

工商管理硕士 (MBA) 系列教材

管理运筹学 习题精解

韩大卫 / 主编

- 信息前沿
- 应用导向
- 结合国情
- 博采众长
- 哈佛学不到!



-44



大连理工大学出版社

Dalian University of Technology Press

工商管理硕士(MBA)系列教材

管理运筹学习题精解

韩大卫 主编
王雷华 主审

大连理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

管理运筹学习题精解/韩大卫主编. —大连:大连理工大学出版社,2002.7

工商管理硕士(MBA)系列教材

ISBN 7-5611-2052-4

I.管… II.韩… III.运筹学-应用-管理学-解题 IV.C931.1-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 073049 号

大连理工大学出版社出版发行
大连市凌水河 邮政编码:116024
电话:0411-4708842 传真:0411-4701466
E-mail: dutp@ mail. dlptt. ln. cn
URL: http://www. dutp. com. cn
大连理工印刷有限公司印刷

开本:787毫米×960毫米 1/16 字数:231千字 印张:12.25
印数:1—6000册

2002年7月第1版

2002年7月第1次印刷

责任编辑:刘杰
封面设计:孙宝福

责任校对:强元
版式设计:娄华

定价:18.00元



前 言

《管理运筹学》一书自 1998 年 6 月出版以来,得到广大读者的厚爱,编者对此深感欣慰。许多读者纷纷来信表示,希望再编写一本配套的习题集。由于种种原因,直到今天才得以实现,编者对此曾深感愧疚。

现在,期盼的这部习题集终于面世了,希望能对读者有所裨益。

由于教学计划学时有限,课堂教学中不能列举大量例题,因而不可能将教材中的习题全部留作学生的课外作业。本书内容较广,题型较多,难易相济,注重应用,这有助于读者拓宽视野,加深理解教材中的基本概念、基本模型和基本方法,有助于提高计算水平和应用能力。希望读者在使用本书时,首先独立完成习题的求解,再对照、参考本书的解法,才会收到实效。

参加本书编写工作的有:朱方伟(第一至第四章)、李新英(第五、六、七章)、郭彤彦(第八、九、十章)、王大刚(第十一、十二章)、高治强(第十三章)等。程海琼也参加了部分习题的编写与校对工作。全书由韩大卫主编,王雪华主审,并都参与部分习题的编写与修订工作。

由于编者水平有限,时间较短,书中难免有不当之处,敬祈读者批评指正。

编 者

2001 年 10 月于大连



目 录

第一章	线性规划基本性质.....	1
第二章	单纯形法	9
第三章	对偶原理	24
第四章	灵敏度分析	44
第五章	运输模型	66
第六章	整数规划	78
第七章	动态规划	94
第八章	网络分析	108
第九章	决策论	125
第十章	矩阵对策	143
第十一章	排队论	154
第十二章	存贮论	165
第十三章	目标规划.....	173

第一章 线性规划基本性质

1.1 试建立下列问题的数学模型：

(1) 设备配购问题

某农场要新买一批拖拉机以完成每年三季的工作量：春种 330 公顷，夏管 130 公顷，秋收 470 公顷。可供选择的拖拉机型号、单台投资额及工作能力如下表所示。

拖拉机 型号	单台投资 (元)	单台工作能力(公顷)		
		春种	夏管	秋收
东方红	5000	30	17	41
丰收	4500	29	14	43
跃进	4400	32	16	42
胜利	5200	31	18	44

问配购哪几种拖拉机各几台，才能完成上述每年工作量且使总投资最少？

(2) 物资调运问题

甲、乙两煤矿供给 A, B, C 三个城市的用煤。各矿产量和各市需求量如下表所示：

煤矿	日产量(吨)	城市	需求量(吨)
甲	200	A	100
		B	150
乙	250	C	200

各矿与各市之间的运输价格如下表示：

煤矿 \ 城市	运价(元/吨)		
	A	B	C
甲	90	70	100
乙	80	65	80

问应如何调运，才能既满足城市用煤需求，又使运输的总费用为最少？

(3) 食谱问题

某疗养院营养师要为某类病人拟订本周菜单。可供选择的蔬菜及其费用和所

含营养成分的数量,以及这类病人每周所需各种养分的最低数量如下表所示:

养 分 蔬 菜	每份所含养分数量					每份的 费用(元)
	铁 (毫克)	磷 (毫克)	维生素 A (单位)	维生素 C (毫克)	烟酸 (毫克)	
青 豆	0.45	10	415	8	0.3	0.15
胡萝卜	0.45	28	9065	3	0.35	0.15
花 菜	1.05	50	2550	53	0.6	0.24
卷心菜	0.4	25	75	27	0.15	0.06
甜 菜	0.5	22	15	5	0.25	0.18
土 豆	0.5	75	235	8	0.8	0.10
每周养分 最低需求量	6.0	325	17500	245	5.0	

另外为了口味的需求,规定一周内所用卷心菜不多于 2 份,其他蔬菜不多于 4 份。若病人每周需 14 份蔬菜,问选用每种蔬菜各多少份?

(4) 下料问题

某钢筋车间要用一批长度为 10 米的钢筋下料,制作长度为 3 米的钢筋 90 根和长度为 4 米的钢筋 60 根。问怎样下料最省?

解 (1) 设购置东方红、丰收、跃进、胜利型号拖拉机分别为 x_1, x_2, x_3, x_4 台,相应的数学模型为

$$\begin{aligned} \min z &= 5000x_1 + 4500x_2 + 4400x_3 + 5200x_4 \\ \text{s.t.} &\begin{cases} 30x_1 + 29x_2 + 32x_3 + 31x_4 \geq 330 \\ 17x_1 + 14x_2 + 16x_3 + 18x_4 \geq 130 \\ 41x_1 + 43x_2 + 42x_3 + 44x_4 \geq 470 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \quad (\text{且为整数}) \end{cases} \end{aligned}$$

(2) 设甲矿分别供应给 A, B, C 城市 x_{11}, x_{12}, x_{13} 吨煤,乙矿分别供应给 A, B, C 城市 x_{21}, x_{22}, x_{23} 吨煤,相应的数学模型为

$$\begin{aligned} \min z &= 90x_{11} + 70x_{12} + 100x_{13} + 80x_{21} + 65x_{22} + 80x_{23} \\ \text{s.t.} &\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} & & & & & = 200 \\ & & & x_{21} + x_{22} + x_{23} & & = 250 \\ x_{11} & & & + x_{21} & & = 100 \\ & x_{12} & & & + x_{22} & = 150 \\ & & x_{13} & & & + x_{23} = 200 \\ x_{ij} & \geq 0 \quad (i = 1, 2; \quad j = 1, 2, 3) \end{cases} \end{aligned}$$

(3) 设每周选择的蔬菜份数分别为青豆 x_1 份、胡萝卜 x_2 份、花菜 x_3 份、卷心菜

x_4 份、甜菜 x_5 份、土豆 x_6 份, 相应的数学模型为

$$\min w = 0.15x_1 + 0.15x_2 + 0.24x_3 + 0.06x_4 + 0.18x_5 + 0.10x_6$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 14 \\ 0.45x_1 + 0.45x_2 + 1.05x_3 + 0.4x_4 + 0.5x_5 + 0.5x_6 \geq 6.0 \\ 10x_1 + 28x_2 + 50x_3 + 25x_4 + 22x_5 + 75x_6 \geq 325 \\ 415x_1 + 9065x_2 + 2550x_3 + 75x_4 + 15x_5 + 235x_6 \geq 17500 \\ 8x_1 + 3x_2 + 53x_3 + 27x_4 + 5x_5 + 8x_6 \geq 245 \\ 0.3x_1 + 0.35x_2 + 0.6x_3 + 0.15x_4 + 0.25x_5 + 0.8x_6 \geq 5.0 \\ 0 \leq x_4 \leq 2 \\ 0 \leq x_1, x_2, x_3, x_5, x_6 \leq 4 \end{cases}$$

(4)

截法 j	所截各种钢筋的根数(根)		剩余料头(m)
	3米钢筋	4米钢筋	
1	3	0	1
2	2	1	0
3	0	2	2

设按第 j 种截法截 x_j 根钢筋, 相应的数学模型为

$$\min w = x_1 + x_2 + x_3$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 90 \\ x_2 + 2x_3 \geq 60 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \quad (\text{且为整数}) \end{cases}$$

1.2 用图解法求下列 LP 问题

(1) $\max z = 2x_1 + 2x_2$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 - x_2 \geq -1 \\ -0.5x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

(2) $\max z = x_1 + x_2$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 - x_2 \geq 0 \\ 3x_1 - x_2 \leq -3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

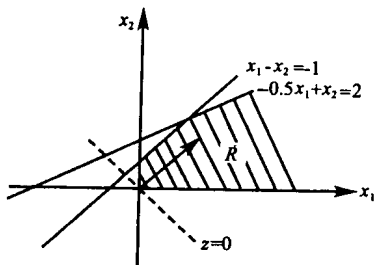
(3) $\min z = 2x_1 - 10x_2$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_1 - 5x_2 \geq -5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

(4) $\min z = -10x_1 - 11x_2$

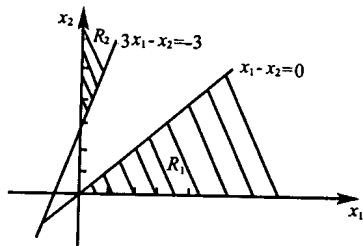
$$\text{s.t.} \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \leq 10 \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

解 (1)



解无界(无最优解)。

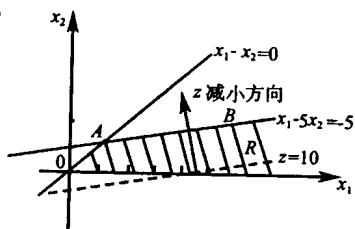
(2)



$$\therefore R = R_1 \cap R_2 = \phi$$

\therefore 无可行解

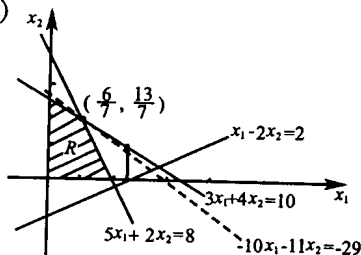
(3)



$\because z = 2x_1 - 10x_2$ 与 $x_1 - 5x_2 = -5$ 平行,

\therefore 有无穷多最优解(射线 AB), $z^* = -10$ $X^* = \left(\frac{6}{7}, \frac{13}{7}\right)^T$, $z^* = -29$

(4)



1.3 把下列 LP 问题化成标准形:

(1) $\min z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 \geq -5 \\ -6x_1 + 7x_2 - 9x_3 = 15 \\ 19x_1 + 7x_2 + 5x_3 \leq 13 \\ x_1 \geq 0, x_2 \leq 0 \end{cases}$$

(2) $\min z = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 \leq 7 \\ 4x_1 + x_2 + 6x_3 \geq 6 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = -4 \\ x_1 \geq 1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

解 (1) 令 $z' = -z$, $x_2 = -x_2'$, $x_3 = x_3' - x_3''$, 则有标准形

$$\begin{aligned} \max z' &= -2x_1 + 3x_2' - 5x_3' + 5x_3'' \\ \text{s.t.} \begin{cases} -x_1 - x_2' + x_3' - x_3'' + x_4 &= 5 \\ -6x_1 - 7x_2' - 9x_3' + 9x_3'' &= 15 \\ 19x_1 - 7x_2' + 5x_3' - 5x_3'' &+ x_5 = 13 \\ x_1, x_2', x_3', x_3'', x_4, x_5 &\geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(2) 令 $z' = -z$, $x_1 = x_1' + 1$, $x_3 = x_3' - x''$, $x_4 = x_4' - x''$, 则有标准形

$$\begin{aligned} \max z' &= -3x_1' - 4x_2 - 3x_3' + 2x'' - x_4' - 3 \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} 3x_1' + x_2 + x_3' - x'' + x_5 &= 4 \\ 4x_1' + x_2 + 6x_3' - 6x'' - x_6 &= 2 \\ x_1' + x_2 - x_3' + 2x'' - x_4' &= 3 \\ x_1', x_2, x_3', x'', x_4', x_5, x_6 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

1.4 已知 LP 问题如下:

$$\begin{aligned} \min w &= x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 = 7 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

判断下述各点: $X_1 = (8, 2, 7, -4)^T$, $X_2 = (1, 0, 2, 1)^T$, $X_3 = (2, 0, 5, 0)^T$,

$X_4 = (0, 0, -1, 2)^T$, $X_5 = (3, 1, 0, 0)^T$, $X_6 = \left(2, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)^T$, 是不是该 LP 问题的可行解、基本解、基本可行解? 试从中找出一个较优解。

解 可行解: X_2, X_3, X_5, X_6 ; 基本解: X_3, X_4, X_5 ; 基本可行解: X_3, X_5

因为 $w_2 = -1, w_3 = -13, w_5 = 5, w_6 = 2$, 所以较优解为 $X_3 = (2, 0, 5, 0)^T$

1.5 设某线性规划问题的可行域如下:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 25 \\ x_1 + 3x_2 &- x_4 &= 30 \\ 4x_1 + 7x_2 - x_3 - 2x_4 - x_5 &= 85 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

试判断下述各点: $X_1 = (5, 15, 0, 20, 0)^T$, $X_2 = (9, 7, 0, 0, 8)^T$, $X_3 = (15, 5, 10, 0, 0)^T$ 是否为该可行域的极点, 并说明理由。

解 X_1, X_2, X_3 均不是该可行域的极点。因为 X_1, X_3 不是基本解, X_2 不是可行解(只有基本可行解才是该可行域的极点)。

1.6 某农户年初承包了 40 亩土地, 并备有生产专用资金 2 500 元。该户劳动力情况为: 春夏季 4 000 工时, 秋冬季 3 500 工时。若有闲余工时, 则将分别为别的农户帮工, 其收入为: 春夏季 0.50 元/工时, 秋冬季 0.40 元/工时。该户承包的地块只适宜种植大豆、玉米、小麦, 为此已备齐各种生产资料, 因此不必动用现金。另外, 该农户还饲养奶牛和鸡。每年每头奶牛需投资 400 元, 每只鸡需投资 3 元。每头奶牛需用地 1.5 亩种植饲草, 并占用劳动力: 春夏季 50 工时及秋冬季 100 工时, 每年净收入 400 元。每只鸡占用劳动力: 春夏季 0.3 工时和秋冬季 0.6 工时, 每年净收入 10 元。该农户现有鸡舍最多能容纳 300 只鸡, 牛棚最多能容纳 8 头奶牛。三种农作物一年需要

的劳动力及收入情况如下表所示。问该农户应如何拟订经营方案才能使当年净收入最大?试建立该问题的数学模型。

	作物	大豆	玉米	小麦
季节				
春夏季需工时/亩		20	35	10
秋冬季需工时/亩		50	75	40
净收入(元/亩)		50	80	40

解 设种大豆 x_1 亩、玉米 x_2 亩、小麦 x_3 亩、春夏季帮工 x_4 工时、秋冬季帮工 x_5 工时、养奶牛 x_6 头、养鸡 x_7 只,相应的数学模型为:

$$\begin{aligned} \max z = & 50x_1 + 80x_2 + 40x_3 + 0.5x_4 + 0.4x_5 + 400x_6 + 10x_7 \\ \text{s.t.} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + 1.5x_6 \leq 40 \\ 20x_1 + 35x_2 + 10x_3 + x_4 + 50x_6 + 0.3x_7 \leq 4000 \\ 50x_1 + 75x_2 + 40x_3 + x_5 + 100x_6 + 0.6x_7 \leq 3500 \\ 400x_6 + 3x_7 \leq 2500 \\ x_6 \leq 8 \\ x_7 \leq 300 \\ x_1, x_2, \dots, x_7 \geq 0, \text{且 } x_6, x_7 \text{ 为整数} \end{array} \right. \end{aligned}$$

1.7 某厂生产甲、乙两种产品,每种产品都要在 A, B 两道工序上加工。其中 B 工序可由 B_1 或 B_2 设备完成,但乙产品不能用 B_1 加工。生产这两种产品都需要 C, D, E 三种原材料,有关数据如下所示。又据市场预测,甲产品每天销售不超过 30 件。问应如何安排生产才能获利最大?试建立数学模型。

		产品单耗		日供应量		单位成本	
		甲	乙	数量	单位	数量	单位
工 序	A	2	1	80	工时	6	元/工时
	B_1	3	-	60	工时	2	元/工时
	B_2	1	4	70	工时	5	元/工时
原 材 料	C	3	12	300	米	2	元/米
	D	5	3	100	件	1	元/件
	E	4	1.5	150	千克	4	元/千克
其他费用(元/件)		26	29				
单价(元/件)		80	100				

解 设甲、乙两种产品分别产 x_1 件、 x_2 件,其中,甲产品在 B_1 设备上加工 x_3 工时、在 B_2 设备上加工 x_4 工时,则有

$$\begin{aligned} \max z &= 15x_1 + 12x_2 - 2x_3 - 5x_4 \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} 2x_1 + x_2 & \leq 80 \\ & x_3 & \leq 60 \\ & 4x_2 + x_4 & \leq 70 \\ 3x_1 + 12x_2 & \leq 300 \\ 5x_1 + 3x_2 & \leq 100 \\ 4x_1 + 1.5x_2 & \leq 150 \\ x_1 & \leq 30 \\ x_1 - \frac{x_3}{3} - x_4 & = 0 \\ x_j \geq 0, & j = 1, 2, 3, 4 \end{cases} \end{aligned}$$

1.8 制造某机床需要 A, B, C 三种轴,其规格、需要量如下表所示。各种轴都用长 7.4 米的圆钢来截毛坯。如果制造 100 台机床,问最少要用多少根圆钢?试建立数学模型。

轴件	规格:长度(米)	每台机床所需轴件数量
A	2.9	1
B	2.1	1
C	1.5	1

解

截法(j)	所截各种轴件数量			剩余料头(m)
	A(2.9)	B(2.1)	C(1.5)	
1	2	0	1	0.1
2	1	2	0	0.3
3	1	0	3	0
4	1	1	1	0.9
5	0	3	0	1.1
6	0	2	2	0.2
7	0	1	3	0.8
8	0	0	4	1.4

设按第 j 种截法截 x_j 根圆钢,则相应的数学模型为

$$\min w = \sum_{j=1}^8 x_j$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & \geq 100 \\ 2x_2 + x_4 + 3x_5 + 2x_6 + x_7 & \geq 100 \\ x_1 + 3x_3 + x_4 + 2x_6 + 3x_7 + 4x_8 & \geq 100 \\ x_j \geq 0 \text{ 且为整数 } (j = 1, 2, \dots, 8) \end{cases}$$

1.9 某木材公司经营的木材贮存在仓库中,最大贮存量为 20 万米³。由于木材价格随季节变化,该公司于每季初购进木材,一部分当季出售,一部分贮存以后出售。贮存费为 $a + bu$,其中 $a = 7$ 元/米³, $b = 10$ 元/米³/季, u 为贮存的季度数。由于木材久贮易损,因此当年所有库存木材应于秋末售完。各季木材单价及销量如下表所示。为获全年最大利润,该公司各季应分别购销多少木材?试建立数学模型。

季	购进价(元/米 ³)	售出价(元/米 ³)	最大销售量(万米 ³)
冬	310	321	10
春	325	333	14
夏	348	352	20
秋	340	344	16

解 设 $y_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 分别为冬、春、夏、秋四季采购的木材数(m³), $x_{ij} (i, j = 1, 2, 3, 4)$ 代表第 i 季节采购用于第 j 季节销售的木材数(m³)。相应的数学模型为

$$\begin{aligned} \max z = & (321x_{11} + 316x_{12} + 325x_{13} + 307x_{14} - 310y_1) \\ & + (333x_{22} + 335x_{23} + 317x_{24} - 325y_2) + (352x_{33} + 327x_{34} - 348y_3) \\ & + 344x_{44} - 340y_4 \end{aligned}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} y_1 & \leq 200\,000 \\ y_1 - x_{11} - x_{12} - x_{13} - x_{14} & = 0 \\ x_{11} & \leq 100\,000 \\ x_{12} + x_{13} + x_{14} + y_2 & \leq 200\,000 \\ y_2 - x_{22} - x_{23} - x_{24} & = 0 \\ x_{12} + x_{22} & \leq 140\,000 \\ x_{13} + x_{14} + x_{23} + x_{24} + y_3 & \leq 200\,000 \\ y_3 - x_{33} - x_{34} & = 0 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} & \leq 200\,000 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + y_4 & \leq 200\,000 \\ y_4 - x_{44} & = 0 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} & \leq 160\,000 \\ x_{ij} \geq 0, \quad y_i \geq 0 \quad (i, j = 1, 2, 3, 4) \end{cases}$$

第二章 单纯形法

2.1 分别用图解法和单纯形法求解下述 LP 问题,并指出单纯形法迭代中每一基本可行解跟图解法可行域中哪一极点相互对应。

$$(1) \max z = 10x_1 + 5x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \leq 9 \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$(2) \max z = 2x_1 + x_2$$

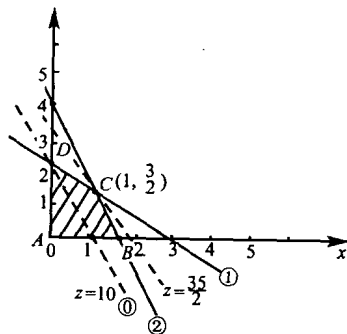
$$\text{s.t.} \begin{cases} 5x_2 \leq 15 \\ 6x_1 + 2x_2 \leq 24 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

解 (1) 图解法:

$$\max z = 10x_1 + 5x_2 \quad \textcircled{0}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \leq 9 & \textcircled{1} \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 8 & \textcircled{2} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$X^* = \left(1, \frac{3}{2}\right)^T, \quad z^* = \frac{35}{2}$$



单纯形法:

化标准形如下:

$$\max z = 10x_1 + 5x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 9 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_4 = 8 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

建立初始单纯形表,迭代求解。

序号	c_j							比值
		基	解	x_1	x_2	x_3	x_4	
(a)	0	x_3	9	3	4	1	0	3
	0	x_4	8	⑤	2	0	1	$\frac{8}{5}(\min)$
	检验行		0	-10	-5	0	0	$A(0,0)$
(b)	0	x_3	$\frac{21}{5}$	0	$\left(\frac{14}{5}\right)$	1	$-\frac{3}{5}$	$\frac{3}{2}(\min)$
	10	x_1	$\frac{8}{5}$	1	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	4
	检验行		16	0	-1	0	2	$B\left(\frac{8}{5}, 0\right)$
(c)	5	x_2	$\frac{3}{2}$	0	1	$\frac{5}{14}$	$-\frac{3}{14}$	
	10	x_1	1	1	0	$-\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	
	检验行		$\frac{35}{2}$	0	0	$\frac{5}{14}$	$\frac{25}{14}$	$C\left(1, \frac{3}{2}\right)$

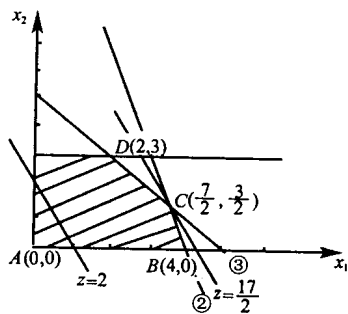
$$\therefore X^* = \left(1, \frac{3}{2}, 0, 0\right)^T, \quad z^* = \frac{35}{2}$$

(2) 图解法:

$$\max z = 2x_1 + x_2 \quad \text{①}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 5x_2 \leq 15 & \text{①} \\ 6x_1 + 2x_2 \leq 24 & \text{②} \\ x_1 + x_2 \leq 5 & \text{③} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$X^* = \left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)^T, \quad z^* = \frac{17}{2}$$



单纯形法:

化标准形如下:

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \begin{cases} 5x_2 + x_3 & = 15 \\ 6x_1 + 2x_2 + x_4 & = 24 \\ x_1 + x_2 + x_5 & = 5 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 5 \end{cases} \end{aligned}$$

建立初始单纯形表, 迭代求解。

序号	c_j		2	1	0	0	0	比值	
	基	解	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
(a)	0	x_3	15	0	5	1	0	0	-
	0	x_4	24	⑥	2	0	1	0	4(min)
	0	x_5	5	1	1	0	0	1	5
	检验行		0	-2	-1	0	0	0	0
(b)	0	x_3	15	0	5	1	0	0	3
	2	x_1	4	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{6}$	0	12
	0	x_5	1	0	$\left(\frac{2}{3}\right)$	0	$-\frac{1}{6}$	1	$\frac{3}{2}(\text{min})$
	检验行		8	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	0
(c)	0	x_3	$\frac{15}{2}$	0	0	1	$\frac{15}{4}$	$-\frac{15}{2}$	
	2	x_1	$\frac{7}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	
	1	x_2	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	
	检验行		$\frac{17}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0

$$\therefore X^* = \left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}, \frac{15}{2}, 0, 0\right)^T, z^* = \frac{17}{2}$$

2.2 用单纯形法求解下述 LP 问题:

(1) $\max z = 2x_1 + 2x_2$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 - x_2 \geq -1 \\ -0.5x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

(2) $\max z = x_1 + 2x_2$

$$\text{s.t.} \begin{cases} -x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 - x_2 \geq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

(3) $\max z = 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 + 8x_4 = 10 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

(4) $\min w = 2x_1 + 3x_2 + x_3$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 8 \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

(5) $\min w = 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

(6) $\max z = 10x_1 + 15x_2 + 12x_3$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 9 \\ -5x_1 + 6x_2 + 15x_3 \leq 15 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \geq 15 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$(7) \min w = 3x_1 - 4x_2 + x_3 - 2x_4$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 10 \\ x_3 + 2x_4 \leq 10 \\ x_1 - x_2 + x_4 \geq -5 \\ 5 \leq 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \leq 20 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

解 (1) 化标准形如下:

$$\max z = 2x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ -0.5x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

用单纯形法求解。

c_j			2	2	0	0
	基	解	x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_3	1	-1	1	1	0
0	x_4	2	-0.5	1	0	1
	检验行	0	-2	-2	0	0

$\because \sigma_1 = -2 < 0$, 所对应的系数列向量 $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix} < 0$, \therefore 该 LP 问题解无界。

(2) 化标准形如下:

$$\max z = x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_4 = 2 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

用两阶段法求解。

阶段 I $\max w = -x_5 - x_6$

$$\text{s.t.} \begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_4 + x_6 = 2 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, 6 \end{cases}$$