几何解题技巧和训练

（下册）

门树慧　门树敏　编著

科学技术文献出版社

致 读 者

平面几何、立体几何和平面解析几何是中学数学的重要课程。为了提高中学生和知识青年的解题能力，我们编写了这本《几何解题技巧和训练》，本书分上、下两册，上册为平面几何内容，已于1990年6月出版，下册为立体几何和平面解析几何内容。

本书下册共分五章。第一章研究立体几何入门训练；第二、三章分别研究立体几何和平面解析几何解题技巧和训练；第四章研究题型和解题方法；第五章研究一些不寻常的几何问题，即用高等数学观点解题，以开阔学生视野，也可供数学教师参阅；在每章内容中，配备了一定数量的典型问题，加以分析和讨论。

由于水平所限，编写的内容可能有不妥和错误之处，请读者批评指正。

编 者

目　　录

引　言

本书将要讨论几何解题技巧和训练。

在学习数学的过程中，解题训练起着十分重要的作用，如果只停留在读数学书，而不动手解题，不可能掌握好数学知识。最淡的墨水也胜过最强的记忆，读数学书而不作题，就好像进入宝山而不采摘。解题的训练还能提高自身的能力和养成良好的学习习惯和工作作风。

懂、会、熟、巧

解题的技能技巧是通过掌握的知识形成和发展的，而解题技巧和能力的培养又是在掌握数学基础知识的前提下进行的，所以，在学习数学的过程中，知识、技能技巧和能力是互相关联的。解题本领的提高要经过懂、会、熟、巧的过程。

懂。要求不但明白数学结论，而且明白其逻辑关系过程。在没有搞懂知识的时候，是不能解好题的。

会。懂得某些知识以后，不一定会作题。只有在脱离书本和指导的情况下独立作出题，才能叫做“会”了。这要通过解题的训练而达到。

熟。会作某些数学题，但作的很慢，而且常常反复修正，就是不“熟”。说明掌握、运用知识的本领和解题技巧

有待提高。

巧。熟才能生巧。有时，题目虽解对了，但不够巧，即方法笨拙或单一，缺少创造性。

由懂达到巧，要经过解题训练的过程，对于解几何题，还有其特有的技能和要求。

解几何题应具有的素养和技能

解几何问题（或学好几何）应具有以下素养和技能。

识图和想象图形的直观技能：若图形已给定时，应观察平面或空间图形的整体和各部分的相互关系及其特性，如平行、垂直特性，对称性等；从观察到的特性导出更多的特性，从而为解题开辟途径；当图形没有给出，只有模型或只有文字题目时，应在头脑中想象出图形的模样，甚至想象出它们的反例。这是画图能力的必备条件。

画草图和直观图的技能：能进行基本尺规作图；按照给定的条件画出图形的草图并标上相应的点、直线、平面的字母；能够用语言描述出这个草图；画出图形所需作的截面图形，根据需要，画出平面的交线或画出相应出现的二面角的平面角；添加辅助线或辅助平面；若使用反证法时，还应画出反面情况的图形；用斜二轴测投影（常常画棱柱、锥、台）和正等轴测投影（常常画圆柱、锥、台）画出物体的直观图。

逻辑推理技能技巧：根据题目条件，把图形进行分类并进行逻辑推理和证明；运用直接证法、间接证法、坐标法或向量法、数学归纳法或利用变换（如平移、旋转、轴反射、

相似变换等）方法解几何题。

制作模型和应用数学知识于实践的技能：制作几何实物模型，根据模型推测出其它几何性质；利用折纸、镜反射、计算机等各种手段和操作过程解几何题；探究几何与实践的关系，如几何与透视和建筑、黄金分割与美学、蜂房结构以及空间探测领域上的几何问题等。

解几何问题还需要有灵活的解题方法和合理的思维方式，如发现问题、化归思想与用构造法思想解题。

“发现”、“化归”与“构造”

科学的发展要求我们不能只会证明前人的结论，而应去发现新的真理。所以，在解题时，应更多的进行发现能力的自我训练。数学的发现能力依赖于数学的直觉，许多严格的思维和论证是从大量的直觉思维积累起来的，而有时，许多极好的证明方法可以通过猜想、试探、跳跃式的思维而得到，它并不完全依赖于已知的、前人的结论。例如，非欧几何的发现，就是在将近两千年对欧几里得第五公设的试证中，用前人没有用过的方法，经过猜想和试证而得出的，从而引起了几何学的巨大变革。解几何题时，怎样培养发现能力？可以从观察、归纳、合情（不完全）推理中去试探解题途径。例如，可以从实物中观察异面直线和线面关系；从实验中测量体积公式，从归纳中进行推理或合情推理，试探结果，进行先假想后论证的直觉思维训练。

“化归”是解几何题常用的一种方法，即转化的方法。如解立体几何问题时，一般都把空间问题化归到一个或几个

截面上，利用平面几何来解决（欧拉公式的证法是个例外，它属于拓扑学），化归的最常用的手段是通过截面，或空间问题化归到截面多边形或圆中来解题。

构造法是解初等数学问题的一种重要方法。它是在运用基础知识的基础上，应用辅助模式，如构造几何模型、构造公式、构造图形等来解题，这有其特殊的功效。例如，立体几何中，时常构造平面、构造截面，再如，在求证$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$（$a>b>0$）时，可以构造一个辅助图形，即以$a+b$为直径的长，作半圆，过此直径上线段$a$与$b$的分界点作垂线，与半圆有一交点，易证此交点与垂足所连的线段总小于或等于半径$\left(\text{即}\frac{a+b}{2}\right)$，再由射影定理可知，此线段的长度为$\sqrt{ab}$，则由构造的图形可证出$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$。

以下几章将对立体几何和平面解析几何解题技巧和训练，以及各种题型和不寻常的几何问题进行研究，对所引进的问题，着重于解题过程的探讨。在数学解题能力的提高上，自我训练是最重要的，古人所说“业精于勤而荒于嬉”正是这个道理。

第一章　立体几何初学阶段的解题训练

本章介绍立体几何入门阶段的基本训练，如：怎样画出空间图形，怎样运用直线和平面的位置关系解题等。

§1-1　从平面几何到立体几何

有这样一个游戏："用六根火柴以每根为一边，搭出四个正方形"。这个问题在平面上搭得出来吗？如果搭成空间图形，成一个正四面体，倒是可以成功的。生活中许多问题，要从平面到空间去考虑，从学习平面几何到学习立体几何，研究对象发生了部分变化，它们是初等几何的两个部分，平面几何研究同一平面内几何图形的相互位置、形状和大小等性质，而立体几何是研究不全在同一平面内的几何图形的相互位置、形状和大小等性质。因此，学过平面几何，再学习立体几何，应该是比较容易的。

但是，在学习过程中，有些人常感到"立体几何难学"。这是由于平面几何图形可以在纸上画出来，而立体几何图形却不能用尺规画出其直观图，即要用二维的平面直观图来表示三维的空间图形，因此，画不出图形或遇到图形想象不出

它的样子，给解题带来了困难；立体几何中定理和定义比较多，不容易系统记忆和运用，且证明问题的逻辑过程较长，有时不易理清思路，又常常需用反证法；由于空间概念建立得不好，往往容易在解立体几何题目时，滥用平面几何定理，造成错误。因此，从平面几何到立体几何，由于知识结构的变化、观念的变化、技能的变化和方法的变化，会在初始阶段产生困难。

了解了产生困难的原因，就可以有针对性地进行自我训练，提高空间想象能力和逻辑思维能力，解决立体几何入门的困难。

一、要善于对比和联想

什么叫做几何图形的相互位置、形状和大小呢？立体几何是研究空间图形的相互位置、形状和大小的，什么是空间呢？

在生活中，我们所能看到的地方，都是空间的一部分，当我们离开课桌，走到讲台前面的时候，我们是离开原来位置所占据的空间，改占另一部分空间。空间是宇宙中所有位置的总体，在几何学里，我们用点来表示位置。所以，点是位置的抽象化的概念。例如，在地图上，我们用点来表示一个地方的位置。当我们从一个地方移到另一个地方的时候，所经过的路径叫线，线是路径的抽象化的概念。“位置”和“路径”是空间中的最原始的概念。在几何学中，“点”和“线”也是最基本的概念，在各种线中，直线是最简单最基本的。

在空间中，有各种各样的面，有平面和曲面，在各种线中，以直线为最基本，同样的，在各种面中，平面是最基本

的概念。在立体几何中，平面的基本性质是由关于平面的公理来描述的。就像在平面几何中的公理："两点决定一条直线"一样，它描述了直线的基本性质。它不仅说明了经过两个不同的点可以作一条直线，而且只可以作一条直线，同时也间接地说明了经过一点可以作无数条直线，经过三点不一定能作一条直线。在立体几何中，由公理"不共线的三点决定一个平面"也可以说明，在空间经过一点或两点可以作无数个平面，经过四点不一定能做出一个平面。

在立体几何中，由于图形的各部分不完全在一个平面内，因而图形元素之间的相互位置关系较为复杂。为了研究这些元素的位置关系，可以借助直线和平面的位置关系来明确。所以立体几何第一章"直线和平面"中的有关概念和定理是研究立体几何问题的基础和前提。在研究直线和平面的位置关系时，和平面几何一样，都是从它们有没有公共点，以及有几个公共点来进行定义和分类的。例如：若两条直线有两个公共点，则这两条直线重合；有一个公共点则相交；在同一平面内没有公共点则平行，在立体几何中，异面直线的概念是新概念。所以，分清元素之间的位置关系，要注意它们在空间中是否能在同一平面内，经常和平面几何进行对比和联想，有助于提高空间想象力。

所以，立体几何的研究方法和平面几何有许多相似之处，另外，在学习定理的过程中，有许多内容还和平面几何有相同或相似之处，细心体察，有助于学习，若盲目乱用，则可能造成错误。

例如，"从空间的一点，到空间的一条直线可以作并且只可以作一条垂线"。这个结论和平面几何定理没有什么区

别，这是因为空间一点A和直线 l 可以决定一个平面 α，所以A和 l 在同一平面内，就是平面图形，因而适合平面几何定理。

但是，平面几何中的"两条直线若不相交则平行"，在立体几何中不适用，因为在空间还存在异面直线。

在立体几何中，很多定理和平面几何有类似之处，把某些平面几何中的点换作直线，所有的直线或某几条直线换作平面，就可以得到相类似的立体几何定理。如：在平面几何中，有"一条直线垂直于两条平行线中的一条，也垂直于另一条"。在立体几何中，有"一直线 l（或一平面）垂直于两个平行平面中的一个，也垂直于另一个"。但是，若把"两条直线都垂直于第三条直线，那末这两直线平行"换成"两平面都垂直于第三个平面，那么这两个平面互相平行"就不成立。如图1-1所示，这两个平面还可能相交。

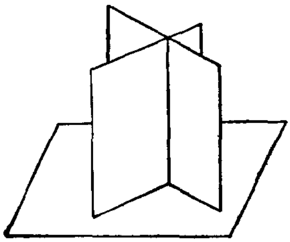


图 1-1

所以，由平面几何中的定理，经过对比和联想，并经过证明后，才能得出立体几何中有关的定理，稍不注意就可能产生错误。比如"与一直线垂直的两条直线成什么位置关系？"这一问题可以在平面几何中考虑答案，然后在立体几何中再考虑答案，并善于想象它们的图形。

有许多立体几何的问题可以转化成为平面几何的问题。如有关直线和平面平行或垂直的问题，一般可以转化为直线和直线平行或垂直的问题来解决，例如，求证一条直线和一

个平面平行，常用的方法是证明这条直线和平面内的一条直线平行；求证一条直线和一个平面垂直，常用的方法是证明这条直线和平面内两条相交直线垂直……。在学习多面体和旋转体的时候，还可以通过作截面把空间问题转化到一个平面上，利用平面几何定理加以解决。

和平面几何一样，立体几何也是用逻辑推理的方法研究图形性质的学科，这就是说，它们都是在公理的基础上，用定义和定理的形式把图形的相互位置和形状大小等性质，顺次排列，后面的定理要用到前面的公理、定义和定理来证明。和平面几何一样，立体几何的公理是以后推证的重要依据。

二、学好立体几何公理

公理是人类长期实践中验证无误的真理。几何学中的公理，是最简单的最基本的几何事实，它的作用是描述几何基本元素的性质。它是论证几何定理的依据。

立体几何首先要研究点、直线和平面的相互位置，所以必然要有关于一些公理来描述这些基本元素的性质。课本中的公理１、公理２、公理３，就是讲述这些基本性质的。

公理１ 如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线上的所有的点都在这个平面内。

究竟怎样的面才算平面呢？这个公理描述了平面的“平直”性，即平面到处平直，还可以向四方伸展。课本上举了用直尺检验平面的例子：把一根直尺边缘上的任意两点放在平的桌面上，可以看到直尺的边缘就落在桌面上。

只有平面才具有公理１所说的特性，一个球面或一个柱面以及其它曲面都不具有这个特性。如图１－２和图１－３所

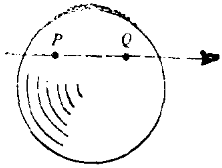


图 1-2

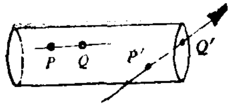


图 1-3

示。

在图 1-2 所示的球面中，在球面上任取两点 P、Q，用直线连结起来，那末这条直线上只有两点在球面上，其余的点全不在球面上。在图 1-3 中，在母线平行的方向上，取柱面上的点 P 和 Q，则 PQ 连线上的点还在柱面上，但在其它方向上取柱面上任意两点 P′、Q′，则 P′Q′ 连线上的点全不在柱面上。所以，公理 1 深刻地指明了平面所特有的性质。当然，也可以说，公理 1 还描述了直线的性质。

公理 2 如果两个平面有一个公共点，那么它们有且只有一条通过这点的公共直线。

这条公理也是描述平面的性质的。球面和球面相交，平面和球面相交时，交线就不是直线而是圆。其它任何曲面相交，交线也不是直线，所以公理 2 表明了平面特有的性质。

这条公理还说明，空间两个平面的相互位置（除了重合以外），只有两种情形，一种是相交于一条直线，即相交平面；另一种是没有公共交点，即平行的平面。

在平面几何里，常常需要添加辅助线，所以必需明确在平面内确定直线的条件，即“两点决定一条直线”这样才能保证所作的直线存在并且是唯一的。同样，在立体几何中，常需要辅助平面，于是必需明确空间确定平面的条件，以保

证所作的辅助平面是存在的并且是唯一的。公理3及其推论即说明了确定平面的条件。

公理3　经过不在同一直线上的三点，有且只有一个平面。

利用公理3及平面几何中的有关公理，可以得出如下三条推论。

推论1　经过一条直线和这条直线外的一点，有且只有一个平面。

推论2　经过两条相交直线，有且只有一个平面；

推论3　经过两条平行直线，有且只有一个平面。

为什么推论需要证明呢？这要注意到几何学的特点，即任何简单的结论，如果不是在公理中已经有的，都要以公理或已经证明过的定理为依据推证出来。

立体几何中的公理是推证后面定理的基础，应该深刻理解并记住这些公理。在学习中，要注意结合实例认识这些特性是平面特有的，还应结合实例说明这些公理的应用。如一扇门用两个合页和一把锁（或一个门轴加一把锁）就可以固定，可用公理3（或公理3推论1说明）。一扇门能够绕着门轴自如开关，可以用公理2来说明（即两个平面有一个公共点，那么它们有且只有一条通过这个点的公共直线）。

三、画图和模型

为了学好立体几何定理，提高空间想象能力，就需要经常画空间图形，并且把画图、看图、想图结合起来。画图的方法和有关知识可以参阅“怎样画出空间图形”一节和附录“直观图简介”、“谈空间作图”等。还可以制作模型，通过模型和纸上的图的比照可以提高空间想象力和画图能力。

在立体几何中，由于一个平面图形画成立体草图时，可以因人而异，且图中又有虚实线，看起来等角“不”等了，直角不“直”了，等线段看来有长有短，全等形也不像全等，看似平行的线也不平行……种种因素造成了识图的困难，头脑中没有一个立体图形的形象，甚至形成错误的形象。因此，要不断从模型到画图进行自我训练，初学阶段利用模型摆摆、看看、再画画，就可以慢慢心领神会了。

可以用一些筷子、竹针作为直线，用硬纸板作为平面来作出图形的模型，并用橡皮泥作固定。如制作正方体、正三角形、正方形、正六边形、矩形。又如比划异面直线可将一个竹针放矩形纸板上，另一根与纸板相交插入（但不与第一根直线相交），进行观察，并结合异面直线有关定义进行思考。

生活中的许多实物就是“模型”，如装墨水瓶的纸盒就是长方体，笔筒是圆柱，斧子形成的二面角，墙面与地面是垂直平面……解题时，初学阶段可以先看清题意，然后摆弄（或观察）模型再画出草图，而后写已知、求证（解），找出证（解）法。在进行解题时，还可在草图上分解出一些“小的解剖图”作为计算或证明时用。

问题1 如图 1-4，已知 $\alpha-l-\beta$ 是直二面角，$A\in\alpha$，$B\in\beta$，$AB=2$，AB 与 α、β 形成的角都是30°。求：

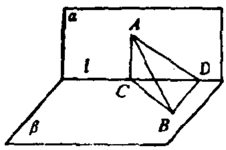


图 1-4

（1）A、B 两点在 α 上射影间的距离；

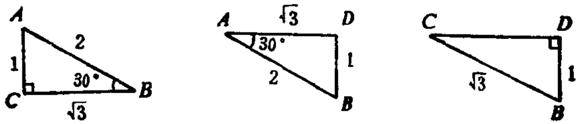
（2）AB 与 α 所成的角；

（3）AB 与 l 的距离。

第一步，先动手用硬纸折成直二面角 $\alpha-l-\beta$，再用竹针作为 AB 按题意摆好，用橡皮泥固定。然后用笔在模型上画出 A、B 两点到 l 的垂线，垂足为 C、D。

第二步，画出草图。

第三步，再作出解剖图，标上 AB＝2。



（1）（2）（3）

图 1-5

第四步，进行推理和计算，当遇到困难时结合模型和图来思考。其思路是：

过 A 在 α 作 $AC\perp l$ 交 l 于 C
过 B 在 β 内作 $BD\perp l$ 交 l 于 D $\Bigg\}\Longrightarrow$
CD 是 A，B 在 l 上的射影间的距离。

$$\left.\begin{array}{l}\alpha\perp\beta,\ \alpha\cap\beta=l\\ A\in\alpha.\\ AC\perp l\quad AC\cap l=C\end{array}\right\}\Longrightarrow AC\perp\beta$$

同理 $BD\perp\alpha$.

AB 与 α 所成的角为 $\angle BAD$。

AB 与 β 所成的角为 $\angle BAC$。

在解剖图中进行推算求得 $CB=\sqrt{3}$，$BD=1$，则 $CD=\sqrt{2}$。

通过问题 1，我们可以看出初学阶段掌握操作模型和反