微積捷程

巴桑諾著
徐燮均譯

商務印書館發行

微 積 捷 程

L. M. Passano 著
徐 燮 均 譯

商務印書館發行

微積捷程

Calculus and Graphs

原著者　L. M. Passano

譯述者　徐燮均

發行者　商務印書館
上海河南中路二一一號

印刷者　商務印書館

發行所　商務印書館
上海及各地

1941年4月初版
1950年6月[illegible]版

基價8·5元

原　序

自然科學的重要，大家有如此的認識，故無鄭重申述之必要。科學有賴於算學上的研究與知識，也無須再加指示了。此種相賴性，對於微積分較之別門算學(除非我們或以初等代數學與三角法爲例外)更爲密切而直接。著作本書的主要目的，即欲使微積分的要義，直捷而熟練的適用於物理學，化學與其他科學的學生。同時，希望此書也很適用於爲了微積分在學術上的價值而欲有其初步知識的人們。

著者並未假定本書的讀者已有解析幾何上的知識。坐標軸的觀念，及其在圖形表示法上的用途。及其在研究簡單的代數函數與三角函數時的用途都於第一章中引入，以後全書中也不斷的使用。學生會熟悉於解析幾何的基本觀念，會學到用代數的與幾何的兩種方法來作函數的研究，雖不明言曲線的定義，雖不詳論曲線的性質，但於簡單函數的形狀與方程式都可深知。這樣學生可以得到在瞭解微積分要義上所必備的解析幾何知識，他自己若已有初等代數學與三角法的根底，則微積分變爲很相宜於當作大學裏第一個學程。

這樣的學程，著者以爲較之以解析幾何作爲第一個學程，非但更有用途並且更有趣味而簡便。但是，本書並不想取解析幾何的學習而代之，後者的重要性是不應輕視的，不過解析幾何的學習，簡直可以延遲到這門較爲急要的課目，微積分，之後。

著者已盡其所能，用簡明的方式來敍述。目的即欲使學生能夠明白瞭解；決非寫一本書來滿足算學上的咬文嚼字者可比。因此著者在有些地方寧可犧牲些邏輯方面的周詳，而求取陳述的簡明，但他希望並不因此而有害於詞句的正確。著者以爲太嫌謹嚴的邏輯證法，附有以角註的希臘字母，作其裝飾，在初學者第一部的微積分中是沒有地

位的，理由是學生從不會瞭解到這些。即使用了九牛二虎之力，終算能够把握其意義，但已犧牲其他更重要而更更有用的東西了，無論在時間上在工作上說都是如此。

著者要感謝許多同人，爲着在本書寫作時所得到的批評與提示。批評手稿與提示改進，著者特別受到 C. L. E. Moore 與 D. P. Bartlett 兩教授的賜與。

L. M. Passano.

序於美國麻省劍橋村，麻省工學院。

目　　錄

第一章　變數，函數與圖線

第二章　增加量，微分法與微係數，代數函數與三角函數的微係數

第三章　微係數的用途及其應用上的意義，變化率，速度，加速度

第四章 微係數的用途及其應用上的意義(續)方向,極大與極小,微分,值,與誤似近差

第五章 積分法,不定積分,求積分的各種方法

第六章 積分法,近似求和法

第七章 以積分法作爲一種求和法,

定積分及其應用

第八章　總習題

第九章　指數函數與對數函數

微積捷程

第一章

變數,函數與圖線

1. 變數與函數(variables and functions) 研究數(number)的時候,就得考察到很顯著的兩種:常數(constants)與變數。從其名字即可見其性質。常數,即在其所處問題的條件之下,值(Value)無變化者;變數,即可取各種不同的值者。二者的值,爲已知與否,沒有什麼關係。設有二數,a 與 x,我們可不知 a 的單獨而實在的值,卻知 x 須在 2 至 6 的範圍以內。但 a 仍爲常數,而 x 則爲變數。

在我們許多的或大多的問題中,也可遇見有必須研究兩個變數與任意幾個已知或未知的常數者;且兩個變數間的關係,是一個的值隨着另一個的值而定。例如,我們現在所坐的房間,閉其門窗,則其中溫度,可使變動。增減熱汽管中的蒸汽溫度即發生變化。蒸汽的多少,我們可以任意管理,但溫度只有用蒸汽支配之,故溫度隨蒸汽而定。我們以算學的口吻來說,溫度是蒸汽的函數,溫度爲因變數(dependent variable),蒸汽稱爲自變數(independent variable);用 y 代表溫度,x 代表蒸汽,則可寫此關係爲

$$y=f(x),\text{ 或 } y=F(x),\text{ 或 } y=\phi(x)\text{等等;}$$

其讀法爲 y 等於 x 的 f,或 y 等於 x 的 F,或 y 等於 x 的 ϕ,等等;普遍言之,y 等於 x 的函數。

關於函數有許多簡單的例。例如 $A=S^2$ 表示正方形的面積(A)是其邊(S)的特殊函數;$c=2\pi r$ 表示圓的周圍(c)是其半徑(r)的特殊函數。令前式中的 S 或後式中的 r 取一定的值,則可求 A 或 c 的相當

值 (corresponding value)。故如，正方形的邊爲 2 呎時，其面積爲 4 方呎；當 S 爲 12 呎時，A 爲 144 方呎；當 r 爲 7 吋時，c 爲 14π 吋，即 44 吋。

習 題 一

(1)以立方體的體積表示爲其邊的函數，當其邊各爲 2 呎、7 呎、3.1 釐米時，求體積的值。

(2)以球的體積與面積各表示爲其半徑的函數；並以其體積表示爲其面積的函數。

(3)某一正四角錐的高爲其底邊的三倍。以此錐體積表示爲其底邊的函數；並表示爲其高的函數。

(4)從光源而來的照度 I，隨其燭光 c 而正變，隨其距離 d 的平方而反變。設距離爲 10 呎，試以照度表示爲燭光的函數。設燭光爲 50，試以照度表示爲距離的函數。離 0.5 燭光 10 呎處與離 50 燭光 100 呎處，那個照度大些？

求當 $x=1$ 與 $x=4$ 時，下列各函數的值；並求當 x 從 1 變爲 4 時，函數的增加量或減少量。

(5) $y=x^2+2x$。　　(6) $s=3\sqrt{x}$。

(7) $u=2x+\frac{1}{2x}$。　　(8) $y=\log_{10}x$。

(9) $y=\tan x$。　　(10) $y=2^x$。

(11) $y=x-3x^2$。　　(12) $y=x-x^3$。

(13) $y=-5x+\frac{1}{x}$。　　(14) $y=-x^2+x$。

2. 垂直坐標制 (a system of rectangular coordinates) 我們在平面上引互相垂直的兩個直線(圖 1)。此兩個直線的交點 O，稱爲原點(origin)，直線本身稱爲垂直坐標制的軸(Axes)。分別之，直線 XOX' 稱爲 x 軸，或稱橫坐標軸 (axis of abscissas)；直線 YOY' 稱爲 y 軸，或稱縱坐標軸(axis of ordinates)。

欲將 OX 上的各點彼此分開；因此每點附一記號，稱爲一數。這原可任意的做去，但爲系統與秩序的緣故，我們任意取定便利的單位長，沿着 XOX' 量取各點，而以一串數 1，2，3，4……按次附於由 O 向右的各點：而以 -1，-2，-3，-4……按次附於由 O 向左的各點。於是用分數與無理數時也與整數一樣，XOX' 上的每點相當於

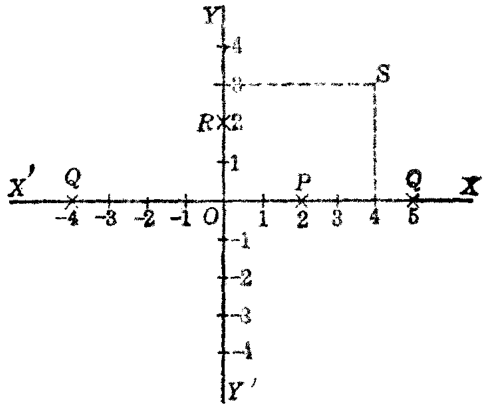

圖 1

一數，而每數相當於 XOX' 上一點。同樣，YOY' 上的每點相當於一數，而每數相當於 YOY' 上一點。但已知一數爲 2，我們不知其所指者爲 P 點，抑 R 點(圖 1)。欲除去這種含糊，若指 P 點，我們可說橫坐標(或 x)爲 2 的一點；若指 R 點，我們可說縱坐標(或 y)爲 2 的一點；各寫爲 $x=2$ 與 $y=2$。

再設我們欲考察不在此兩軸上的一點 S。顯然，其橫坐標，卽沿着或平行着 OX 的距離爲 4，又其縱坐標，卽沿着或平行着 OY 的距離，爲 3；我們寫爲 $x=4$，$y=3$，❶ 或更簡單些，寫爲(4,3)。故平面上的每點相當一對的數，而每對的數相當於平面上的一點。須得注意，坐標制是一種鏈索，結合簡單的幾何觀念，(點)與簡單的代數觀念，(數)普遍的說，這是此兩門算學的鏈索；故此每一門可以用另一門作爲研究上的幫助。

3. 函數與圖線：圖線的描繪(plotting graph)　以 y 作爲 x 的簡單函數，設如 $y=2x+3$。我們可令自變數 x 取任意的值，再計算此函數 y 的相當值，列成下表：

❶顯然的，我也可用別的字母。設如 OT 可爲橫坐標軸，OS 可爲縱坐標軸。則此點爲 $t=4$，$s=3$。

x	0	1	2	3	-1	-2	-3	等等
y	3	5	7	9	1	-1	-3	等等

我們既有此七對的數，即 x 與 y 的值，而每對這樣的數，如前所見，在坐標制內可相當於一點。若畫出這許多點（稱爲描繪牠們），即得一圖，這是兩個變數 x 與 y 的函數關係的圖形表示，如圖 2。

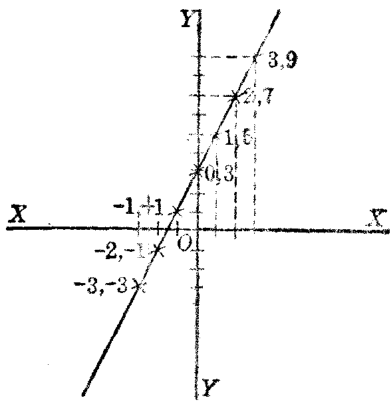

圖 2

我們若以很小的間距而取 x 的值，則要多少點就可得多少點，要如何接近就可如何接近；此圖線可漸漸成爲近於連續的線。我們稱 y 爲 x 的連續函數(continuous function)，這觀念以後還有嚴密的定義（參閱第 5 節）。現在可用圖線與幾何方法，或方程式與代數方法來研究 y，即 x 的函數。確實的，在許多情形中，兩者都用。最須小心注意，若一點位於圖線上，則其坐標必須適合(satisfy)此圖線的方程式；若一對坐標的值適合方程式，則其相當的一點必位於此函數的圖線上。又若一點而同時位於兩個（或幾個）圖線上，則其坐標將適合兩個（或幾個）圖線的方程式。我們若欲求適合於兩個方程式的變數（如 x 與 y）的值，可鈎繪此兩個方程式的圖線而量測其交點的橫坐標與縱坐

標;反之,我們若欲求兩個圖線的交點,則可聯立解 (solve simultaneously) 此兩個圖線的方程式。故如 $y=2x-3$ 與 $x+y=4$ 的圖線相交於一點 $x=\frac{7}{3}$, $y=\frac{5}{3}$。

我們再觀察幾個其他的簡單函數。

例一 $y=2x^2-8$,見圖 3。

x	0	1	2	3	-1	-2	-3	等等
y	-8	-6	0	10	-6	0	10	等等

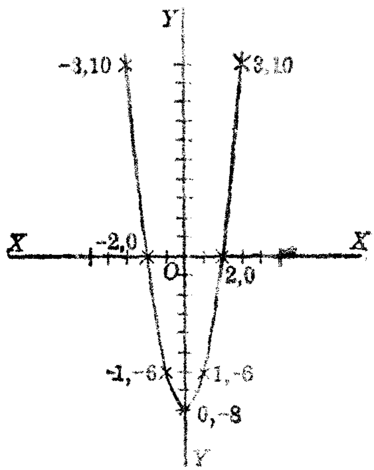

圖 3

例二 $y=\sin x$,見圖 4。

鈎繪此圖線時,因 x 須沿 OX 量取,故以角表示爲弧度 (radian) 較便。

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y	0	.50	.87	1.00	.87	.50	0	$-.50$	$-.87$	-1.00	$-.87$	$-.50$	0

x 不必取大於 2π 的值，而再求 y，因三角函數是週期的 (periodic)；卽每隔 2π 可發現相同的函數值。注意，爲便利計，這裏兩軸各取不同的單位。

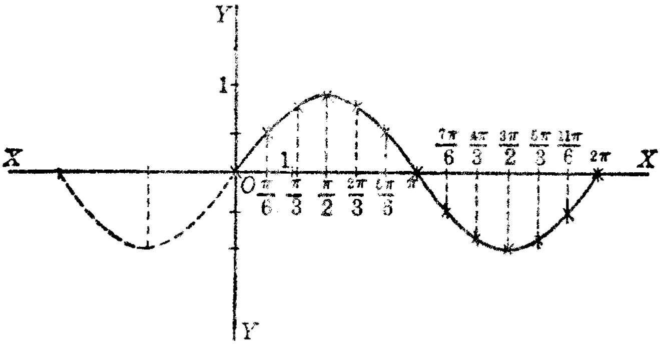

圖 4

此圖線向左右無限伸張，重複着已繪出的部份，如圖 4 中虛線所示。

例五 $y=2\cos 3x$，見圖 5。

x	0	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{9}$	$\frac{5\pi}{18}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{18}$	$\frac{4\pi}{9}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{18}$	$-\frac{\pi}{9}$	$-\frac{\pi}{6}$
$3x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$
y	2	1.74	1	0	-1	-1.74	-2	-1.74	-1	0	1.74	1	0

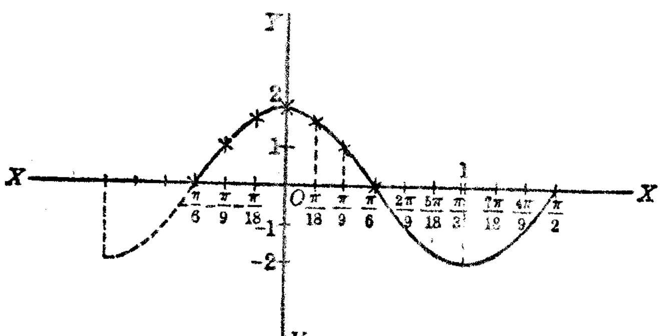

圖 5

本例中留心注意，計算 y 的值時我們雖用 $3x$ 的值，但我們在描繪點時，用的是 x 與 y 的值。又須注意，爲便利計，沿 OY 所用的單位較沿 OX 的爲小。

習 題 二

(1)原點的坐標是什麼？y 軸上任意點的橫坐標是什麼？x 軸上任意點的縱坐標是什麼？

(2) $(1,3)$ $(1,4)$ $(0,-1)$ $(3,-2)$各點位於函數 $y=5x-1$ 的圖線上麼？牠們位於 $y=2x^2+1$ 的圖線上麼？何故？

(3)那些點是方程式 $x=3$ 所代表的？又 $y=-2$；$x=0$；$y=0$ 呢？

描繪下列各函數的圖線：

(4) $2y=x+4$。　　(5) $y=3x$。

(6) $y=\frac{x}{4}-3$。　　(7) $y=(x-1)^2$。

(8) $y=\frac{x^3}{3}$。　　(9) $y=x-x^2$。

(10) $y=\sin\frac{x}{2}$。　　(11) $y=3\cos 2x$。

(12) $y=\tan x$。　　(13) $y=\sec x$。

(14)一個物體在時間 t 內，下落所經的距離 s，可用方程式 $s=16t^2$ 表示之。用圖線以距離表示爲時間的函數。

(15)用圖線，以立方體體積表示爲其邊的函數。

(16)作一圖線表示圓的面積爲其半徑的函數。

(17)一個質點依照下列條件而運動：其與 y 軸的距離須爲 $x=2t$，其與 x 軸的距離須爲 $y=t-2$，此中 t 代表此點運動所歷的時間，以秒爲單位。描繪此質點在最初 10 秒鐘內所走的路程。牠從那一點出發的？第十秒鐘之末，在那一點？

試求下列各對圖線的交點：

(18) $y=2x-3$；$x=y$。　　(19) $2x+3y=7$；$x-y=4$。

(20) $x+2y=2$；$3x-4y=1$。　　(21) $y=x$；$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$。

(22) $y=x+1$；$x^2+y^2=16$。　　(23) $y=x$；$y=4x^3$。

(24) $y=2$；$y=3\sin x$。　　(25) $y=1$；$y=\cos\frac{x}{2}$。

(26) $y=\sqrt{3}$；$y=\tan x$。

(27)兩個質點各在一個通過原點 0 的直線上運動，各依定律 $s=3t-5$ $s=t+4$。何時(t)此兩個質點與原點有相等的距離(s)？此距離為何？

兩個質點在通過原點 0 的同一直線上運動，各依定律 $s=t+4$ 與 $s=t^2-5$。解答下列各題。

(28)此兩個質點何時與 0 有相等的距離？此距離為何？

(29)何時此第一質點與 0 的距離為第二質點與 0 的距離之兩倍？其距離各為何？

(30)何時此第二質點與 0 的距離為第一質點與 0 的距離之兩倍？其距離各為何？

4. 圖線的鈎繪：奇異點(sketching graphs: peculiar points)

在許多問題中，代表一個函數的圖線，其確切的形態並不像大概的形態為我們所重視；例如此圖線為封閉曲線否；其限值為何；奇異點在何位置。這些消息的獲得，不必很正確的描繪圖線，只須參照其奇異性而鈎繪之。下列的例，說明前述目的上所應用的幾種方法。

例一 $y+2=3(x-1)^2$。

令 $$y+2=y',\quad x-1=x'。$$

此方程式即變為 $$y'=3x'^2。$$

顯然，x' 取絕對值相等的正負二值，則 y' 的值相同，故此曲線關於 OY' 為對稱❶ (symmetrical)。又 x' 只有平方出現，故 y' 不能為負。當 x' 的絕對值為最小 (即為 0) 時，y' 亦為最小值，0。故不費求得許多點的功夫，即可將曲線易於鈎繪出來。參閱圖 6。

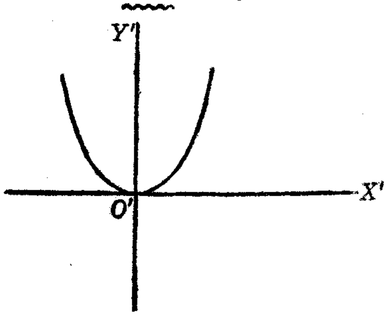

圖 6

但此非原有函數的圖線，而是簡化後函數 $y'=3x'^2$ 的圖線。但從上述假定，可知 $y=y'-2$，$x=x'+1$；即是從實在 x 軸的距離 (y) 比從 OX' 的小 2；又從實在 y 軸的距離 (x) 比從 OY' 的大 1。所以我們在 OX' 之上 2 單位處繪出平行的 OX，又在 OY' 之左 1 單位處繪出

❶普遍言之，是值得注意的，若方程式而含有 x (或 y)的偶次冪，則其曲線關於 OY (或 OX)為對稱。