知识要点 · 典型范例 · 难题巧解 · 综合能力检测

华夏

数学黑马

数学黑马 · SHUXUEHEIMA · 数学黑马 · SHUXUEHEIMA

主　　编：中国科学教育论坛副总编辑　张谦亨

执行主编：孔庆河　秦小平　张秋菊

初二代数

huaxiashuxueheima

華夏出版社

前 言

本套丛书是根据最新教学大纲,最新出版的教材及考试说明,根据素质教育的需要,并结合初中生的实际,由多名经验丰富的教师编写而成。

本套丛书力求减轻学生的课业负担,注重能力培养,注重与现实生活的联系,为学生掌握知识,提高能力创造条件。

本套丛书有以下特点:

1. 依据教学大纲,但不拘泥于课本,根据教学的需要而又有利于知识的连续性、整体性,对某些节次进行了合并。

2. 例题典型,具有示范作用,每道例题都有详细的解答,更侧重于思路与方法。

3. 每一节、每一章备有测试题,以便读者及时检查与矫正。

本套丛书每一部分又设置了以下几个栏目:

知识要点 扼要介绍本节的主要内容,基本技能以及学习应注意的问题。

典型范例 精心组织习题,并且力求每道例题都具有代表性,并且前有分析,后面有说明,帮助读者掌握重点,突破难点,把握思路,熟悉考点。

难题巧解 关键在"巧"字上,使学生在注重通性通法的同时,还要多思、反思,找到更简捷的解法,开阔了解题视野,提高了能力。

综合能力检测 这一部分又分为基本训练题和发散思维训练题,这样设置为不同层次的学生的发展提供了发展的空间,也为教师提供了备课材料。

在本套丛书的编写过程中,得到了广大初中教师和一些读者的支持和帮助,在此表示衷心的感谢,**但由于时间有限,缺点错误在所难免,恳请广大读者和同仁提出宝贵意见。**

编 者

2003.6 于北师大

目录

第八章　因式分解

1 提公因式法

知识要点

1. 因式分解

把一个多项式化为几个整式的积的形式，叫做把这个多项式因式分解，也叫做把这个多项式分解因式.

2. 公因式

一个多项式每项都含有的公共的因式，叫做这个多项式各项的公因式.

3. 提公因式法

如果一个多项式的各项含有公因式，可以把公因式提到括号外面，将多项式写成两个因式乘积的形式，这种分解因式的方法叫做提公因式法.

典型范例

例 1　下列因式分解中，正确的是(　)

A. $-8m^3+12m^2-4m=-4m(2m^2+3m-1)$

B. $m^2+5m-mn-5n=(m-5)(m-n)$

C. $5m^2-6mn-8n^2=(m-2n)(5m+4n)$

D. $0.009m^2-\frac{16}{49}n^2=(0.03m+\frac{4}{7}n)(0.03m-\frac{4}{7}n)$

(1997 年安徽省)

分析：根据因式分解与整式乘法互为逆变形的关系，可通过计算各式的右边来检验因式分解的结果是否正确.

解：应选 C.

说明：因式分解与整式乘法是互逆变形，学习时要注意运用逆向思维处理有关问题.

例 2　把 $2a(b+c)-3(b+c)$ 分解因式.

（1998 年天津市）

分析：不难发现，式中两大项之间有公因式 $b+c$.

解：$2a(b+c)-3(b+c)$

$=(b+c)(2a-3)$.

说明：此例提取的公因式 $b+c$，其本身是一个二项式，以后还会有更复杂的公因式.

例 3　把 $4q(1-p)^3+2(p-1)^2$ 分解因式.

（1998 年四川省）

分析 1：因为 $(p-1)^2=(1-p)^2$，所以原式有公因式 $2(1-p)^2$，但要注意把 $2(1-p)^2$ 提出后，此项还有 1，不能漏掉.

解法一：$4q(1-p)^3+2(p-1)^2$

$=2(1-p)^2[2q(1-p)+1]$

$=2(1-p)^2(2q-2pq+1)$.

分析 2：因为 $(1-p)^3=[-(p-1)]^3=-(p-1)^3$，所以原式的公因式也可以看做 $2(p-1)^2$.

解法二：$4q(1-p)^3+2(p-1)^2$

$=-4q(p-1)^3+2(p-1)^2$

$=2(p-1)^2[-2q(p-1)+1]$　　　　（＊）

$=2(p-1)^2(2q-2pq+1)$.

说明：在因式分解到（＊）后，应把整式化成规范形式 $2q-2pq+1$.

例 4　把下列各式分解因式：

(1) $(a^2+ab-ac)+(ab+b^2-bc)+(c^2-ca-cb)$；

(2) $a(a-b)^5+ab(b-a)^4-a^3(b-a)^3$；

(3) $x^2(x+y)^{2n+2}+2xy(x+y)^{2n+1}-2xy^2(x+y)^{2n}$；

(4) $2n(m-2n)(3m-2n)-3m(2n-3m)(2n-m)$.

分析：(1) 观察每一括号均可产生一公因式，分别分解为：$a(a+b-c)$，及 $b(a+b-c)$ 及 $c(c-a-b)=-c(a+b-c)$，即三个括号分解后，可提出公因式 $a+b-c$，再进行分解；

(2) 因为 $(b-a)^4=(a-b)^4$，而 $-(b-a)^3=(a-b)^3$，所以 (2) 式的公因式为 $a(a-b)^3$；

(3) 式的公因式为 $x(x+y)^{2n}$；

(4) 式中观察：$(2n-3m)=-(3m-2n)$，$(2n-m)=-(m-2n)$，

因为 $(2n-3m)(2n-m)=[-(3m-2n)]\cdot[-(m-2n)]$

$=(3m-2n)(m-2n)$

所以 (4) 式的公因式为：$(m-2n)(3m-2n)$.

解：(1) $(a^2+ab-ac)+(ab+b^2-bc)+(c^2-ca-cb)$

$=a(a+b-c)+b(a+b-c)-c(a+b-c)$

$=(a+b-c)(a+b-c)$

$=(a+b-c)^2.$

(2) $a(a-b)^5+ab(b-a)^4-a^3(b-a)^3$

$=a(a-b)^5+ab(a-b)^4+a^3(a-b)^3$

$=a(a-b)^3[(a-b)^2+b(a-b)+a^2]$

$=a(a-b)^3[a^2+b^2-2ab+ba-b^2+a^2]$

$=a(a-b)^3(2a^2-ab)$

$=a(a-b)^3\cdot a(2a-b)$

$=a^2(2a-b)(a-b)^3.$

(3) $x^2(x+y)^{2n+2}+2xy(x+y)^{2n+1}-2xy^2(x+y)^{2n}$

$=x(x+y)^{2n}[x(x+y)^2+2y(x+y)-2y^2]$

$=x(x+y)^{2n}[x(x+y)^2+2xy+2y^2-2y^2]$

$=x(x+y)^{2n}[x(x+y)^2+2xy]$

$=x\cdot(x+y)^{2n}\cdot x[(x+y)^2+2y]$

$=x^2(x+y)^{2n}(x^2+y^2+2xy+2y).$

(4) $2n(m-2n)(3m-2n)-3m(2n-3m)(2n-m)$

$=2n(m-2n)(3m-2n)-3m[-(3m-2n)]\cdot[-(m-2n)]$

$=2n(m-2n)(3m-2n)-3m(3m-2n)(m-2n)$

$=(m-2n)(3m-2n)(2n-3m)$

$=(m-2n)(3m-2n)[-(3m-2n)]$

$=-(m-2n)(3m-2n)^2.$

难题巧解

例 5　解方程：$(55x+35)(53x+26)-(55x+35)(53x+27)=0$.

分析：因式分解，提取公因式 $55x+35$，再解方程.

解：$(55x+35)(53x+26)-(55x+35)(53x+27)=0$

$\because (55x+35)(53x+26-53x-27)=0$

$\therefore -(55x+35)=0$

$\therefore 11x+7=0$

$\therefore x=-\dfrac{7}{11}$.

说明:运用提公因式法分解因式可进行求解方程,简化运算过程,跟前例 5 一样,关键观察式子或方程结构,应用因式分解改变一下运算顺序,以达到化简的目的.

例 6　把 $(b-a)(x-y+z)-(a-b)(2x+y-z)-(a-b)(y-2x)$ 分解因式.

分析:如果取 $a-b$ 为公因式,原式中每个括号外将都带有负号,应尽量避免负号过多的情形出现,宜取 $b-a$ 为公因式.

解:
$$\begin{aligned}&(b-a)(x-y+z)-(a-b)(2x+y-z)-(a-b)(y-2x)\\&=(b-a)(x-y+z)+(b-a)(2x+y-z)+(b-a)(y-2x)\\&=(b-a)(x-y+z+2x+y-z+y-2x)\\&=(b-a)(x+y).\end{aligned}$$

说明:因式分解中往往要通过多项式的变号处理找到适当的公因式,这样可减少出错。

例 7　$3^{2002}-3^{2001}-3^{2000}$ 能否被 15 整除?

解:原式 $=3^{2000}(3^2-3-1)=5\times3^{2000}=5\times3\times3^{1999}=15\times3^{1999}$.

$\therefore 3^{2002}-3^{2001}-3^{2000}$ 能被 15 整除.

综合能力检测

基本训练题

一、选择题

1. 下列从左到右的变形,属于因式分解的是　(　　)

A. $a(a+b-1)=a^2+ab-a$　　B. $a^2-a-2=a(a-1)-2$

C. $-4a^2+9b^2=(-2a+3b)(2a+3b)$　　D. $a+b+c=\frac{1}{5}(5a+5b+5c)$

2. 把下列各式因式分解,正确的是　(　　)

A. $x^2y+7xy+y=y(x^2+7x)$　　B. $3a^2b-3ab+6b=3b(a^2-a+2)$

C. $8xyz-6x^2y=2xyz(4-3x)$　　D. $-2a^2+4ab-6ac=-2a(a+2b-3c)$

3. 把多项式 $a^5b-a^2b^3$ 提取 a^2b 后,剩余的因式为　(　　)

A. a^3+b^3　　B. a^3-b^3　　C. a^3-b^2　　D. a^3+b^2

4. 下列各式中,因式分解正确的是　(　　)

A. $8xyz-6x^2y^2=2xy(4z+3xy)$

B. $a^m-a^{m+1}+a^{m-1}=a^{m-1}(a-a^2+1)$

C. $-6a^3+15a^2b^2-9ac^2=-3a(2a^2+5b^2-3c^2)$

D. $a^2b^2-\frac{1}{4}ab^3=\frac{1}{4}b^2(4a-ab)$

5. 代数式 $x-2$ 是下列哪一组多项式的公因式　(　　)

A. $(x+2)^2,(x-2)^2$　B. $x^2-2x,4x-6$　C. $3x-6,x^2-2x$　D. $x-4,6x-18$

6. 把多项式 $-4x^3+8x^2-16x$ 分解因式等于　(　)

A. $-x(4x^2-8x+16)$　B. $x(-4x^2+8x-16)$

C. $4(-x^2+2x-4)$　D. $-4x(x^2-2x+4)$

7. 多项式 $8x^{2n}-4x^n$ 提取公因式后,括号内的代数式是　(　)

A. $4x^n$　B. $2x^n-1$　C. $4x^n-1$　D. $2x^{n-1}-1$

8. 把多项式 $m^2(a-2)+m(2-a)$ 分解因式等于　(　)

A. $(a-2)(m^2+m)$　B. $(a-2)(m^2-m)$

C. $m(a-2)(m-1)$　D. $m(a-2)(m+1)$

9. 下列分解因式错误的是　(　)

A. $3a^2b-6ab^2=3ab(a-2b)$

B. $(x-y)^2-(x-y)=(x-y)^2$

C. $-6a^3+15ab-9ac^2=-3a(2a^2-5b+3c^2)$

D. $12x^2y+14xy^2-2xy=2xy(6x+7y-1)$

10. $-m(a-x)(x-b)+m(a-x)(b-x)$ 的公因式是　(　)

A. $-m$　B. $-m(a-x)$　C. $-(a-x)(b-x)$　D. $m(a-x)(b-x)$

二、填空题

11. 分解因式:$p(1-p)^3(1+p)^2-p^2(p-1)^2(1+p)^3=$__________.

12. 分解因式:$(x-y)^2-2y+2x=$__________.

13. 分解因式:$x^2(x-y)^{n+1}-2x(x-y)^{n+2}+(x-y)^{n+3}=$__________.

14. 分解因式:$3m^2(x-y)^2+6m(y-x)^3=$__________.

三、解答题

15. 把 $3x(x-y)^3+2x(y-x)^3-y(x-y)^3$ 分解因式.

16. 利用简便方法计算求值.

(1) $\frac{1}{5}\times25.6\times13+24.4\times0.2\times13-13\times40\times\frac{1}{5}$;　(2) $\frac{2^{n+4}-2\times2^n}{2\times2^{n+3}}$.

发散思维训练题

17. 已知 $x^3+x^2+x+1=0$,求 $1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{2003}$ 的值.

18. 已知关于多项式 $2x^3+x^2-12x+k$ 因式分解后有一个因式为 $2x+1$.

(1)求 k 的值;

(2)将此多项式因式分解.

19. 任意一个三位数的百位数字与个位数字交换位置，所得到的数与原三位数之差能被 99 整除吗？为什么？

参考答案

基本训练题

1. C 2. B 3. C 4. B 5. C 6. D 7. B 8. C 9. B 10. D

11. $p(1-p)^2(1+p)^2(1-2p-p^2)$ 12. $(x-y)(x-y+2)$ 13. $(x-y)^{n+1}y^2$

14. $3m(x-y)^2(m-2x+2y)$

15. 解：原式 $=3x(x-y)^3-2x(x-y)^3-y(x-y)^3$

$=(x-y)^3(3x-2x-y)$

$=(x-y)^4$.

16. 解：(1) 原式 $=0.2\times13\times(25.6+24.4-40)$

$=0.2\times13\times10$

$=26$.

(2) 原式 $=\dfrac{2^n\times(2^4-2)}{2\times2^{n+3}}=\dfrac{2^n\times14}{2^{n+4}}=\dfrac{14}{2^4}=\dfrac{14}{16}=\dfrac{7}{8}$.

发散思维训练题

17. 解：原式 $=(1+x+x^2+x^3)+x^4(1+x+x^2+x^3)+\cdots+x^{2000}(1+x+x^2+x^3)$

$=0$.

18. 解：(1) 当 $2x+1=0$，即 $x=-\dfrac{1}{2}$ 时，有 $2x^3+x^2-12x+k=0$，即：

$2\times(-\dfrac{1}{2})^3+(-\dfrac{1}{2})^2-12\times(-\dfrac{1}{2})+k=0$，$\therefore k=-6$.

(2) $\because k=-6$，设 $2x^3+x^2-12x-6=(2x+1)(x^2+mx-6)$

则 $2x^3+x^2-12x-6=2x^3+(2m+1)x^2+(m-12)x-6$

$\therefore 2m+1=1$，$\therefore m=0$，$\therefore 2x^3+x^2-12x-6=(2x+1)(x^2-6)$.

19. 解：设原三位数的个位数字为 x，十位数字为 y，百位数字为 z，则原三位数为 $100z+10y+x$，新三位数为 $100x+10y+z$，$\because (100x+10y+z)-(100z+10y+x)=100x+10y+z-100z-10y-x=99x-99z=99(x-z)$.

$\therefore$ 新三位数与原三位数之差能被 99 整除.

知识要点

1. 把乘法公式反过来运用，可以把符合公式特点的多项式分解因式，运用的公式是平方差公式和完全平方公式.

2. (1)平方差公式$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$，反过来，就得到因式分解的平方差公式.

(2)平方差公式的特点：

①公式的右边是二项式，两项都能写成平方的形式，且符号相反；左边是两个数的和与这两个数的差的积.

②公式中所说的“两个数”是a,b，而不是a^2,b^2，其中a,b既可以是单项式，也可以是多项式.

(3)凡是符合平方差公式的二项式，都可以运用平方差公式分解因式，如$x^2-y^2,a^2-1,(x+1)^2-(y+1)^2,4x^2-9,-16a^2+(b+c)^2$等.

3. 完全平方公式

(1)把乘法公式中的完全平方公式$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$反过来，就得到因式分解的完全平方公式$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$；$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$，就是说，两个数的平方和，加上这两个数的积的2倍，等于这两个数的和的平方；两个数的平方和，减去这两个数的积的2倍，等于这两个数的差的平方.

(2)完全平方公式的特点：

①公式的右边是三项式，其中首末两项分别是两个数(或两个式子)的平方，且这两项的符号相同，中间一项是这两个数(或两个式子)的积的2倍，符号正负均可；左边是这两个数(或两个式子)的和(或者差)的平方，当中间的乘积与首末两项的符号相同，是和的平方；当中间的乘积项与首末两项的符号相反时，是差的平方.

②公式中的a,b，即“这两个数”既可以用单项式代替，又可以用多项式代替.

(3)凡是符合完全平方公式的三项式，都可以运用完全平方公式分解因式.

把 $a-ab^2$ 分解因式.

（1999 年湖南省）

分析：从表面上看，a 与 ab^2 都不能写成平方形式，因而不能直接用平方差公式进行因式分解，但 a 与 ab^2 有公因式 a，提出公因式 a 后，另一个因式是 $1-b^2$，可运用平方差公式继续分解.

$a-ab^2$

$=a(1-b)^2$

$=a(1^2-b^2)$

$=a(1+b)(1-b)$.

说明：如果多项式的各项含有公因式，那么先提出这个公因式，再进一步分解因式.

分解因式 x^4-1 的结果正确的是（　）

A. $(x^2-1)(x^2-1)$　B. $(x-1)(x+1)(x^2+1)$　C. $(x+1)^2(x-1)^2$　D. $(x-1)(x+1)^3$

（1998 年河北省）

分析：因 $x^4=(x^2)^2$，$1=1^2$，故原式可因式分解为 $(x^2+1)(x^2-1)$，因式 x^2-1 还可继续分解成 $(x+1)(x-1)$.

应选 B.

说明：分解因式必须进行到每一个多项式因式都不能再分解为止.

若 $x^2+2(a+4)x+25$ 是完全平方式，求 a 的值.

分析：根据完全平方公式的特点，看公式中的 a，b 分别是什么，显然两个平方项 x^2，25，中间乘积项应为 $\pm 10x$.

$x^2+2(a+4)x+25=x^2+2(a+4)x+5^2$

$\because$ 此多项式是完全平方式，

$\therefore 2(a+4)x=\pm 2\cdot x\cdot 5, 2(a+4)=\pm 10$,

当 $2(a+4)=10$ 时，$a=1$；

当 $2(a+4)=-10$ 时，$a=-9$.

$a=1$，或 $a=-9$.

说明：本题是利用完全平方公式的特点反过来确定多项式中的系数，要防止出现只考虑到公式 $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$，从而使得 $2(a+4)x=2\cdot x\cdot 5$，$a=1$，若一个多项式为完全平方式，如果是一次项系数未确定时，一次项系数有两种可能，它们一正一负互为相反数.

已知 n 是整数，$(2n+1)^2-1$ 能被 8 整除吗？试证明你的结论.

分析：要判断 $(2n+1)^2-1$ 能否被 8 整除，只要将此式分解因式，看各因式的积能否被 8 整除即可.

答：$(2n+1)^2-1$ 能被 8 整除.

证明：$(2n+1)^2-1=[(2n+1)+1][(2n+1)-1]$

$=2(n+1)\cdot 2n$

$=4n(n+1)$.

因为 n 是整数，所以 n 与 $n+1$ 是两个连续的整数，而两个连续的整数之间必有一个是偶数，即 $n(n+1)$ 能被 2 整除，所以 $4n\cdot(n+1)$ 能被 8 整除，故 $(2n+1)^2-1$ 能被 8 整除.

说明：本题是一道开放型试题，应先对结论作出判断，如果结论是肯定的，再对结论加以证明，如果结论是否定的，要举一反三加以说明，本题利用因式分解一般能证明它被 4 整除，而容易忽视两个连续整数中必有一个是偶数这一事实.

已知 $x-y=1$，$xy=2$，求 $x^3y-2x^2y^2+xy^3$ 的值.

分析：先对所给的代数式进行因式分解，使之出现 xy 与 $x-y$ 的式子，再整体代入求值.

$\because x-y=1,\ xy=2$,

$\therefore x^3y-2x^2y^2+xy^3=xy(x^2-2xy+y^2)$

$=xy(x-y)^2$

$=2\times1^2=2$.

说明：这类问题一般不适合解方程组求得 x,y 的值再代入计算，因式分解是整式恒等变形的重要手段，整体代值计算是化简计算题最常用的方法.

已知 $x^2+(a+b)x+ab=x^2+4x+4$，求 $a^2-2ab+b^2$ 的值.

分析：$a^2-2ab+b^2$ 虽然可分解为 $(a-b)^2$，但已知条件用不上，所以要化成 $(a+b)^2-4ab$，这是根据条件进行有目的的变形.

$a^2-2ab+b^2$

$=a^2+2ab+b^2-4ab$

$=(a+b)^2-4ab$.

$\because\ x^2+(a+b)x+ab=x^2+4x+4$

$\therefore\ a+b=4,\ ab=4$

$\therefore (a+b)^2-4ab=16-16=0$.

故，$a^2-2ab+b^2$ 的值为 0.

基本训练题

1. 下列各式中能用平方差公式分解因式的是 ( )

A. $-x^2-(x-y)^2$　　B. $(-y)^2-(x-y)^2$

C. $(-y)^2+(x-y)^2$　　D. $-(-y)^2-(x+y)^2$

2. 把 $0.09x^2-\frac{16}{49}y^2$ 分解因式的结果是 ( )

A. $(0.0081x+\frac{4}{7}y)(0.0081x-\frac{4}{7}y)$　　B. $(0.3x+\frac{4}{7}y)(0.3x-\frac{4}{7}y)$

C. $(0.03x+\frac{4}{7}y)(0.03x-\frac{4}{7}y)$　　D. $(0.3x+\frac{7}{4}y)(0.3x-\frac{7}{4}y)$

3. $-1+0.09x^2$ 分解因式的结果是 ( )

A. $(-1+0.3x)^2$　　B. $(0.3x+1)(0.3x-1)$

C. $(0.09x+1)(0.09x-1)$　　D. 不能分解

4. 下列各式是完全平方公式的是 ( )

A. $x^2+2xy+4y^2$　　B. $25a^2+10ab+b^2$　　C. p^2+pq+q^2　　D. $m^2-2mn+\frac{1}{4}n^2$

5. 下列多项式中能用公式法进行因式分解的是 ( )

A. x^2+4　　B. x^2+2x+4　　C. $x^2-x+\frac{1}{4}$　　D. x^2-4y

6. 下列各式中不能用完全平方公式分解的是 ( )

A. $-x^2+2xy-y^2$　　B. $x^4-2x^3y+x^2y^2$

C. $(x^2-3)^2-2(3-x^2)+1$　　D. $x^2-xy+\frac{1}{2}y^2$

7. 下列哪个多项式分解因式的结果是 $(x^m-y^n)^2$ ( )

A. $x^{2n}-y^{2n}$　　B. $x^{2m}-2x^my^n+y^{2n}$

C. $x^{2m}-2x^m-y^{2n}$　　D. $x^m-2x^my^n+y^n$

8. 计算 582^2-518^2 的结果为 ( )

A. 1164　　B. 1036　　C. 70400　　D. 64

9. 分解因式 $4-12(x-y)+9(x-y)^2=$ ________.

10. 若 $x^2+2(m-3)x+16$ 是完全平方式,则 $m=$ ________.