

中央人民政府高等教育部推薦

高等學校教材試用本

材料力學教程

第 二 卷

М. М. ФИЛОНЕНКО-БОРОДИЧ主編
陶 學 文 譯

高等教育出版社

中央人民政府高等教育部推薦
高等學校教材試用本



材 料 力 學 教 程

第 二 卷

M. M. 費洛甯軻—鮑羅第契主編
陶 學 文 譯

高 等 教 育 出 版 社

本書係根據蘇聯技術理論書籍出版社(Государственное издательство технико-теоретической литературы)出版的費洛甯柯—鮑羅第契(М. М. Филоненко—Бородин)主編,費洛甯柯—鮑羅第契(М. М. Филоненко—Бородин)、依魯莫夫(С. Н. Изюмов)、奧利索夫(Б. А. Олисов)、庫特略采夫(И. Н. Кудрявцев)、馬里金諾夫(Л. И. Мальчинов)合著“材料力學教程”(Курс сопротивления материалов)1949年版第一卷第三版修訂本譯出。原書經蘇聯高等教育部審定為高等工業學校教科書。

此為中譯本的第二卷。

本書第一卷由商務印書館出版,第二卷改由本社出版。

材 料 力 學 教 程

第 二 卷

書號3(原3)

費 洛 甯 柯—鮑 羅 第 契 主 編

陶 學 文 譯

高 等 教 育 出 版 社 出 版

北 京 瑞 遠 路 一 七 〇 號

新 華 書 店 華 東 總 分 店 總 經 售

上 海 南 京 西 路 一 號

商 務 印 書 館 印 刷 廠 印 刷

上 海 天 道 巷 路 一 九 〇 號

開本787×1092 1/25 印張20²⁴/₂₅ 字數 430,000

一九五四年五月上海第一版 印數 1—6,000

一九五四年五月上海第一次印刷 定價 ¥ 28,500

上海市書刊

原 序

本書第一卷包括了高等工業學校學生在學習高等教育部現行教學大綱基本部分所必需的教材。在這第二卷中，敘述了在教學大綱中根據學校專門化而選擇的補充部分；也包括在實際工作中所碰到的一些問題，雖然這些問題暫時由於困難或新奇還未列入教學大綱內；這些問題包括：非圓斷面桿的扭轉（第十章），薄壁桿（管）件的扭轉和彎曲（第十一章），測量變形和應力的方法（第十三章），平板的彎曲（第八章），塑性理論方程式（第十六章）。

第一卷中很少提到超過彈性極限後的、塑性狀態中的和在振動荷重下的材料工作情形，但是這類問題在今天的工程實際中已有着巨大意義；所以作者認為在第二卷中必須對材料在各種不同工作情形的機械性質有較完全的、一般的敘述；討論這類問題的有第二、十五、十六和十七章。

本書許多章節所涉及的科學領域，在現時已有很大發展或正在發展，有其自己的大量文獻。很難在普通教程中闡明這類問題，這就迫使作者主要地是來研究解答問題的方法，目的在於使讀者往後在閱讀較專門的著作和期刊論文時，較易理解；而這對於工程師，在設計和計算我們蘇維埃技術中很多的、性質極其複雜的機器和結構物時，常常是必需的。

在許多最複雜的工程計算問題中創造新的、進步的計算方法上，俄國和蘇聯學者佔着優先地位。作者在這方面力求指明阿·恩·克雷洛夫的方法的普遍性和有效，根據這方法敘述了涉及彎曲的複雜情形的整個第四章；這裏也必須指出佛·茲·符拉索夫關於薄壁桿計算的非常重要而普遍的理論的材料（第十一章），這理論能估計到這種桿件工作時的許多情況，是至今為工程師們所不注意的。

阿·阿·依柳辛最近在塑性理論方面完成了巨大研究,在若干重要的工程問題上已得到應用。作者認為,本書中列入在阿·阿·依柳辛的著作中已得到完善和明晰形式的這理論的基本關係的推導,是適時的(第十六章)。

現在第一、三、四、九、十三、十五各章中的材料,是本書第二版中的。第五、六和七各章主要根據姆·姆·費洛寧柯-鮑羅第契的“平面系中彈性力作功的理論的基礎”(1933年版)一書編的;但這些材料全部經過修改和重新編排。其餘各章是新寫的。

本書作者在編寫第二卷時的分工如下:

姆·姆·費洛寧柯-鮑羅第契,第一、四到七、九、十二、十五、十六各章;勃·阿·奧利索夫,第二、三、八、十七各章和第十二章的第78節;以及第七章有關曲梁的例;斯·姆·依魯莫夫,第十和十五章以及第六章的第42節;勒·依·馬里金諾夫,第十三章以及第四章的第23和28節;第十一章是依·佛·烏爾朋寫的;依·恩·庫特略采夫在編第二卷時未參加。

作者極其感謝葉·姆·哈爾科夫在準備出版本書時的很多幫助。

姆·姆·費洛寧柯-鮑羅第契

斯·姆·依魯莫夫

勃·阿·奧利索夫

勒·依·馬里金諾夫

中央人民政府高等教育部推薦 高等學校教材試用本的說明

充分學習蘇聯的先進經驗，根據國家建設需要，設置專業，培養幹部，是全國高等學校院系調整後的一項重大工作。在我國高等學校裏，按照所設置的專業試用蘇聯教材，而不再使用以英美資產階級教育內容為基礎的教材，是進一步改革教學內容和提高教學質量的正確方向。

一九五二年九月二十四日人民日報社論已經指出：‘蘇聯各種專業的教學計劃和教材，基本上對我們是適用的。它是真正科學的和密切聯系實際的。至於與中國實際結合的問題，則可在今後教學實踐中逐漸求得解決。’我們現在就是本着這種認識來組織人力，依照需要的緩急，有計劃地大量翻譯蘇聯高等學校的各科教材，並將繼續向全國推薦，作為現階段我國高等學校教材的試用本。

我們希望：使用這一試用本及今後由我們繼續推薦的每一種試用本的教師和同學們，特別是各有關教研組的同志們，在教學過程中，對譯本的內容和譯文廣泛地認真地提出修正意見，作為該書再版時的參考。我們並希望各有關教研組在此基礎上逐步加以改進，使能結合中國實際，最後能編出完全適合我國需要的新教材來。

中央人民政府高等教育部

第二卷 目錄

原序

第一章 對於直梁彎曲理論的補充材料	1
§1 考慮彈性線曲率的精確值	1
§2 剪切對彈性線形狀的影響	6
§3 細桿沿曲線板的彎曲	12
§4 剪切對縱彎曲時臨界荷重值的影響	16
§5 變斷面梁位移的確定	20
第二章 材料不服從虎克定律的梁的彎曲	22
§6 材料不服從虎克定律的梁的應力狀態	22
§7 材料不服從虎克定律的梁的位移	28
§8 剩餘應力和剩餘變形	34
§9 材料不服從虎克定律的桿受彎曲和壓縮同時作用	37
§10 超過比例極限後的縱彎曲	39
第三章 平面曲梁	43
§11 平面曲梁的彎曲問題的提出	43
§12 正應力公式的導出	47
§13 正應力公式的研究	58
§14 曲梁受彎時正應力公式的另一形式	62
§15 曲梁彎曲的微分方程	64
§16 承受內外均布壓力的厚壁圓筒	67
§17 組合圓筒內的應力，厚壁圓筒的溫度應力	73
第四章 彈性線方程式的積分的一般方法及其應用	79
§18 彈性線微分方程，克雷洛夫方法	79
§19 單跨梁的橫向彎曲	83
§20 各基本荷重情形的特解(4.17)的求得	87
§21 起始參數概念的推廣	97
§22 縱橫彎曲	100
§23 受縱橫彎曲的梁的計算例	108
§24 縱橫彎曲情形的安全係數	113
§25 連續彈性基礎上的梁，彈性線方程的積分	116
§26 無限長梁	119
§27 有限長梁	125

§ 28 彈性基礎上有限長梁計算例	137
第五章 虛位移原理應用在彈性桿	143
§ 29 虛位移原理，廣義力和廣義位移	143
§ 30 靜定系內力的確定	147
§ 31 虛位移原理應用在彈性桿	152
§ 32 雷次—鐵木生可方法	157
§ 33 彈性平衡的穩定問題	159
第六章 莫爾方法	166
§ 34 方法的根據	166
§ 35 桿內力的功	167
§ 36 彈性桿的虛位移原理的普遍方程式	172
§ 37 桿系的虛位移原理	174
§ 38 功的互等定理	176
§ 39 位移互等原理	178
§ 40 位移記號系統	179
§ 41 系的彈性位移的普遍公式	181
§ 42 大螺距螺旋彈簧的計算	191
第七章 靜不定系	198
§ 43 一個多餘未知量的系	198
§ 44 大曲率桿彎曲時的靜不定情形	202
§ 45 幾個多餘未知量的系	205
§ 46 標準方程組及其簡化，彈性中心	208
§ 47 彈性能，卡斯的諾定理	216
§ 48 最小功原理	220
第八章 平板的彎曲	223
§ 49 柱狀彎曲	223
§ 50 二方向的平板純彎曲	226
§ 51 平板的扭轉	228
§ 52 平板彎曲的普遍情形	231
§ 53 圓平板	236
§ 54 用雷次方法的平板解答	243
§ 55 沿周界自由支持的矩形平板	245
§ 56 矩形平板的其他支持形式	252
§ 57 平板內的溫度應力	256
第九章 電線、繩索和薄壁容器的計算	258
§ 58 電線和繩索的計算	258

§ 59 薄壁容器的計算	268
§ 60 器壁由於變形限制的彎曲	274
第十章 直桿的扭轉	279
§ 61 柱狀桿扭轉問題的一般解法	279
§ 62 薄膜比擬	285
§ 63 皂膜實驗解法	290
§ 64 薄壁管狀桿的扭轉	292
§ 65 超過彈性極限後的扭轉	295
第十一章 薄壁桿的扭轉和彎曲(佛·茲·符拉索夫理論)	299
§ 66 問題的提出, 自由扭轉和約束扭轉	299
§ 67 薄壁斷面桿的變形和應力	300
§ 68 座標系的選擇	304
§ 69 正應力和剪應力	306
§ 70 薄壁桿扭轉的微分方程及其積分	310
§ 71 和初等梁彎曲理論的相似	319
§ 72 開口斷面的幾何特性的確定	320
§ 73 求應力例	327
第十二章 彈性平衡之不穩定性的幾種情形	330
§ 74 均勻受壓圓環的穩定性	330
§ 75 薄平片彎曲時平面形式的穩定性	334
§ 76 工字梁彎曲時平面形式的穩定性	340
§ 77 薄壁圓管受縱向壓縮時的穩定性	343
§ 78 矩形受壓平片的穩定性	346
第十三章 測量變形和應力的方法	350
§ 79 緒言	350
§ 80 研究應力的光學方法	350
§ 81 把主應力分開的方法	360
§ 82 用歐姆電阻線轉換器測量變形和應力	374
§ 83 變形儀板	381
第十四章 局部應力	386
§ 84 聖維南原理, 局部應力的種類	386
§ 85 彎曲時的局部應力	388
§ 86 球和圓柱體的相壓	393
§ 87 拉伸(壓縮)時的應力集中	398
§ 88 彎曲時的應力集中	403
§ 89 扭轉時的應力集中	406

第十五章 強度理論	409
§ 90 概論	409
§ 91 第一強度理論	412
§ 92 第二強度理論	415
§ 93 第三強度理論	420
§ 94 莫爾理論	425
§ 95 能量理論	431
第十六章 塑性理論方程式	438
§ 96 塑性條件	438
§ 97 材料強化的計算	439
§ 98 普遍情形的應力狀態和變形間的關係	442
§ 99 塑性變形和彈性變形的分開	445
§ 100 圓斷面桿的扭轉	448
第十七章 材料的機械性質	453
§ 101 材料結構和破壞方式，塑性和脆性狀態	453
§ 102 屈服極限的提高	455
§ 103 時間對變形的影響，彈性後效，蠕變	457
§ 104 彈性滯後現象	459
§ 105 溫度對金屬機械性質的影響	460
§ 106 變形速度對材料機械特性值的影響	460
§ 107 金屬的疲勞	462
§ 108 疲勞極限圖以及疲勞極限和循環特性的分析關係	468
§ 109 各種因素對疲勞極限的影響	476
§ 110 應力集中的影響	479
§ 111 許可應力和安全係數，振動強度的計算	485
附錄 1	493
附錄 2	494
俄中名詞對照表	508
中俄名詞對照表	510

材料力學教程

第一章 對於直梁彎曲理論的補充材料

§1 考慮彈性線曲率的精確值

爲了得到直梁彎曲時彈性線微分方程式，在本書第一卷第七和十一章中，在關係式

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{M}{EJ} \quad (1.1)$$

中，曲率用它的近值 $\frac{1}{\rho} = \frac{d^2v}{dx^2}$ 代替，這在橫彎曲時彈性線形狀上只引起極微小的誤差，所以不必用較精確的方程式

$$\frac{\frac{d^2v}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \pm \frac{M}{EJ} \quad (1.2)$$

爲了對於根據近似方程(1.1)所作計算的精確度有一個概念，我們拿如下的簡單例子來比較方程(1.2)和(1.1)所給出的結果。

一懸臂梁（圖1），受加在另一端的力偶 m_0 而彎曲。梁的剛度 EJ 是常數。

作精確解時，根據方程(1.2)得：

$$\frac{1}{\rho} = + \frac{M}{EJ} = + \frac{-m_0}{EJ} = - \frac{m_0}{EJ} = \text{常數},$$

即懸臂梁彎成半徑爲 $\rho = \frac{EJ}{M}$ 的圓弧，凹向下，因爲 $\frac{1}{\rho} < 0$ 。

右端 B 梁軸切線傾角等於（圖1）：

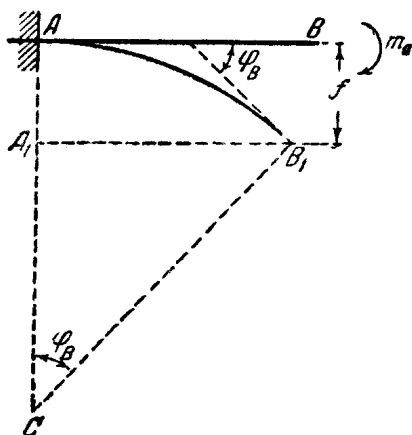


圖 1

或

$$\varphi_B = \frac{\widehat{AB_1}}{\rho} = \frac{l}{\rho},$$

$$\varphi_B = \frac{m_0 l}{EJ}. \quad (1.3)$$

右端撓度

$$f = AC - A_1C = \rho(1 - \cos \varphi_B)$$

或把 $\cos \varphi_B$ 分解成級數

$$\cos \varphi_B = 1 - \frac{\varphi_B^2}{2!} + \frac{\varphi_B^4}{4!} - \dots,$$

得：

$$f = \rho \left(\frac{\varphi_B^2}{2!} - \frac{\varphi_B^4}{4!} + \dots \right) = \frac{l}{\varphi_B} \left(\frac{\varphi_B^2}{2!} - \frac{\varphi_B^4}{4!} + \dots \right) = l \left(\frac{\varphi_B}{2!} - \frac{\varphi_B^3}{4!} + \dots \right).$$

將公式(1.3)中的 φ_B 代入上式，最後得：

$$f = l \left[\frac{1}{2} \left(\frac{m_0 l}{EJ} \right) - \frac{1}{24} \left(\frac{m_0 l}{EJ} \right)^3 + \dots \right] = \frac{1}{2} \frac{m_0 l^2}{EJ} - \frac{m_0^3 l^4}{24(EJ)^3} + \dots \quad (1.4)$$

現在用近似方程式，得到：

$$v'' = -\frac{m_0}{EJ} = \frac{m_0}{EJ}.$$

積分，並從條件 $x=0$ 時 $v=v'=0$ ，求出積分常數，得：

$$v = \frac{m_0 x^2}{2EJ}.$$

在右端：

$$v_B = f_1 = \frac{m_0 l^2}{2EJ}.$$

這結果和精確結果(1.4)的差別近似地等於：

$$f - f_1 = -\frac{m_0^3 l^4}{24(EJ)^3},$$

或用對於撓度 f_1 的百分數表示：

$$\Delta = 100 \frac{f - f_1}{f_1} = \frac{-100}{12} \left(\frac{m_0 l^2}{EJ} \right)^2 = -\frac{100}{3l^2} \left(\frac{m_0 l^2}{2EJ} \right)^2 = -33.3 \left(\frac{f_1}{l} \right)^2.$$

如果取撓度為 $\frac{1}{500}l$, 那麼

$$\frac{f_1}{l} = \frac{1}{500}$$

$$\Delta = -33.3 \frac{1}{250000} = 0.00013\%,$$

即誤差根本是微不足道的。

研究極細桿件可能發生的巨大彈性變形時, 必須用方程 (1.2); 這理論由歐拉極詳細地製定; ① 它在現代應用於儀器和機器中柔細零件的計算②。

作為例子, 用方程 (1.1) 研究一端固定的桿的縱彎曲 (圖 2) (比較第一卷 §93), 引用曲率的精確式

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{ds}.$$

於是得到:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{M}{EJ} = -\frac{Pv}{EJ} = -a^2v, \text{ 其中 } a^2 = \frac{P}{EJ},$$

或者, 微分得到

$$\bullet \frac{d^2\varphi}{ds^2} = -a^2 \frac{dv}{ds} = -a^2 \sin \varphi.$$

得到了微分方程式, 其中待求函數 $\varphi(s)$ 是切線對 Ox 軸的傾角。二邊乘以恆等式

$$\frac{dp}{ds} ds = d\varphi,$$

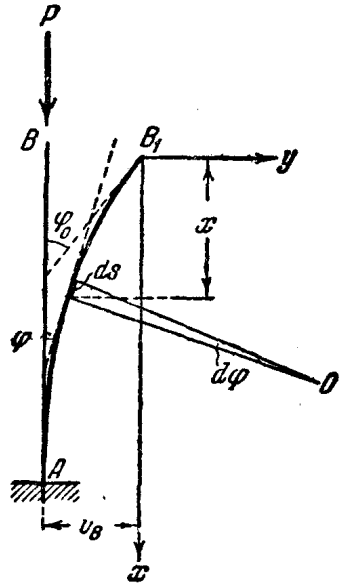


圖 2

① 參見達·歐拉, “曲線求法”, ГИИ, 莫斯科, 1934, 附錄 I, 關於彈性線。

② 例如, 參見葉·潑·波波夫 “柔細彈性零件的理論和計算”, ЛКВИА 版, 列寧格勒, 1947。

得：

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} \frac{d\varphi}{ds} ds = -a^2 \sin \varphi d\varphi,$$

或

$$d\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = a^2 d\cos\varphi.$$

積分得：

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = a^2(\cos\varphi - \cos\varphi_0),$$

其中 φ_0 是任意常數，等於座標原點處的切線傾角。我們有：

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d\varphi}{ds} = +a\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0} = a\sqrt{2} \sqrt{\sin^2\frac{\varphi_0}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}} \quad (1.5)$$

或

$$\frac{d\varphi}{2\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_0}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}} = a ds, \quad (1.6)$$

引用記號 $\sin\frac{\varphi_0}{2} = p$ ，並按公式

$$\sin\frac{\varphi}{2} = p \sin\theta, \quad (1.7)$$

把 $\varphi(s)$ 函數用 θ 函數代替，使當 $\varphi=0$ 時， $\theta=0$ ，當 $\varphi=\varphi_0$ 時， $\theta=\frac{\pi}{2}$ 。

從(1.7)有：

$$\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_0}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}} = p\sqrt{1 - \sin^2\theta} = p \cos\theta;$$

$$\cos\frac{\varphi}{2} = \sqrt{1 - p^2 \sin^2\theta}; \quad \frac{1}{2}\cos\frac{\varphi}{2} d\varphi = p \cos\theta d\theta,$$

或

$$d\varphi \sqrt{1 - p^2 \sin^2\theta} = 2p \cos\theta d\theta,$$

由此

$$d\varphi = \frac{2p \cos\theta d\theta}{\sqrt{1 - p^2 \sin^2\theta}}.$$

把所有這些代進方程(1.6)，把它改寫成：

$$\frac{d\theta}{\sqrt{1 - p^2 \sin^2\theta}} = a ds. \quad (1.8)$$

我們限於找 B 端撓度，並注意到，

當 $s=0$ 時, $\theta=0$ (在 A 點);

當 $s=l$ 時, $\theta=\frac{\pi}{2}$ 。

所以,沿桿的全長積分(從 $s=0$ 到 $s=l$), 得:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-p^2 \sin^2 \theta}} = al. \quad (1.9)$$

左邊是第一種全橢圓積分, 是參數 $p = \sin \frac{\varphi_0}{2}$ 的函數; 其數值可由相當的表中求得。

爲了求 B 端撓度, 用關係式

$$\frac{dv}{ds} = \sin \varphi = 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} = 2 \sin \frac{\varphi}{2} \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}$$

或按照(1.7)和(1.8),

$$dv = - \frac{2p \sin \theta \sqrt{1-p^2 \sin^2 \theta}}{a \sqrt{1-p^2 \sin^2 \theta}} d\theta,$$

即

$$dv = - \frac{2p}{a} \sin \theta d\theta.$$

這式子沿桿長從 B 點積分到 A 點, 得:

$$0 - v_B = - \frac{2p}{a} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin \theta d\theta = \frac{2p}{a},$$

即

$$v_B = - \frac{2p}{a}. \quad (1.10)$$

採取如下計算步驟較方便: 定下桿端傾角 φ_0 , 求出(1.9)中的積分值, 由此得到量 $a = \sqrt{\frac{P}{EJ}}$; 用這方法求得對應的荷重 P , 其次按(1.10)計算撓度 v_B 。

我們看到, 在所作解答中不僅用了曲率的精確式, 而且還考慮到較精確的邊界條件; 只略去了縱向壓縮引起的桿的縮短。

§ 2 剪切對彈性線形狀的影響

(一)在梁的橫向彎曲情形,由於所得誤差微不足道,沒有道理要引用曲率的精確值來求彈性線。在某些情形,剪切可能有比較大得多的影響,這是在本書第一卷的彈性線理論中沒有考慮過的。

現在來估計這種影響,並指出在什麼情形必須考慮它。首先我們

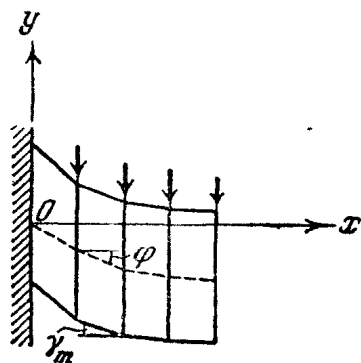


圖 3

相信,梁在只有剪力所引起的剪變形時,彎曲是可能的。為了使討論簡化,暫時假定橫斷面內的剪應力是均勻分佈的;同時,按照剪切虎克定律,剪變形沿斷面高度也應該均勻分佈,而斷面不應彎曲(圖3)。於是,顯然可寫出

$$\tau_m = \frac{Q}{F}, \quad (1.11)$$

$$\gamma_m = \frac{\tau_m}{G} = \frac{Q}{GF}, \quad (1.12)$$

其中 F 是梁的橫斷面積, G 是剪切彈性係數。

公式(1.11)給出某斷面內剪應力的平均值,公式(1.12)給出剪變形平均值。

如果各斷面剪力不同,那麼對應的平均剪變形 γ_m 也就不同,於是,如從圖3所看到的,梁發生彎曲,而梁軸切線傾角將等於 γ_m :

$$\frac{dv_1}{dx} = \operatorname{tg} \varphi = \gamma_m = -\frac{Q}{GF}.$$

此地取負號,是因為 $\frac{dv_1}{dx} < 0$; $Q > 0$; v_1 是單由剪變形引起的撓度。

把最後等式的二邊都對 x 微分,得到剪切影響引起的軸線曲率的近似值:

$$\frac{d^2 v_1}{dx^2} = -\frac{1}{GF} \cdot \frac{dQ}{dx}. \quad (1.13)$$

彈性理論中所闡明的較精確的問題解證明，值 (1.13) 稍微小了一些。爲了安全地估計剪變形對軸線彎曲的影響，我們在計算中不用平均剪應力 (1.11)，而用中性層的剪應力，這是最大的或接近於最大的剪應力：

$$\tau = \frac{QS}{Jb} = \frac{Q}{F\alpha}, \quad (1.14)$$

其中

$$\alpha = \frac{Jb}{FS}. \quad (1.15)$$

係數 α 決定於斷面形狀； S 和 b 在斷面中性軸取。把 (1.11) 用 (1.14) 代替，得到的就不是 (1.13) 而是：

$$\frac{d^2 v_1}{dx^2} = -\frac{1}{GF\alpha} \frac{dQ}{dx}. \quad (1.16)$$

把按公式 (1.16) 的曲率值和彎矩引起的曲率相加，得到考慮剪切影響的彈性線微分方程是：

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{M}{EJ} - \frac{1}{GF\alpha} \frac{dQ}{dx} \quad (1.17)$$

或

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{1}{FJ} \left(M - \beta^2 \frac{dQ}{dx} \right), \quad (1.18)$$

其中

$$\beta^2 = \frac{EJ}{GF\alpha} = \frac{ES}{Gb} = 2(1+\mu) \frac{S}{b} = \frac{2(1+\mu)}{\alpha} i^2; \quad (1.19)$$

此地的 μ 是波桑係數， i 是斷面的慣性半徑。

但因為

$$\frac{dQ}{dx} = -q,$$

所以有：

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{1}{EJ} (M + \beta^2 q). \quad (1.20)$$

括弧中考慮剪切對彎曲的影響的附加項 $\beta^2 q$ ，和第一項 M 相比較，