顾尔祚 编

流体力学
有限差分法基础

上海交通大学出版社

流体力学中的

有限差分法基础

顾尔祚 编

上海交通大学出版社

摘　要

本书是将有限差分法引用到流体力学中来的入门教材，它是流体力学中的新兴分支——计算流体力学的主要组成部分。本书前两章介绍了有限差分法的一些基础知识，以后各章分别针对一些简单而典型的流体力学问题，讨论了有限差分解法。书中选编了一些例题，求解过程比较具体。本书主要供高校工科有关专业高年级学生及研究生作教材，也可供有关工程技术人员参考。

流体力学中的有限差分法基础

顾尔祚　编著

上海交通大学出版社出版

（淮海中路1984弄19号）

新华书店上海发行所发行

常熟文化印刷厂排印

开本 787×1092　1/32　印张 7.125　字数 157,000

1988年6月第1版　1988年6月第1次印刷

印数 1—2500

ISBN 7-313-00167-3/O 35　　科技书目：172—245

定价：1.20 元

目　　录

绪　论

一、引　言

流体力学是在古典流体力学(水动力学)和水力学的基础上发展起来的理论与实验并重的学科，它在日常生活、生产和科学研究中有着广泛的应用。然而，流体力学本身具有一定的复杂性，如它的一些基本微分方程是非线性的或混合型的，具有各种数学奇异性，又如所研究的问题中可能存在气穴、激波、自由表面等特殊现象，还有像至今尚未搞清的湍流问题等。所有这些都给流体力学问题的数学解析处理增加了极大的困难和麻烦。因此，大量实践中的复杂问题不得不借助于实验研究来解决。特别是在国防、航空和宇航上，为提高解决问题的能力，实验设备越造越大，实验耗费也巨额增加。即使这样，在模拟实际的条件、物理参数的选择等方面还往往受到很大限制。

流体力学中的有限差分法是流体力学的新兴分支——计算流体力学的主要组成部分，是解决流体力学问题的一种重要数值方法，它用离散化的方法把流体力学问题化成代数方程组，从而寻求流场中离散点上物理量(流动参数)的近似数值解。由于数值方法最终使用的是算术运算和逻辑运算，这可以通过现代大型高速计算机来实现，因此，流体力学中的有限差分法为流体力学研究增添了一种新的手段，从而能更好地处理流体力学问题。

有限差分法是数值求解微分问题的一种重要工具，很早就有人在这方面作了一些基础性的工作。到了1910年，L. F. Richardson 在一篇论文中论述了 Laplace 方程、重调和方程等的迭代解法，为偏微分方程的数值分析奠定了基础。但是在电子计算机问世前，研究重点在于确定有限差分解的存在性和收敛性。这些工作成了后来实际应用有限差分法的指南。本世纪40年代后半期出现了电子计算机，美国新墨西哥州 Los Alamos 科学实验室的一批学者利用这一条件，进行了不少有关有限差分法的研究。J. von Neumann 的稳定性分析法就是当时提出的。60年代以来，现代大型高速电子计算机的出现，扫除了数值分析在流体力学中应用的一些重大障碍，并促进了流体力学的发展。1963年 Los Alamos 科学实验室的 F. H. Harlow 和 J. E. Fromm 首先用数值计算模拟了 von Kármán 涡列，引起了人们极大的兴趣。1965年这两位学者又发表了《流体力学的计算机实验》一文，同年法国的 E. O. Macagno 也发表了《水力学模拟的某些新概念》，他们几乎同时在流体力学中提出了"数值模拟"和"计算机实验"的概念。在这以后，数值分析在流体力学中的应用日益发展，各种论文大量涌现，出版了专门的期刊，并召开了国际会议。

有限差分法本身是属于应用数学范畴的，但本教材不是从数学角度出发去系统、完整地讲解有限差分理论，而是立足于流体力学，介绍有限差分法的基本知识，为把有限差分法引用到流体力学中来打一个基础。一般地说，流体力学中的有限差分法包含3部分。首先是物理问题（流体力学问题）的数学描述；其次是问题的有限差分化，即用有限差分法将流体力学问题离散化，化为代数方程组问题；最后是数值求解。第一部分是流体力学的任务，本书只能概略地提一下。为了避免与

数值分析方面的教材重复，对第三部分也不宜作过多的阐述。本书介绍的主要是第二部分。前两章介绍有限差分法的一些基本知识，以后各章分别针对一些简单而典型的流体力学问题，讨论有限差分求解方法。有限差分法在流体力学中有着广泛的应用，本书只是一个入门。

二、流体力学的基本方程

为了用有限差分法来解决流体力学问题，首先必须了解流体力学的基本方程。在流体力学中通常用微分方程来描述问题。

流体力学问题可分为可压缩性流动和不可压缩性流动，或分为粘性流动和无粘性流动。这样，就大的方面来说，有4类问题：可压缩粘性流动，可压缩无粘性流动，不可压缩粘性流动和不可压缩无粘性流动。

可压缩粘性流动的微分方程为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho \boldsymbol{v})=0, \tag{1.a}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=-\frac{\Delta p}{\rho}+\frac{1}{\rho}\left(\mu'+\frac{\mu}{3}\right)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{v})+\nu\Delta\boldsymbol{v}, \tag{1.b}$$

$$\frac{\partial e}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)e=-\frac{p}{\rho}\nabla\cdot\boldsymbol{v}+\frac{1}{\rho}\left(\mu'-\frac{2}{3}\mu\right)(\nabla\cdot\boldsymbol{v})^2+\frac{2}{\rho}\mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}+\frac{\lambda}{\rho}\frac{\partial^2 T}{\partial x_i\partial x_i}。 \tag{1·c}$$

这里没有考虑热辐射。式中下标 i 和 j 分别等于1、2、3，在同一项中下标重复时表示求和；μ 为流体的粘性系数；μ' 为体变形粘性系数；ν 为运动粘性系数；λ 是热传导系数，按分子运

动论有 $\lambda=\dfrac{C_v\mu}{m}$，$C_v$ 为定容比热，m 为分子量；ρ 为密度；$\boldsymbol{v}$ 为速度(向量)；p 为压强；T 为绝对温度；$e=C_vT$ 为单位质量流体的内能；ε_{ij} 为变形率张量的分量，即

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i}+\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right),$$

v_i 和 v_j 分别为速度 $\boldsymbol{v}$ 在坐标 x_i 和 x_j 上的分量；∇ 为 Nabla 算子，即梯度的运算符号；Δ 为 Laplace 算子（本书中的差分符号也用 Δ，二者的差别在于，Laplace 算子出现于微分方程中，差分符号出现在差分方程中）。

可压缩无粘性流动的方程为

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})=0, \tag{2.a}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=-\frac{\nabla p}{\rho}, \tag{2.b}$$

$$\frac{\partial e}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)e=-\frac{p}{\rho}\nabla\cdot\boldsymbol{v}。 \tag{2.c}$$

对于不可压缩流动，由于其 $\boldsymbol{v}$ 和 p 的方程与 e 的方程不耦合，故下面只写出 $\boldsymbol{v}$ 和 p 的方程。不可压缩粘性流动的方程为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0, \tag{3·a}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=-\frac{\nabla p}{\rho}+\nu\Delta\boldsymbol{v}。 \tag{3.b}$$

不可压缩无粘性流动的方程为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0, \tag{4·a}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=-\frac{\nabla p}{\rho}。 \tag{4·b}$$

(1) 与 (3) 常称为 Navier–Stokes 方程，简写为 N–S 方程。(2)与(4)常称为 Euler 方程。

从数学上偏微分方程的分类来看，(1)、(3)属抛物型，(2)属双曲型；而不可压缩无粘性流动的 Euler 方程(4)为非标准型的，其定解条件很难适当地给出，因而是个相当困难和复杂的问题。但在某些情况下可作适当简化而设法求解。例如，若在初始时流动无旋，则永远无旋，因而可引进速度势函数 φ，使得

$$\boldsymbol{v}=\nabla\varphi,$$

从而由(4)得到

$$\nabla\varphi=0, \tag{5·a}$$

$$-\frac{1}{g}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{p}{\gamma}+\frac{\mathrm{v}^2}{2g}=\text{const}。 \tag{5.b}$$

式中的 g 为重力加速度；γ 为流体比重；v 是速度 $\boldsymbol{v}$ 的模。(5.a)是速度势 φ 的 Laplace 方程，属椭圆型方程，在给定的边界条件下可解得 φ。(5.b)常称为 Bernoulli 方程。一旦由(5.a)解出 φ 后，就可由 $\boldsymbol{v}=\nabla\varphi$ 求出 $\boldsymbol{v}$，然后用(5.b)式求得压强 p。

三、模 型 方 程

为了抓住问题的实质，同时又不使讨论的问题过于复杂，常用一些简单的方程来模拟流体力学方程进行讨论分析，以阐明关于有限差分法的一些基本概念。这些方程叫作模型方程。

这里常用的模型方程，一种是对流方程：

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\alpha\frac{\partial\zeta}{\partial x}=0。 \tag{6}$$

式中的 ζ 为某待求解的函数 $\zeta(x,t)$；系数 α 相当于对流速度，

可作常数处理。对流方程又称单向波方程，是模拟双曲型方程用的。

另一种模型方程是 Burgers 方程：

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\zeta\frac{\partial\zeta}{\partial x}=\beta\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}。\tag{7}$$

这是一个非线性方程，具有与 N-S 方程类似的性态，且已有某些现成的解析解可供参考，故可用来模拟 N-S 方程。这时式中的系数 β 就相当于流体的粘性。但因其是非线性的，故更常用来模拟 N-S 方程中的是对流-扩散方程：

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\alpha\frac{\partial\zeta}{\partial x}=\beta\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}。\tag{8}$$

这个方程虽与 Burgers 方程同属抛物型，但它是线性的，比较简单。同时，当 $\beta=0$ 时，它退化成了对流方程 (6)；当 $\alpha=0$ 时，则变成了热传导方程：

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}=\beta\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}。\tag{9}$$

还有一种模型方程是椭圆型的 Poisson 方程：

$$\Delta\zeta=f。\tag{10}$$

其右端项 f 是已知函数，若恒为零，(10) 就成了 Laplace 方程。

四、定 解 条 件

非定常问题必须给出初始条件。至于空间域，由于用有限差分法求解时总是取有限空间，所以必须给出边界条件。初始条件与边界条件是确定微分方程解的必不可少的条件，合称为定解条件。定解条件少给了，就无法定解，即所谓欠定；多给了可能产生矛盾，即所谓过定；只有给出适当个数的定解

条件才能求解，即所谓适定。

现在考虑对流方程 (6)。若式中的系数 $\alpha=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，则(6)成了

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\frac{\partial\zeta}{\partial x}\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=0,$$

或写成

$$\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}t}=0。$$

不难看出，$\alpha=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 在 x-t 坐标系中是一组斜率 $\mathrm{tg}\,\theta=\frac{1}{\alpha}$ 的直线(图 0-1)，称为特征线。在此线上 $\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}t}=0$，即 ζ 的值沿特征线不变。

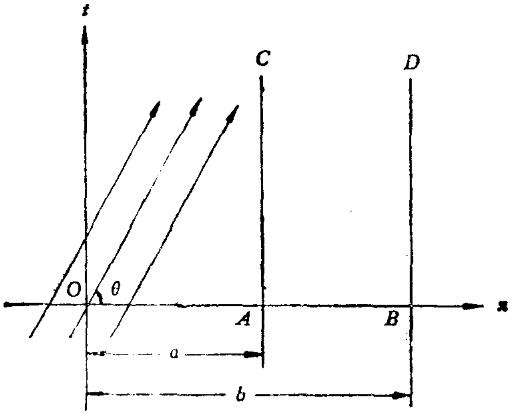

图 0-1

设问题的定解域为 $a\leqslant x\leqslant b$, $0\leqslant t$，如图 0-1 中 x 轴上方 AC、BD 间的区域。对这种问题如何给出定解条件，是与特征线有关的。若 $\alpha>0$，则当 AB 和 AC 上的函数给定时，BD 上的函数值也随之而定。所以 $\alpha>0$ 时，只需给定初值 $\zeta(x,0)=$

$\bar{\zeta}(x)$和边值 $\zeta(a, t)=\bar{\zeta}_a(t)$，就适定了。这里 $\bar{\zeta}(x)$ 和 $\bar{\zeta}_a(t)$ 表示已知函数。同样道理，若 $\alpha<0$，则只需给定初值 $\zeta(x, 0)=\bar{\zeta}(x)$和边值 $\zeta(b, t)=\bar{\zeta}_b(t)$（$\bar{\zeta}_b(t)$ 为已知函数），即给定 AB 和 BD 上的函数，就适定了。

从上述讨论可看出一个规律：将特征线视为有向线段，其方向与 t 增加时的方向一致。定解域边界（包括初始时刻）上的某点是否要给出定解条件，可从该点处作特征线，若其方向指向定解域内，则需给出定解条件，否则不必给。

上述方程只有一组特征线。一般双曲型方程组可以有多组特征线。例如一维可压缩无粘性流动，其方程由(2)退化为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t}+u\dfrac{\partial \rho}{\partial x}+\rho\dfrac{\partial u}{\partial x}=0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}=0, \\ \dfrac{\partial p}{\partial t}+\rho a^2\dfrac{\partial u}{\partial x}+u\dfrac{\partial p}{\partial x}=0。 \end{cases}$$

其中 u 是 x 方向的分速度，$a=\sqrt{\dfrac{\kappa p}{\rho}}$ 是当地音速，κ 是比热比。这个方程组共有 3 组特征线：

$$\begin{cases} C^+:\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=u+a, \\ C^0:\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=u, \\ C^-:\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=u-a。 \end{cases}$$

此时前述的规律仍可推广应用。在定解域边界上某点处可作 3 条特征线，则该处需给出的定解条件数应等于指向定解域内的特征线数。

图 0–2 中 AB、AC 和 BD 围成了定解域。在 AB 上除了

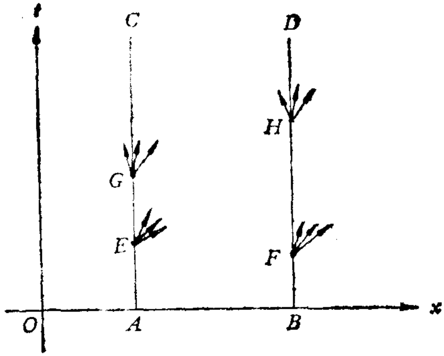

图 0-2

两端点，任意一点处的3条特征线必然都指向域内，所以必须给出3个初始条件。AC 和 BD 上的特征线方向需视 u 与 a 的相对大小而定。若 $u>a$，则在 AC 上3条特征线都指向域内，如 E 点，需给出3个边界条件；在 BD 上3条都指向域外(如 F 点)，不需给出边界条件。若 $a>u$，则在 AC 上 C^+ 及 C^0 指向域内(如 G 点)，需两个边界条件；在 BD 上只有 C^- 指向域内(H 点)，因而只要1个边界条件。

对流-扩散方程(8)是抛物型的，其定解条件与典型抛物型方程(9)一样，除初始条件外，在两个边界上都应给出定解条件，即给出初始时刻的函数或其一阶导数，并给出两个边界上的函数或其一阶导数。但(8)比(9)多一对流项 $\alpha\dfrac{\partial\zeta}{\partial x}$。在(8)中若 β 相当小，以致 $\beta\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}$ 的影响可忽略时，则类似于(6)，解主要受初值和一端(若 $\alpha>0$，则为左端)边值的影响。这样确定的解(函数)或其导数，在另一端附近可能与那儿的边值相差甚远，这表明解(函数)或其导数在另一端附近将有

激烈变化，即 $\beta\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}$ 的影响主要在另一端附近，这就是边界层现象。

椭圆型方程(10)是很有趣的，即使是非定常流动，时间 t 也只是个参数，包含在边界条件中，故为边值问题。通常分两类，第一类给定边界上的函数，第二类给定边界上函数的法向导数。

第一章　有限差分方程及其基本性质

一、差分和逼近误差

由于通常数字计算机只能执行算术运算和逻辑运算，因此就需要一种用算术运算来处理函数微分的数值方法。有限差分法就是具有这种功能的一种方法。

设有 x 的解析函数 $y=f(x)$，从微分学知道函数 y 对 x 的导数为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}。$$

$\mathrm{d}y$、$\mathrm{d}x$ 分别是函数及自变量的微分，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 是函数对自变量的导数，又称微商。相应地，上式中的 Δy、Δx 分别称为函数及自变量的差分，$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 为函数对自变量的差商。

在导数的定义中 Δx 是以任意方式趋近于零的，因而 Δx 是可正可负的。在差分方法中，Δx 总是取某一小的正数。这样一来，与微分对应的差分可以有 3 种形式①：

向前差分　　$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$；

向后差分　　$\Delta y=f(x)-f(x-\Delta x)$；

---

① 有些书用 Δ 表示向前差分，∇ 表示向后差分，δ 表示中心差分。本书对这 3 种情况用同一符号。

中心差分 $\Delta y=f\left(x+\frac{1}{2}\Delta x\right)-f\left(x-\frac{1}{2}\Delta x\right)$。

上面谈的是一阶导数，对应的称为一阶差分。对一阶差分再作一阶差分，所得到的称为二阶差分，记为 $\Delta^2 y$。以向前差分为例，有

$$\begin{aligned}\Delta^2 y&=\Delta(\Delta y)\\&=\Delta[f(x+\Delta x)-f(x)]\\&=\Delta f(x+\Delta x)-\Delta f(x)\\&=[f(x+2\Delta x)-f(x+\Delta x)]-[f(x+\Delta x)-f(x)]\\&=f(x+2\Delta x)-2f(x+\Delta x)+f(x)。\end{aligned}$$

依此类推，任何阶差分都可由其低一阶的差分再作一阶差分得到。例如 n 阶向前差分为

$$\begin{aligned}\Delta^n y&=\Delta(\Delta^{n-1}y)\\&=\Delta[\Delta(\Delta^{n-2}y)]\\&\cdots\cdots\\&=\Delta\{\Delta\cdots[\Delta(\Delta y)]\}\\&=\Delta\{\Delta\cdots[\Delta(f(x+\Delta x)-f(x)]\}。\end{aligned}$$

n 阶的向后差分、中心差分的型式类似。

函数的差分与自变量的差分之比，即为函数对自变量的差商。如一阶向前差商为

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x};$$

一阶向后差商为

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x)-f(x-\Delta x)}{\Delta x};$$

一阶中心差商为

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f\left(x+\frac{1}{2}\Delta x\right)-f\left(x-\frac{1}{2}\Delta x\right)}{\Delta x},$$