21世纪高等院校教材

经 典 力 学

下 册

强元棨 编著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书是作者根据在中国科学技术大学、青岛大学多年从事力学和理论力学教学的实践经验写出的、把力学和理论力学两门课程打通的一本教科书.

本书分上下册,上册包括质点运动学、质点动力学、振动和波、有心运动、流体力学基础和狭义相对论;下册包括刚体运动学、质点系动力学、刚体动力学、力学的拉格朗日表述、有限多自由度系统的小振动和力学的哈密顿表述.

本书可作为综合性大学、师范院校、理工科大学物理系一年级下学期的力学课和二年级上学期的理论力学课的教材,也可供其他专业的师生作教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

经典力学(上下册)/强元棨编著.—北京:科学出版社,2003

(21世纪高等院校教材)

ISBN 7-03-010644-X

Ⅰ.经… Ⅱ.强… Ⅲ.力学-高等院校-教材 Ⅳ.O3

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第054756号

责任编辑:鄢德平　责任校对:曹锐军

责任印制:安春生　封面设计:王　浩

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

源海印刷厂 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2003年1月第 一 版　开本:720×1000　1/16

2003年1月第一次印刷　印张:34

印数:1—3 000　字数:648 000

定价: 72.00元(上下册)

(如有印装质量问题,我社负责调换〈北燕〉)

讲课学时分配参考意见

质点运动学　4	质点动力学　14
振动和波　14	有心运动　10
流体力学基础　8	狭义相对论　14

上册共 64 学时

刚体运动学　6	质点系动力学　10
刚体动力学　12	
力学的拉格朗日表述　16	
有限多自由度系统的小振动　8	
力学的哈密顿表述　16	

下册共 68 学时

机动　12 学时　　上下册共 144 学时

所计学时不包括习题课,也不包括打 * 号部分.

目　　录

第七章　刚体运动学

第一章我们讨论了质点运动学,可以视为质点的物体无需考虑物体上各点速度、加速度之间的差异,因此只需讨论物体上任意选定的一点的位置、速度、加速度、轨道即可.这一章讨论的刚体不是质点.因此对于给定的刚体的运动,要能说明刚体任何一点的位置、速度、加速度、轨道等等.刚体当然可以分成许多部分,每一部分上各点的速度(加速度)间的差别可以忽略,即每一部分都是质点,整个刚体是一个质点系.是否对每一个质点的都逐一加以说明呢?不必,刚体是一个特殊的质点系.只要对它的为数不多的几个物理量加以说明即可.由此就能获知刚体上任何一点的运动状况,刚体运动学要讨论的就是这些问题.

§7.1　基本概念

1. 刚体

刚体是一个特殊的质点系,是指在任何力的作用下,它的任何两点间的距离保持不变的物体.它和质点一样,也是实际物体理想化了的一种抽象模型,任何物体在力的作用下,大小、形状多少总有变化,因此绝对的刚体不存在.但是如果物体运动中,其大小、形状的变化可以忽略不计,就可把它作刚体处理.

2. 自由度及刚体运动的分类

描述运动物体或说得更一般一点一个力学系统的位置所需要的独立坐标的数目,称为该力学系统的自由度.如果运动质点的位置需要三个独立坐标,则说它有三个自由度或自由度为3.在一个平面或一个曲面上运动的质点,有两个自由度.因为给了两个坐标,第三个坐标就惟一确定了.自由度顾名思义是自由的程度.受的限制越多,自由度就越小.运动时不受任何限制的质点,可称为自由质点.自由质点总有三个自由度.即使自由质点作抛物运动和自由落体运动,分别是在一个平面上和一条直线上运动,那是解动力学方程的结果,质点未受限制只能在此平面上和在此直线上运动,自由度也是三个.

刚体有多大的自由度?刚体由无数个质点组成,可这些质点之间保持距离不

变,因此它绝没有无数个自由度.刚体模型本身就作了无数个限制.刚体的自由度多大,还要看运动中还受到外加的什么限制(或叫约束)没有.

根据约束的不同情况,可对刚体的运动加以分类.

(1) 自由刚体的运动

这是不受任何约束的刚体的运动,也可称为刚体的一般运动.现在我们来看它有多大的自由度.显然,由于刚体上任何两点间的距离保持不变,只要给定不在同一直线上的三点的位置,刚体的位置也即刚体上任何点的位置就完全确定了.因为任何第四点的位置(x_4、y_4、z_4)与这三点保持距离不变,即有下列三个关系:

$$(x_4 - x_i)^2 + (y_4 - y_i)^2 + (z_4 - z_i)^2 = d_{i4}^2 \quad (i = 1,2,3)$$

其中 d_{i4}是第四点与第 i 点间的距离.只要 x_i、y_i、z_i($i=1,2,3$)给定,由上述三式可以确定 x_4、y_4 和 z_4.

那么三个点共有 9 个坐标,是否有 9 个自由度呢?不然,这三个点相互间距离也保持不变,也有三个关系:

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 = d_{ij}^2 \quad (i,j = 1,2,3;i \neq j)$$

d_{ij}是第 i 个点与第 j 个点间的距离.

因此,9 个坐标中只有 6 个是独立的.刚体的一般运动有六个自由度.

(2) 刚体的平动

第一章已经指出,作平动的刚体,从运动学的角度看,可以作质点处理.如果没有受到外加的约束,它是自由质点,有三个自由度.也可以用上述讲法予以说明,特别选择不在同一直线上的三点 $A(x_1、y_1、z_1)$、$B(x_1、y_1、z_2)$、$C(x_3、y_1、z_1)$,由于刚体作平动,AB 线、AC 线在运动中始终保持与自己平行,A、B 两点始终有相同的 x、y 坐标,A、C 两点始终有相同的 y、z 坐标.现有 5 个坐标变量,要满足两两距离不变的三个关系,它们是$(z_2 - z_1)^2 = d_{AB}^2$,$(x_3 - x_1)^2 = d_{AC}^2$,$(x_3 - x_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = d_{BC}^2$.因有勾股定理,第三式可从前两式相加得到,不独立.因而有 $5-2=3$,三个自由度.

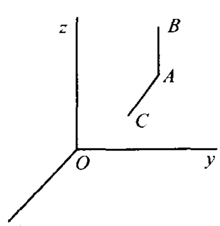

图 7.1.1

(3) 刚体的定轴转动

如果刚体运动时,刚体"上"(打引号是为了包括并不在刚体上,但刚体运动时

它们相对于刚体上各点的位置不变,好像有无形的刚性杆把它们连在刚体上这种情况)至少有两点始终保持不动的运动.这两点连线上的各点都是固定点,刚体只能围绕这条直线转动.这条直线就是刚体转动时的固定转轴,故称刚体的这种运动为刚体的定轴转动.

定轴转动只有一个自由度.证明如下:选不在同一直线上的三点,其中两点选在转轴上,第三点有三个坐标,它与转轴上的两点间距离不变,有两个关系式.因而只有一个独立坐标,故只有一个自由度.

(4) *刚体的平面平行运动*

运动时,刚体上各点都在各自的平面上运动,这些平面又必然互相平行.为把其特色表达得更明白一点,称它为平面平行运动.由于各点的运动平面互相平行是必然的,也可称为平面运动.

平面平行运动最多有3个自由度,证明如下:选择始终在同一平面上运动的不在同一直线上的三点,把这平面取为 xy 平面,三点的位置为(x_i、y_i),($i=1$、2、3),共6个坐标,三点间距离保持不变,6个坐标变量满足3个关系,故只有3个独立坐标.证毕.

(5) *刚体的定点转动*

运动过程中,刚体"上"有一点固定不动的运动称为刚体的定点转动.每一瞬时,刚体绕通过此固定点的某条直线转动,这条直线不固定(如固定的话,那是定轴转动),因此,每个瞬时都有一个通过固定点的瞬时转轴.确定刚体的定点转动的自由度时,可这样选取三点:一点就选固定点,它的坐标不是变量,另两点与固定点不在同一直线上,有6个坐标,三点间两两距离保持不变,有3个关系式,故刚体的定点转动有3个自由度.

***3. 角速度矢量**

§3.1 中讲的动参考系实际上就是一个刚体.在质点运动过程中,动参考系和固连于它的坐标系是绝不发生变形的,完全符合刚体应具有的特征.平动参考系是刚体在作平动,转动参考系是刚体在作定轴转动(如 $\boldsymbol{\omega}$ 转轴方向不变)或定点转动($\boldsymbol{\omega}$ 方向随时间变化),有平动又有转动的参考系是刚体作平面平行运动或一般运动.所讲的牵连速度和牵连加速度就是与质点位置重合的刚体"上"的点的速度和加速度.在§1.3 中已经讲了转动角速度,而且已把它标作矢量,没有予以证明.鉴于角速度是刚体运动学中一个十分重要的物理量,这里对角速度是矢量作一个不很严格的证明.

(1) 矢量的定义及其性质

矢量是一个既有大小又有方向的量，可用一个有向线段表示，线段的长度表示大小，线段的箭头指向表示方向. 两个矢量如大小相等方向相同，它们是相等的. 矢量不仅是有大小有方向的量，还要求其加法符合平行四边形法则或三角形法则，如图 7.1.2(a)、(b)所示.

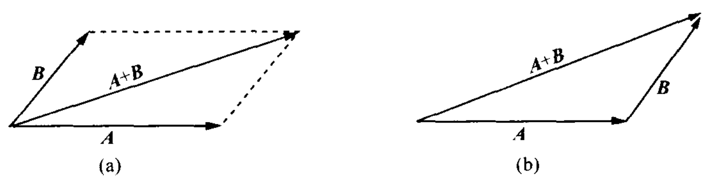

图 7.1.2

矢量具有以下性质：

a. 加法运算具有交换律，即 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$.

b. 加法运算具有结合律，即$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$.

c. 矢量和标量的乘积是矢量，而且矢量的数乘具有分配律，即

$$\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$$

需要说明的是以上特性不是矢量所独有的，即具有上述特性的量不一定符合矢量加法的运算法则，因而不一定是矢量.

d. 由两个矢量的矢积定义的矢量具有分配律

$$\boldsymbol{C}\times(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{B}$$

(2) 有限角位移不是矢量，无限小角位移是矢量

角位移可以看做有大小有方向的量，用有向线段表示时，线段的长度与角位移的大小成正比，线段的箭头指向为右手螺旋在转动平面内作此转动时螺轴前进的方向. 我们用两个特殊的角位移的相加可以做出有限角位移不是矢量的结论.

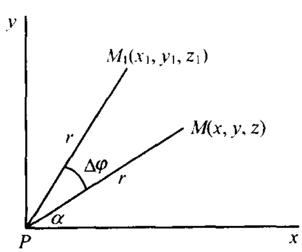

图 7.1.3

第一个角位移是由绕 z 轴转 $\Delta\varphi$ 角引起的，它使坐标为$(x、y、z)$的 M 点变为坐标为$(x_1、y_1、z_1)$的 M_1 点，如图 7.1.3 所示. 显然有

$$z_1=z.$$

为求此转动前后的其他坐标变换关系,设 M 点离 z 轴的距离为 r,M 点到 z 轴的垂线与 z 轴的交点为 P,PM 与 x 轴的夹角为 α,则

$$x = r\cos\alpha$$

$$y = r\sin\alpha$$

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos(\alpha + \Delta\varphi) = r\cos\alpha\cos\Delta\varphi - r\sin\alpha\sin\Delta\varphi \\ &= x\cos\Delta\varphi - y\sin\Delta\varphi \\ y_1 &= r\sin(\alpha + \Delta\varphi) = r\sin\alpha\cos\Delta\varphi + r\cos\alpha\sin\Delta\varphi \\ &= y\cos\Delta\varphi + x\sin\Delta\varphi. \end{aligned}$$

这个角位移引起的坐标变换关系可写成矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\Delta\varphi & -\sin\Delta\varphi & 0 \\ \sin\Delta\varphi & \cos\Delta\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

第二个角位移是由绕 x 轴转 $\Delta\psi$ 角引起的,它使坐标为(x、y、z)的 M 点变为坐标为(x_2、y_2、z_2)的 M_2 点.用上述方法或考虑 x、y、z 轴的相对位置参考上述结果直接写出下列坐标变换关系:

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ z_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\Delta\psi & -\sin\Delta\psi & 0 \\ \sin\Delta\psi & \cos\Delta\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$$

或

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Delta\psi & -\sin\Delta\psi \\ 0 & \sin\Delta\psi & \cos\Delta\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

先作上述第一个转动再作上述第二个转动,点 M(x、y、z)最终变为点

$M_{12}(x_{12}、y_{12}、z_{12})$，坐标变换关系为

$$\begin{pmatrix} x_{12} \\ y_{12} \\ z_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Delta\psi & -\sin\Delta\psi \\ 0 & \sin\Delta\psi & \cos\Delta\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\Delta\varphi & -\sin\Delta\varphi & 0 \\ \sin\Delta\varphi & \cos\Delta\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\Delta\varphi & -\sin\Delta\varphi\cos\Delta\psi & \sin\Delta\varphi\sin\Delta\psi \\ \sin\Delta\varphi & \cos\Delta\varphi\cos\Delta\psi & -\cos\Delta\varphi\sin\Delta\psi \\ 0 & \sin\Delta\psi & \cos\Delta\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

先作上述第二个转动再作上述第一个转动，点 $M(x、y、z)$最终变为 $M_{21}(x_{21}、y_{21}、z_{21})$，坐标变换关系为

$$\begin{pmatrix} x_{21} \\ y_{21} \\ z_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\Delta\varphi & -\sin\Delta\varphi & 0 \\ \sin\Delta\varphi & \cos\Delta\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Delta\psi & -\sin\Delta\psi \\ 0 & \sin\Delta\psi & \cos\Delta\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\Delta\varphi & -\sin\Delta\varphi\cos\Delta\psi & \sin\Delta\varphi\sin\Delta\psi \\ \sin\Delta\varphi & \cos\Delta\varphi\cos\Delta\psi & -\cos\Delta\varphi\sin\Delta\psi \\ 0 & \sin\Delta\psi & \cos\Delta\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

比较两个坐标变换关系中的变换矩阵可见，当 $\Delta\varphi$、$\Delta\psi$ 不都是无限小量时，$x_{21} \neq x_{12}$，$y_{21} \neq y_{12}$，$z_{21} \neq z_{12}$，M_{21}点与 M_{12}点不重合，说明相继作两个转动的次序是不可交换的，没有交换律，表示有限角位移的有向线段一定不符合矢量的加法运算法测，它不是矢量；而当 $\Delta\varphi$、$\Delta\psi$ 均为无限小量时，为与有限量相区别，改用 $d\varphi$、$d\psi$ 表示相应的无限小量，只保留一级小量，$\cos d\varphi = \cos d\psi = 1$，$\sin d\varphi = d\varphi$，$\sin d\psi = d\psi$，$\sin d\varphi \sin d\psi = 0$，有 $x_{21} = x_{12}$、$y_{21} = y_{12}$、$z_{21} = z_{12}$，M_{21}点与 M_{12}点重合，可得出结论：表示无限小角位移的有向线段的加法运算具有交换律，但还不能由此得出结论说无限小角位移的加法符合平行四边形法则. 完全可以说明两个任意的无限小角位移的加法符合平行四边形法则，下面讲的角速度矢量足以弥补这里未予证明的不足.

(3) 角速度矢量

如证明了两个任意的无限小角位移的加法符合平行四边形法则，则无限小角

位移是矢量,用上述性质 c 就证明了角速度是矢量.我们的做法是,先假定角速度是矢量,用上述性质 d,两个矢量的矢积是矢量,证明按平行四边形加法运算法则有

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$$

从而证实了原先的假定:角速度是矢量.

现有一刚体在某时刻既围绕 OA 轴以角速度 $\boldsymbol{\omega}_1$ 转动、又围绕 OB 轴以角速度 $\boldsymbol{\omega}_2$ 转动,如图 7.1.4 所示.说得详细一点,刚体在此时刻围绕动参考系中的固定轴 OA 以角速度 $\boldsymbol{\omega}_1$ 转动,动参考系又围绕静参考系中的固定轴 OB 以角速度 $\boldsymbol{\omega}_2$ 转动,要证明:刚体在此刻围绕静参考系中的固定轴 OC 以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 转动.

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$$

符合矢量的平行四边形加法法则.

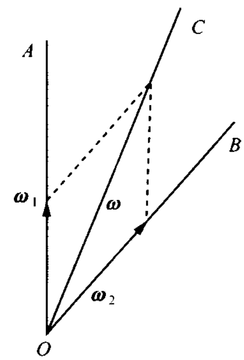

图 7.1.4

证明分两步走.第一步,证明按平行四边形法则确定的 OC 直线是转轴.OC 上任一点的速度为零.在 OC 上任取一点 P,设 $OP=r$,OC 与 OA、OB 的夹角设为 α、β,由平行四边形对边平行,内错角相等以及三角形边角的正弦定理可得

$$\frac{\omega_2}{\sin\alpha} = \frac{\omega_1}{\sin\beta} \quad 即 \quad \omega_1\sin\alpha = \omega_2\sin\beta$$

绕 OA 轴作角速度 $\boldsymbol{\omega}_1$ 的转动,P 点的速度垂直纸面向下,大小为 $\omega_1 r\sin\alpha$,绕 OB 轴作角速度 $\boldsymbol{\omega}_2$ 的转动,P 点的速度垂直纸面向上,大小为 $\omega_2 r\sin\beta$.同时作上述两个转动,P 点的速度为上述两个速度之和等于零.

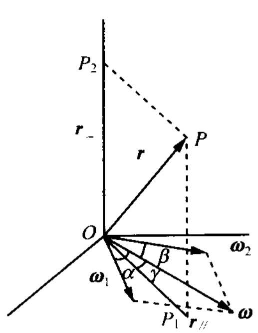

图 7.1.5

第二步,证明 $\boldsymbol{\omega}_1$、$\boldsymbol{\omega}_2$ 按平行四边形法则相加得到的 $\boldsymbol{\omega}$,对刚体上任何一点,有

$$\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{r} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \tag{1}$$

即按两种转动计算的速度之矢量和等于按合成的转动计算的速度.

任一点 P 对 O 点的位矢总可以分解为 $\boldsymbol{r}_{/\!/}$ 和 $\boldsymbol{r}_\perp$,$\boldsymbol{r}_{/\!/}$ 在 $\boldsymbol{\omega}_1$、$\boldsymbol{\omega}_2$、$\boldsymbol{\omega}$ 所在的平面上,$\boldsymbol{r}_\perp$ 与上述平面垂直.为明显起见,我们把图 7.1.4 改画成图 7.1.5.将 $\boldsymbol{r}_{/\!/}$、

$\boldsymbol{r}_{\perp}$的矢端记为 P_1、P_2,要证明在计算 P_1 点的速度时,有

$$\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{r}_{/\!/} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{r}_{/\!/} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{/\!/} \tag{2}$$

证明　规定垂直 $\boldsymbol{\omega}_1$、$\boldsymbol{\omega}_2$、$\boldsymbol{\omega}$ 所在平面向下的速度为正. 设 $\boldsymbol{r}_{/\!/}$ 与 $\boldsymbol{\omega}$ 的夹角为 ν.

$$\begin{aligned}(2)\text{式左边} &= -\omega_1 r_{/\!/}\sin(\alpha-\nu) + \omega_2 r_{/\!/}\sin(\beta+\nu)\\ &= -\omega_1 r_{/\!/}(\sin\alpha\cos\nu - \cos\alpha\sin\nu)\\ &\quad + \omega_2 r_{/\!/}(\sin\beta\cos\nu + \cos\beta\sin\nu)\\ &= -(\omega_1\sin\alpha - \omega_2\sin\beta) r_{/\!/}\cos\nu + (\omega_1\cos\alpha + \omega_2\cos\beta) r_{/\!/}\sin\nu\\ &= (\omega_1\cos\alpha + \omega_2\cos\beta) r_{/\!/}\sin\nu = \omega r_{/\!/}\sin\nu = \text{右边}\end{aligned}$$

其中用了 $\boldsymbol{\omega}_1$、$\boldsymbol{\omega}_2$ 和 $\boldsymbol{\omega}$ 之间的平行四边形关系

$$\omega_1\sin\alpha - \omega_2\sin\beta = 0$$

$$\omega_1\cos\alpha + \omega_2\cos\beta = \omega$$

同样考虑 P_2 点的速度,可证

$$\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{r}_{\perp} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{r}_{\perp} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{\perp} \tag{3}$$

(2)、(3)两式相加即得(1)式

$$\boldsymbol{\omega}_1 \times (\boldsymbol{r}_{/\!/} + \boldsymbol{r}_{\perp}) + \boldsymbol{\omega}_2 \times (\boldsymbol{r}_{/\!/} + \boldsymbol{r}_{\perp}) = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{r}_{/\!/} + \boldsymbol{r}_{\perp})$$

$$\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{r} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

考虑到 $\boldsymbol{r}$ 是任意的,即得　$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$,证毕.

§7.2　刚体的运动学方程

运动学方程要能说明这个系统的每一点的坐标是如何随时间变化的. 对于一个刚体来说,其运动学方程就是描述刚体位置的独立坐标与时间的函数关系. 要在动力学中列出的这些独立坐标满足的微分方程易解. 这里就有一个如何选取独立坐标的问题. 下面我们就刚体的各类运动分别说明.

1. 平动

刚体的平动,在运动学方面可以视为一个质点,可用刚体上任一点的坐标. 未

受约束时有三个自由度.运动学方程为

$$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}\quad 或 \begin{cases}\rho=\rho(t)\\\varphi=\varphi(t)\\z=z(t)\end{cases}\quad 或 \begin{cases}r=r(t)\\\theta=\theta(t)\\\varphi=\varphi(t)\end{cases}\quad 等.$$

2. 定轴转动

只有一个自由度,可取转轴为 z 轴,可用轴外任一点在柱坐标中的 φ 为坐标.运动学方程为

$$\varphi=\varphi(t)$$

3. 平面平行运动

平面平行运动时,刚体上各点均在各自的平面上运动,这些平面互相平行.我们取静坐标系的 xy 平面与这些平面平行.在同一时刻,x、y 值相同 z 值不同的各点有完全相同的运动状况(速度、加速度),各点的 z 坐标在运动过程中保持不变.

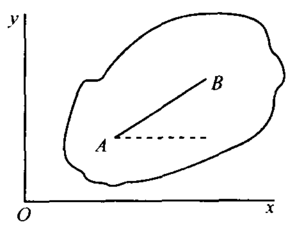

图 7.2.1

作平面平行运动的刚体最多有三个自由度.可选刚体"上"位在 xy 平面上的一点 A 的 x、y 坐标和另一点 B 与 A 的连线与 x 轴的夹角 φ 为独立坐标.运动学方程为

$$x=x(t),\ y=y(t),\ \varphi=\varphi(t)$$

4. 定点转动　欧拉角

定点转动有三个自由度.取固定点以外的刚体"上"任何两点的直角坐标不方便,因为六个坐标中满足三个关系.取刚体"上"某条线的三个方向余弦即它与 x、y、z 轴的三个夹角 α、β、γ 的余弦以及围绕此直线的转角也不方便.原因是三个余弦满足一个关系:$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.欧拉提出用 θ、φ、ψ 三个角(被称为欧拉角)来表述作定点转动的刚体的位置.下面我们就来讲三个欧拉角是如何规定的.

取固定点为坐标系原点,$O\xi\eta\zeta$ 为静坐标系,取固连于刚体的 $Oxyz$ 动坐标系.动坐标系相对于静坐标系的位置反映了刚体的位置.用三个欧拉角来表述这两个