对生产彩电所需的零部件与原材料的情况十分清楚，而且由此还可导出彩电与原材料之间的直接联系。

在上述两个例子中，我们把一“堆”数用一个数表或一个数的阵列表示出来，这就是矩阵。

一、矩阵的基本概念

为简便起见，把表 1.1.1 记为

$$\begin{bmatrix} 6 & 5 & 6 & 3 & 4 & 7 & 7 \\ 6 & 6 & 5 & 4 & 3 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 4 & 2 & 3 & 5 & 6 \\ 4 & 4 & 3 & 5 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

因这个矩形阵列有 4 行(横为行)7 列(竖为列)，故称之为 4 行 7 列矩阵，简称为 4×7 矩阵。可用字母 $\boldsymbol{B}$ 表示上述矩阵，即

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 6 & 5 & 6 & 3 & 4 & 7 & 7 \\ 6 & 6 & 5 & 4 & 3 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 4 & 2 & 3 & 5 & 6 \\ 4 & 4 & 3 & 5 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

同理，表 1.1.2 与表 1.1.3 也可简记为

$$
S=\begin{bmatrix}1&1&1\\3&4&5\\2&4&6\\1&1&1\end{bmatrix},\qquad M=\begin{bmatrix}2&4&4&0\\14&0&0&4\\1&2&1&10\end{bmatrix}
$$

S 是 4×3 矩阵,M 是 3×4 矩阵。

一般地,我们有

定义1.1.1 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots n)$ 构成的 m 行 n 列的矩形表

$$
\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}\tag{1.1.1}
$$

称为 **$m\times n$ 矩阵**,简记为 $[a_{ij}]_{m\times n}$。其中,

$$
a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}
$$

是 $[a_{ij}]_{m\times n}$ 的第 i 行,

$$
\begin{matrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{mj}\end{matrix}
$$

是 $[a_{ij}]_{m\times n}$ 的第 j 列,因此 a_{ij} 位于 $[a_{ij}]_{m\times n}$ 的第 i 行第 j 列,称之为矩阵 $[a_{ij}]_{m\times n}$ 的 (i,j) - 元。

矩阵一般用大写英文字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\cdots$ 表示,其元素一般用小写英文字母 $a,b,a_i,b_i,a_{ij},b_{ij},\cdots$ 表示。例如,矩阵(1.1.1)可表示为 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n},\boldsymbol{A}_{m\times n},\boldsymbol{A}$ 等形式。

注:①对 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$,若 $m=1$,则

$$
\boldsymbol{A}=[a_{11}\quad a_{12}\quad\cdots\quad a_{1n}]
$$

称 $\boldsymbol{A}$ 为行矩阵;若 $n=1$,则

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{bmatrix}$$

称 $\boldsymbol{A}$ 为列矩阵。

②对 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$，若 $m=n$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，称 a_{11}，a_{22}，…，a_{nn} 为 $\boldsymbol{A}$ 的主对角元。

把一“堆”数写成一行或一列是最常见的一种写法，而在某些情况下就必须写成方形阵列。

例1.1.3 某县有三个乡镇，县里决定建立一个有线电视网。通过勘查测算，获得一组有关建设费用的预算数据，如图 1.1.1 所示，其中，四个点分别表示县城 O 与三个乡镇 $C1$，$C2$，$C3$，图中两点连线的数字表示两地间架设线路所需费用(单位：万元)。

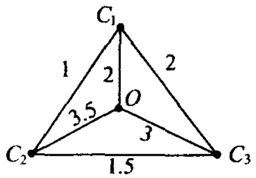

图 1.1.1

我们也可以用矩阵的形式给出有关建设费用的预算数据：

$$\boldsymbol{P}_{\mathrm{TV}}=\begin{array}{c}\\O\\C_1\\C_2\\C_3\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}O & C_1 & C_2 & C_3\end{array}\\\begin{bmatrix}0 & 2 & 3.5 & 3\\2 & 0 & 1 & 2\\3.5 & 1 & 0 & 1.5\\3 & 2 & 1.5 & 0\end{bmatrix}\end{array}$$

这里，$\boldsymbol{P}_{\mathrm{TV}}$是 4 阶方阵。在此例中，要求给出一个费用最低的建设方案。这是图论中的最优化问题。

例1.1.4 某单位要招聘门卫、清洁工、电梯工各一人。现有三人前来应聘，每人对不同的工作有不同的薪金要求。具体数据见表 1.1.4。

表 1.1.4 元

应聘者 \ 数量 \ 工种	门卫	电梯工	清洁工
甲	600	550	700
乙	650	500	680
丙	600	580	750

问如何安排三人的工作才能使单位的支出最少?

首先,由于这三项工作一人或两人都不能兼顾,因此必须由三人分别完成不同的工作。我们所要做的只是确定每项工作应由哪一个人来完成,以使总的薪金支出最少。

其次,为讨论方便,把表 1.1.4 写成矩阵的形式

$$\boldsymbol{W}=\begin{bmatrix}600 & 550 & 700\\ 650 & 500 & 680\\ 600 & 580 & 750\end{bmatrix}$$

每一种工作安排的可行方案,等同于在 $\boldsymbol{W}$ 中选三个元素(其中任意两个元素都不同行不同列),它们的和即为此方案所对应的薪金支出。显然,和最小的三个元素即对应最优方案。例如,选 $\boldsymbol{W}$ 的 $(1,2)$ - 元、$(3,3)$ - 元、$(2,1)$ - 元,即 550、750、650,

$$\begin{bmatrix}600 & \boxed{550} & 700\\ \boxed{650} & 500 & 680\\ 600 & 580 & \boxed{750}\end{bmatrix}$$

可得一种方案:甲做电梯工,乙做门卫,丙做清洁工,对应的薪金支出为 $550+750+650=1\,950$。

从 $\boldsymbol{W}$ 中不难找出全部可行方案,具体见下表:

$$\begin{bmatrix} \boxed{600} & 550 & 700 \\ 650 & \boxed{500} & 680 \\ 600 & 580 & \boxed{750} \end{bmatrix}$$

$600 + 500 + 750 = 1\ 850$

$$\begin{bmatrix} \boxed{600} & 550 & 700 \\ 650 & 500 & \boxed{680} \\ 600 & \boxed{580} & 750 \end{bmatrix}$$

$600 + 680 + 580 = 1\ 860$

$$\begin{bmatrix} 600 & \boxed{550} & 700 \\ \boxed{650} & 550 & 680 \\ 600 & 580 & \boxed{750} \end{bmatrix}$$

$550 + 650 + 750 = 1\ 950$

$$\begin{bmatrix} 600 & \boxed{550} & 700 \\ 650 & 500 & \boxed{680} \\ \boxed{600} & 580 & 750 \end{bmatrix}$$

$550 + 680 + 600 = 1\ 830$

$$\begin{bmatrix} 600 & 550 & \boxed{700} \\ \boxed{650} & 500 & 680 \\ 600 & \boxed{580} & 750 \end{bmatrix}$$

$700 + 650 + 580 = 1\ 930$

$$\begin{bmatrix} 600 & 550 & \boxed{700} \\ 650 & \boxed{500} & 680 \\ \boxed{600} & 580 & 750 \end{bmatrix}$$

$700 + 500 + 600 = 1\ 800$

由上不难看出,最优方案为

甲做清洁工,乙做电梯工,丙做门卫。此时,单位需支付的薪金最少,为 1 800 元。

在上述若干实例中,我们都要处理许多数据“堆”,而对这些数据“堆”进行研究的一个简洁方便的工具就是矩阵。根据其定义,通过矩阵所得到的结论不仅与组成矩阵的数的大小有关,而且还与它们在矩阵中的位置有关。这是矩阵研究中一个突出的特点。由于在线性代数中矩阵的使用贯穿始终,所以矩阵知识的真正掌握对学好线性代数是至关重要的。

二、矩阵的基本运算

一个矩阵表示一“堆”数,研究不同数据“堆”之间的关系就是要研究不同矩阵之间的关系。为此,有必要引入矩阵的运算。

首先,根据矩阵的实际用处,可自然引入

定义1.1.2 设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$ 与 $\boldsymbol{B}=[b_{ij}]_{p\times q}$ 是两个矩阵，若它们满足

(1) $m=p$ 且 $n=q$，

(2) $a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$，

则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ **相等**，记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$。

满足条件(1)的矩阵称为**同型的**，但同型不一定相等。只有两个同型矩阵对应元素完全相同时，它们之间才能写等号。

1. 线性运算

例1.1.5 在例1.1.3中，我们进一步假设，在架设有线电视网时，对原有供电线路进行增容改造。问应如何规划设计才能使总的建设费用最低？假设已知供电线路的增容费用如图1.1.2所示：

图1.1.2中两点连线上的数字表示对应两地间供电线路的增容费用（单位：万元）。仿照例1.1.3，引入矩阵 $\boldsymbol{P}_{\mathrm{TE}}$ 表示这些数据：

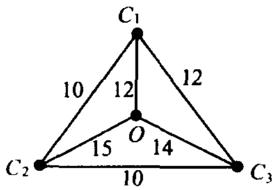

图1.1.2

$$\boldsymbol{P}_{\mathrm{TE}}=\begin{array}{c} \\ O \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} O & C_1 & C_2 & C_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 12 & 15 & 14 \\ 12 & 0 & 10 & 12 \\ 15 & 10 & 0 & 10 \\ 14 & 12 & 10 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

显然，把 $\boldsymbol{P}_{\mathrm{TV}}$ 与 $\boldsymbol{P}_{\mathrm{TE}}$ 的对应元素相加，得到一个新矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} 0+0 & 2+12 & 3.5+15 & 3+14 \\ 2+12 & 0+0 & 1+10 & 2+12 \\ 3.5+15 & 1+10 & 0+0 & 1.5+10 \\ 3+14 & 2+12 & 1.5+10 & 0+0 \end{bmatrix}$$