高等数学

上册

西安交通大学《高等数学》编写组编

人民教育出版社

高 等 数 学

上 册

西安交通大学《高等数学》编写组编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

1975 年 8 月第 1 版　　1975 年11月第 1 次印刷

书号 13012·017　　定价 0.72 元

编 者 的 话

遵照毛主席关于“**教育要革命**”“**教材要彻底改革**”的指示，无产阶级文化大革命以来，我校数学教师深入三大革命实际，与工人师傅、专业教师一起，于 1972 年编写了供我校各类专业使用的四种高等数学教材。通过批林批孔运动，我们进一步学习了马克思的《数学手稿》以及毛主席有关教育革命和教材改革的一系列论述，开展了学科领域的大批判，吸取了兄弟院校的经验，在原来四种教材和教学实践的基础上，于 1974 年再次编写了供我校各专业使用的《高等数学》教材。本书是在认真学习毛主席关于理论问题的重要指示以后，对 1974 年编的《高等数学》教材又作了进一步的改编而成。在编写过程中，我们从以下几个方面作了一些努力。

一、贯彻辩证唯物主义思想。我们努力运用对立统一规律和马克思《数学手稿》的基本观点，以微分与积分这一对基本矛盾的发生、发展和转化为线索，来讲解基本内容；注意揭示微分、积分等基本概念的本质及其内在联系；突出微积分的基本分析方法；把“**直线和曲线在微分中终于等同起来了**”这一“曲”与“直”之间的辩证关系作为微积分方法的主要基础，强调微分是“曲”与“直”、“不匀”与“匀”、“变”与“不变”等矛盾双方相互转化的条件，是量变到质变的关节点。

二、理论联系实际。力求体现微积分的基本方法是客观规律的反映，是劳动人民长期生产斗争经验的总结和提高。注意阐明基本概念和现实模型之间的关系。努力做到定义应当是分析的结果，不是分析的出发点。遵照毛主席关于“**一个正确的认识，往往需要经过由物质到精神，由精神到物质，即由实践到认识，由认识**

到实践这样多次的反复，才能够完成”的教导，本书在分析、解决实际问题时，注意加深对微积分基本概念的理解，总结微积分方法的基本规律，着重培养学员运用微积分知识分析、解决有关实际问题的能力。为了便于各类专业使用，在讲解概念和主要方法时，一般选用比较简单、通用的实例，较难的实例与主要内容之间保持相对独立，以便使用时根据不同需要进行删减。章后的综合实践题，不属基本要求，可供课外参考。

三、删繁就简，突出重点。针对工科特点，选材力求少而精。对微积分的基本理论，着重于使学员理解、掌握和灵活运用。在积分运算方面，考虑到工程人员一般是使用积分表，因此，积分法的讲解和训练主要围绕查表进行。下册中的微积分应用一章，主要结合一些数学内容的讲解，提高学员综合应用微积分知识分析、解决实际问题的能力。鉴于计算机的使用日益广泛，本书增添了算法语言初步一章。

本书上册共三章，是微积分的基本内容。下册的章节之间有一定的独立性，各类专业可根据不同要求不学或选学，也可将其中一部分移至高年级与有关典型任务或课程配合学习。书中小字部分和附录也是供不同要求的读者选用的。上册最后的微积分小结，是为了帮助读者在学完微积分的基本部分后，能更加系统、深入地掌握所学内容。为便于自学，本书叙述比较详细，配有思考题和练习，书后附有练习答案。

由于我们马列主义、毛泽东思想水平不高，实践经验很少，特别是对毛主席的教育思想和马克思的《数学手稿》的学习还很不够，领会不深，离开“教材要彻底改革”的要求还有很大差距，书中也还有不少缺点错误，恳切地希望广大读者提出批评和改进意见。

西安交通大学《高等数学》编写组

一九七五年七月

目　　录

第一章　微积分研究的对象和方法

内容提要

“数学中的转折点是笛卡儿的变数。有了变数，运动进入了数学，有了变数，辩证法进入了数学，有了变数，微分和积分也就立刻成为必要的了，而它们也就立刻产生”。[①]初等数学研究的是常量和相对静止状态。高等数学，其中主要的部分是微积分，研究的是变量和运动。本章是在初等数学的基础上，首先进一步分析变量和函数的概念；进而说明由于生产实践中研究非均匀变化一类问题的需要，产生了微积分方法；然后通过几个简单实际问题的分析，对微积分的基本分析方法和极限概念，作一大概介绍。

主要内容为：

（一）结合实例说明函数概念的两要素和三内容，介绍建立函数式的初等方法及其简单应用；

（二）通过实例阐明均匀变化和非均匀变化两类问题，介绍微积分的基本分析方法；

（三）从微积分基本分析方法中引出极限概念，结合实例说明极限概念反映了“量变到质变”的矛盾转化过程。

学习微积分，必须以唯物辩证法为指导。在本章中，要着重从“运动变化”、“相互联系”的观点去领会函数概念的实质，注意培养从实际问题建立函数式的能力。对微积分的基本分析方法，要着

---

① 恩格斯：《自然辩证法》，人民出版社 1971 年版第 236 页。

重领会“分析问题”、“解决问题”的思想方法。至于导数、微分、积分的准确定义、计算方法等详细内容，将在以后各章中逐步讨论。

第一节　变量与函数

各种运动形式，如机械的、电的、热的……虽然性质千差万别，但是都表现为一定的量的变化和质的变化。而“**质的变化……只有通过物质或运动（所谓能）的量的增加或减少才能发生。**”①“**没有物质或运动的增加或减少，即没有有关的物体的量的变化，是不可能改变这个物体的质的。**”②量与质是相互转化的。通过事物的量的变化，来帮助认识事物的质的变化，不仅是可能的，而且是必要的。为了研究事物运动过程中的数量变化规律，首先必须区别变量和常量。

一、变量和常量

当我们在观察、研究某些物质运动或生产技术过程时，常会遇到两种不同的量。一种量在过程的进行中不断变化，可取不同的数值，这种量叫做变量；另一种量在过程的进行中相对保持不变，只取一个固定的数值，这种量叫做常量。例如，在用锅炉烧水的过程中，燃料在不断消耗，水也在不断变为蒸汽，如不补充，水位将越来越低，而锅炉的容积却相对保持不变。所以，在这一过程中，燃料重量和水位高度都是变量，锅炉容积是常量。又如，重物在地面附近下落，在达到地面前，它的速度越落越快，随着下落时间的逐渐增长，下落距离也越来越大。所以，在重物下落的过程中，速度、时

---

①② 《自然辩证法》第 47 页。

间、距离都是变量，而加速度和重物本身受到的力(重力)却可看作不变，即为常量。

应当注意，一个量是常量还是变量，并不是绝对的，应根据问题的不同要求，具体地进行分析。例如一个人在从小孩长成大人的整个过程中，他的身高是一变量，但在某一天的身高变化很微小，就可以把它看作常量。又如气温变化会引起机器上的轴热胀冷缩，可是，当气温变化引起的轴长变化较微小时，通常把轴长看作常量；而在较精密的机器上，即使轴的长度变化较微小，也会影响机器的精度，这时就应将轴长看成变量，以估计它对精度的影响。一般说来，如果一个变量在所讨论的过程中变化很小，而且对于实际需要来说可以看作不变，就把这个变量看作常量。

思考题

1. 什么叫变量？什么叫常量？变量与常量之间有何辩证关系？你能举出一个例子来说明吗？

2. 在把圆钢锻打成圆盘的过程中，圆钢的体积 V、直径 D、长度 l 这三个量，哪是常量？哪是变量？

二、函数概念

“一切客观事物本来是互相联系的和具有内部规律的”。[①] 各种变量也不是孤立变化，而是互相联系的。因此，我们不仅要研究事物的数量变化，而且更重要的是要研究各个变量之间的相互依赖关系及其内部规律。数学中的函数关系，就是变量之间一种最基本的、最重要的依赖关系。

1. 实践中的函数关系

初等数学中已经遇到过实际问题中的函数关系。为了对函数概念有更深刻的认识，我们在初等数学的基础上，再通过一些例子

① 《矛盾论》，《毛泽东选集》人民出版社 1969 年横排本第 288 页。

来进一步阐明它的要点。

例 1 落锤的自由下落运动。

铸工车间有一种用来打碎铁块的落锤，其工作原理是让锤头由一定高度自由下落，利用锤头下落的动量来打碎铁块（图1-1）。在锤头下落的过程中，下落的距离s(米)和下落的时间t(秒)都是不断变化的，即s和t都是变量。而重力加速度可认为不变，是常量。我们还看到，在锤头下落的过程中，随着时间t的不同，锤头下落的距离s也就不同，所以s和t这两个变量之间有着一定的依赖关系。在物理学中，经过多次的实验知道，这种自由落体运动下落的距离s和时间t的依赖关系由以下公式表示出来：

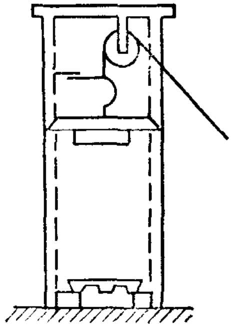

图 1-1

$$s=\frac{1}{2}gt^2, \tag{1-1}$$

其中$g=9.8$ 米/秒^{2}是重力加速度，时间t是从锤头开始下落时计算的。

在初等数学中我们已经知道，s和t的依赖关系(1-1)叫做函数关系，或者说s是t的函数。t叫做自变量，s叫做因变量。

如果锤头是从4.9米的高度开始下落，根据s与t的函数关系(1-1)，把$s=4.9$代入，就可算出锤头落到铁块上所需的时间t：

$$4.9=\frac{1}{2}gt^2=\frac{1}{2}\times 9.8t^2=4.9t^2,$$

所以
$$t=1(\text{秒})。$$

这就是说，经过一秒钟锤头就落到了铁块上，落锤运动就告结束。由此可见，在研究这个落锤自由下落运动中s和t的函数关

系(1-1)时，时间 t 是有一定变化范围的，即 t 只能在 0 秒到 1 秒之间变化。当时间 t 在 0 秒到 1 秒这个范围内每取得一个确定的值时，锤头下落的相应距离 s 都可以从(1-1)式中算出来。

例如当 $t=0.2$ 秒时，锤头下落的距离

$$s=\frac{1}{2}g\times(0.2)^2=\frac{1}{2}\times9.8\times0.04=0.196(\text{米});$$

当 $t=0.4$ 秒时，锤头下落的距离

$$s=\frac{1}{2}g\times(0.4)^2=\frac{1}{2}\times9.8\times0.16=0.784(\text{米});$$

当 $t=0.6$ 秒时，锤头下落的距离

$$s=\frac{1}{2}g\times(0.6)^2=\frac{1}{2}\times9.8\times0.36=1.764(\text{米})。$$

s 随 t 的变化可列表如下：

t (秒)	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
s (米)	0	0.049	0.196	0.441	0.784	1.225	1.764	2.401	3.136	3.969	4.9

从表中看出，在相同的一段时间间隔 0.1 秒内，锤头下落的距离各不相同。比如，在 0.1 秒到 0.2 秒间，锤头下落的距离为 $0.196-0.049=0.147$(米)；在 0.9 秒到 1 秒间，锤头下落的距离为 $4.9-3.969=0.931$(米)。开始下落的距离较小，以后逐渐变大，反映了锤头下落运动越落越快这一规律。

例 2　电容器充电过程。

我们知道，电容器是用来储藏电荷的。在电容器两极之间加上一定的电压，就可以把电荷储藏在电容器上，叫做充电。图 1-2 是充电的线路图。图中，E 是电

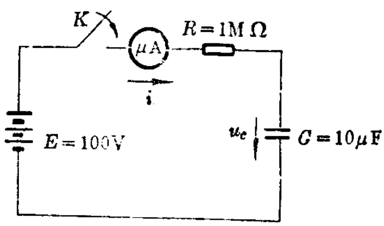

图 1-2

源的电动势，R 是电阻，C 是电容，它们的数值与单位如图所示。μA 是一个微安表，用以读出所通过的电流。当开关 K 闭合后，电容器开始充电，在充电过程中，电流 i 随时间 t 而变化。根据实验，i 和 t 的依赖关系（也就是函数关系）如下表所示：

t（秒）	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
i（微安）	100	60.7	36.8	22.3	13.5	8.2	5.0	3.0	1.8	1.1	0.7

这里 i 和 t 的函数关系是由表格形式给出的。当开关 K 闭合到 50 秒时，可以认为充电完毕。所以研究这个充电过程中 i 和 t 的函数关系时，时间 t 的变化范围是从 0 秒到 50 秒。在这个范围内，可从上表读出对应于各个时刻 t 的电流 i 值。这里 t 是自变量，i 是因变量。

在坐标纸上以 t 为横轴，i 为纵轴，根据表中的对应数值描出各点，连成曲线，就可用这曲线表示 i 与 t 之间的函数关系（图 1-3）。从图上可清楚地看到，开始充电时，电流下降很快，随着时间的推移，逐渐消失为零。在图 1-3 中还可大致读出表中没有列出的电流 i 的值。例如：$t=17$ 秒时，$i\approx18$（微安）。

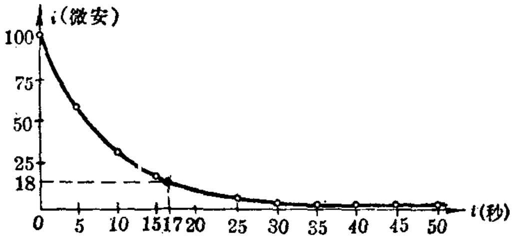

图 1-3

例 3 气温随时间的变化规律。

某气象站用自动记录仪记下一昼夜气温的变化规律（即函数关系）如图 1-4 所示，它形象地表示出温度 T 随时间 t 的变化规律。

这里，T 和 t 的函数关系是由图形给出的。由于这是一昼夜

间气温 T 随时间 t 的变化规律，所以时间 t 的变化范围是从 0 点到 24 点。在这个范围内，当自变量 t 取某值 t_0 时，在横轴上取 t_0 点，过此点作平行于纵轴的直线交曲线于 P 点，量出 P 点的纵坐标 T_0，就得到对应于时刻 t_0 的气温 T_0。

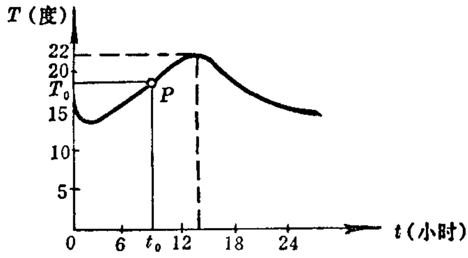

图 1-4

2. 函数定义

"人们总是首先认识了许多不同事物的特殊的本质，然后才有可能更进一步地进行概括工作，认识诸种事物的共同的本质。"①上面三个实例是从不同方面提出来的。各例中的变量所表示的实际意义不同，变量间依赖关系的表示方法也不同，但是我们从中可以看出一些共同的特征。首先，在每个例子中都有两个相互依赖的变量，它们之间存在一个确定的对应法则（例 1 的对应法则是用公式(1-1)给出的，例 2 的对应法则是用表格给出的，例 3 的对应法则是用图形给出的）。尽管对应法则的表达方式各有不同，但是它指明了这两个变量相互依赖的规律，所以对应法则是函数关系的一个要素。其次，我们还可以看到，自变量的变化范围是有一定限制的。这个范围也就是对应法则所适用的范围，当自变量在这个范围内变到任意一个值时，因变量都能根据对应法则有确定的值和它对应。自变量的变化范围确定以后，因变量的变化范围也就随之而确定。譬如在例 1 中，自变量 t 的变化范围只能是从 0 秒到 1 秒，对应法则(1-1)只适用于这个范围。当自变量 t 在 0 秒到 1 秒变化时，因变量 s 的变化范围由法则(1-1)也就可以确定出

① 《矛盾论》，《毛泽东选集》第 284—285 页。

来是 0 米到 4.9 米。因此，自变量的变化范围是函数关系的又一个要素。

通过以上分析，我们可以概括出函数的一般定义：

函数定义 在某一变化过程中有两个互相联系着的变量 x 和 y。如果对于 x 在其变化范围内取得的每一个值，y 按照确定的法则有确定的值和它对应，则称 y 是 x 的函数。其中 x 叫做自变量，y 叫做因变量。

函数的这个定义包含着三个内容：一是自变量的变化范围，叫做函数的定义区间；二是因变量依赖自变量的变化规律(确定的对应法则)；三是对应于自变量所取的每一数值，因变量所取的值，叫做函数值。下面我们再分别地加以说明。

(1) 函数的定义区间。

所谓函数的定义区间，就是允许自变量取值的范围。如在例 1 中，根据实际情况，落锤下落运动的时间 t 是从 0 秒到 1 秒，所以允许自变量 t 的取值范围是从 0 到 1 之间的一切实数，包括 0 与 1 这两个数在内，可用不等式表示为

$$0\leqslant t\leqslant 1,\ \text{或记作}[0,1]。$$

这就是函数 (1-1) 的定义区间。它在数轴上表示从 0 到 1 的一段线段，包括两个端点在内。

所以，在生产实践中，函数的定义区间是根据函数的实际意义来确定的。

但是，如果我们讨论的函数仅仅是写出了它的数学算式，而不考虑它的实际意义，那末这个函数的定义区间就是指使数学算式有意义的自变量取值范围，一般不需明确标出。例如，函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的定义区间是由除去零以外的一切实数所组成的。因为当 $x=0$ 时，$\dfrac{1}{x}$ 无意义，因而它的定义区间可简单地用 $x\neq 0$ 表示。又如函

数 $y=\sqrt{x}$ 的定义区间是由一切正数和零所组成，因为当 x 为负数时，$\sqrt{x}$ 为虚数，我们现在不讨论。因而它的定义区间可用不等式表示为 $x\geqslant 0$ 或 $0\leqslant x<+\infty$；也可记作$[0, +\infty)$。($+\infty$ 读作正无限大。)

一般说来，如果变量 x 的变化范围是 $a\leqslant x\leqslant b$，那末在数轴上对应于 x 的点，就在以 a、b 为端点的线段上变动。我们把不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 表示的包括两端点在内的线段叫做闭区间，记作 $[a, b]$，而把不等式 $a<x<b$ 表示的不包括两端点在内的线段叫做开区间，记作(a, b)，如图 1-5。

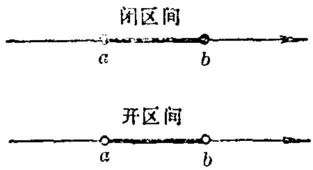

图 1-5

(2) 对应法则。

对应法则是因变量 y 和自变量 x 依赖关系(即函数关系)的具体表现，它是函数概念中最本质的要素。在上面的三个例子中，我们看到，对应法则的表达形式是各种各样的。一种如例 1 那样，是用数学算式(1-1)来表示的，叫做函数的公式表示法；一种如例 2 那样，是用表格来表示的，叫做函数的列表表示法；一种如例 3 那样，是用图形(曲线)来表示的，叫做函数的图象表示法。要表示一个具体的函数关系，就必须象前面的几个例题一样，把对应法则用具体的形式表达出来。但是当我们泛指一般的函数关系时，就必须舍弃对应法则的具体表达形式，而只顾及它们的共性——表达因变量 y 和自变量 x 的依赖关系。这时，数学中常用记号

$$y=f(x)$$

来表示 y 是 x 的函数。应该注意，记号中的 $f(\quad)$ 表示对应法则的意思，切不可误解为 f 乘 x。

当然，我们也可以用函数的一般记号 $y=f(x)$ 来表示一个具体的函数。象例 1 这个函数，也可以用