

● 陈维敏 编著

● 北京理工大学出版社

固体力学

有限元分析

责任编辑：陈幼松
封面设计：王四海

ISBN 7-81013-171-0/O·32 定价：4.40元

881663

8325

北

4424

3325
4424

夫道

固体力学有限元分析

蒋维城 编著

北京理工大学出版社

内 容 简 介

本书系统介绍线性弹性结构静动力分析有限单元法基本理论、数值计算方法和程序实施技术。主要内容有：杆系结构矩阵位移法；弹性体有限单元法；等参数单元和板弯曲单元；总体刚度方程组的形成、约束处理和求解；子结构技术；弹性结构动力学问题及其解法，直接积分法和振型叠加法，特征值问题解法，行列式搜索法和子空间迭代法；微机程序SAFEP的源程序讲解和使用方法。本书可作工科专业教学用书（50~70学时），也可供工程技术人员参考。

固体力学有限元分析

蒋维城 编著

*

北京理工大学出版社出版
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
国防科工委印刷厂印刷

*

787×1092毫米 16开本 20.25印张 500千字

1989年6月第一版 1989年6月第一次印刷

ISBN7-81013-171-0/O·32

印数：1-1500册 定价：4.40元

前 言

有限单元法是一种比较通用和有效的结构分析数值近似计算方法。目前已经有许多功能齐全的有限元通用程序可以用来计算各种复杂的工程实际问题。由于程序结构的模块化,还可以对已有程序不断补充新的程序模块,来提高程序的功能,满足新的需求。有限单元法原理及其程序设计方法已经成为力学和工程技术人员从事工程结构研究和设计必须掌握的基础知识。

本书系统介绍线性弹性结构静力和动力分析有限单元法的基本理论、数值计算方法以及程序实施技术。有限单元法按采用的基本未知量来划分,有位移法、力法和混合法等类型,其中以位移法应用最广泛。这是因为它具有简单性、普遍性和良好的数值性质。绝大多数的大中型结构分析通用程序都采用位移法。本书只介绍位移法,以此作为基础,不难学习力法或混合法。

本书第一章讲述杆系结构的矩阵位移法,以建立有限单元法的基本概念。第二、三章介绍弹性体的静力分析有限单元法。讲述连续体离散化和建立有限单元法公式的基本方法。深入讨论等参数单元。第四章是总体刚度方程组的形成和求解,以及位移边界条件的处理。详细讨论节省内存的方法、程序编制技巧和子结构技术。第五章介绍板弯曲单元。第六章介绍结构静力分析有限元微机程序SAFEP的程序结构、数据管理和使用方法。它的重要子程序分散在有关章结合有限单元法运算公式进行详细说明,以帮助读者理解有限元通用程序的编制方法。第七、八章讨论线性弹性结构动力分析的有限单元法。特别介绍特征值问题的求解方法。

作者期望本书能为读者进一步学习大型线性静动力结构分析通用程序(例如SAP5程序)的理论、计算方法和程序结构介绍必要的基础知识。

本书的编写工作得到北京理工大学应用力学系同事们热情鼓励和支持。王国锋和谢惠民同学参加单元程序模块的编制工作。范元勋和蒋友谅同志详细审阅书稿,邓成光同志曾对本书初稿提出很多宝贵意见,谨向他们表示感谢。

读者如需复制SAFEP源程序和考题的软盘,请与北京理工大学应用力学系联系。

限于本人水平,书中难免有不妥之处,敬请读者批评指正

编 者

1988.7

绪 论

运用固体力学理论(包括结构力学、弹性力学、塑性力学等)对结构进行强度和刚度分析,是工程设计的重要内容之一。随着科学技术的进步和生产的发展,工程结构的几何形状和载荷情况日益复杂,新的材料不断出现,使得寻找结构分析的解析解十分困难,甚至不可能。因此,人们转向寻求它的近似解。1908年里兹(W.Ritz)提出一种近似解法,具有重要意义。它利用带未知量的试探函数将势能泛函近似,对每一个未知量求势能泛函的极小值,得到求解未知量的方程组。里兹法大大促进了弹性力学在工程中的应用。里兹法的限制是试探函数必须满足边界条件。对于几何形状比较复杂的结构来说,寻找满足整个边界条件的试探函数也非易事。1943年库兰特(R.Courant)对里兹法作了极重要的推广。他在求解扭转问题时,将整个截面划分成若干个三角形区域,假设翘曲函数在各个三角形区域内近似线性分布,从而克服了以前里兹法要求整体近似函数满足全部边界条件的困难。库兰特这样应用里兹法与有限单元法的初期思想是一致的。但是这种近似解法要进行大量数值计算,在当时还是个难题。因此,未能得到发展。

有限单元法是采用电子计算机求解数学物理问题的一种数值计算近似方法。它发源于固体力学,后迅速扩展到流体力学、传热学、电磁学、声学等其他物理领域。固体力学有限单元法的理论依据,从发展历史看,主要有三种途径:即结构矩阵法、变分法和加权余量法。整个计算过程是通过编制好的程序在电子计算机上自动进行。它具有极大的通用性,在程序功能范围内,只要改变输入的数据就可以求解不同的工程实际问题。这种解法完全改变了解析法中针对一种实际问题寻找一种解法的局限性。

在1946年电子计算机诞生以后,首先采用它来进行数值计算的是杆系结构力学。它的理论依据是由结构力学位移法和力法演变成的矩阵位移法和矩阵力法,统称结构矩阵法。它采用矩阵代数运算,不仅能使算式书写简明,而且编制计算机程序非常方便。结构矩阵法的力学概念清楚,全部理论公式按结构力学观点讲都是准确的。仅在数值运算过程里,由于计算机实数存储位数有限,造成舍入误差。

1956年特纳(M.J.Turner)、克劳夫(R.W.Clough)、马丁(H.C.Martin)和托普(L.J.Topp)在纽约举行的航空学会年会上介绍一种新的计算方法,将矩阵位移法推广到求解平面应力问题。他们把结构划分成一个个三角形和矩形的“单元”,利用单元中近似位移函数,求得单元节点力与节点位移关系的单元刚度矩阵。同期,阿吉里斯(J.H.Argyris)在航空工程杂志上发表一组能量原理和结构分析论文(1954~1955年),他将弹性结构的基本能量原理做了概括、推广并予以统一,发展了矩阵方法,还导出由平面应力板和四个边缘件组成的矩形板格的单元刚度矩阵。他们对连续体有限单元法的形成做了开创性工作。1960年克劳夫在论文“平面应力分析的有限单元法”中首次提出有限单元法这一术语。有限单元法开始成为连续体离散化的一种标准研究方法。在有限单元法的初期发展阶段,人们是从直观概念出发进行探索,缺乏足够的理论基础,解决实际问题的范围比较窄,而且有时用得并不成功。

大概在1963年前后,经过贝塞林(J.F.Besseling 1963)、梅劳歇(R.J.Melosh 1963)、

约内士(R.E.Jones 1964)、格拉菲尔(R.H.Gallagher 1964)、卞学锁(T.H.H.Pian 1964)、维别克(B.Fraeijs de Veubeke 1964)等许多人的工作,认识到有限单元法就是变分原理里兹近似法的一种变型,发展了用各种不同变分原理导出的有限单元计算公式。1965年监凯维奇(O.C.Zienkiewicz)和张佑启(Y.K.Cheung)在求解拉普拉斯和泊松方程时发现只要能写成变分形式的所有场问题,都可以用和固体力学有限单元法的同样步骤求解。然而有限单元法的公式不一定要建立在变分原理的基础上,1969年斯查白(B.A.Szabo)和李(G.C.Lee)指出可以用加权余量法特别是迦辽金(Galerkin)法,导出标准的有限元过程来求解非结构问题。

由于人们可以自觉地依据各种变分原理建立有限单元法的算式,各种结构分析用的单元模式纷纷出现。与此同时,有限单元法的数学基础受到很大重视。求解大型线性方程组的数值方法和特征值问题的解法得到发展,子结构技术和模态综合技术得到采用,有限单元法的收敛性和误差分析也开始得到研究。随着计算机功能日益增强和有限单元法显示出解决工程实际问题的巨大威力,许多高等学校、研究机构和软件公司得到各工业部门(如航空、宇航、建筑、造船、汽车、石油等)的大量资助,陆续研制出各种通用有限元程序,进一步推动有限单元法的理论研究和实际应用。到八十年代初,国际上较大的结构分析通用有限元程序发展到几百种,其中著名的有:1.COSMIC/NASTRAN; 2.MSC/NASTRAN (大型综合有限元软件); 3.ASKA (大型综合通用有限元软件); 4.MARC (大型综合非线性有限元软件); 5.STRUDL; 6.GTSTRUDL (大型综合土木建筑结构分析有限元软件); 7.MODULEF (综合有限元分析模块库); 8.SAP-NONSAP (线性与非线性有限元通用软件); 9.ADINA (非线性结构分析通用软件); 10.ANSYS (有限元分析系统); 11.ABAQUS (线性与非线性有限元通用程序)。

上述有限元通用软件都采用FORTRAN语言编写,规模从几万条到几十万条语句,由几百到几千个子程序组成,数据文件结构和数据传递方式都较复杂,研制周期达几年,程序功能非常强。例如,可以对飞机、汽车、船舶整体结构进行静动力分析和稳定性分析,并考虑温度影响。可以对海洋平台整体进行大变形非线性分析。这些有限元通用软件大都带有前后处理程序包,能够自动剖分单元网格,显示和绘制网格结构图、变形图和应力图。这些功能使有限单元法计算前的数据准备和查错、计算后的数据处理比较方便。

由于有限元通用程序的广泛应用,力学计算工作逐渐从力学工作者手里解放出来,工程技术人员对工程结构的强度和刚度进行数值分析变得比较容易。通用有限元程序的计算结果已经成为各类工业新产品结构设计的可靠性依据。

从五十年代开始,我国力学工作者就对结构分析的近似计算方法很重视,为有限单元法的初期发展做出很多贡献,其中著名的有:陈伯屏(结构矩阵方法)、钱令希(余能原理)、钱伟长(广义变分原理)、胡海昌(广义变分原理)、冯康(有限单元法理论)等。文化大革命十年动乱期间,我国的研究工作受到阻碍。七十年代初期各单位根据工作的需要陆续编制过一些中小型有限元程序。1976年以后有限单元法的学习、使用和研究工作得到迅速发展。不少单位组织力量编制大中型通用有限元程序。著名的大型程序有:JIGFEX (结构分析程序,大连工学院工程力学研究所)和HAJIF-I、II、III (航空结构静力、动力、非线性分析程序系统,航空工业部623研究所等)。1979年后我国也从国外引进各种大中型通用程序,如SAP5、SAP6、SAP7、NONSAP、NFAP、ADINA、ASKA、MARC、ANSYS、AB-

AQUS、FEAP等，经过消化、推广和应用，在社会主义建设中已经发挥很大作用。有的经过改进提高后，形成新的功能更强的通用程序，如LISA程序、GAD程序系统、SAP5和SAP6微机程序、SAP84微机程序等。现在国内外学术交流频繁，各种先进的电子计算机比较普及，我国的有限单元法理论研究和构结分析程序研制应用正处于蓬勃发展的新时期。

目 录

绪论

第一章 杆系结构矩阵位移法

§1.1 概述	1
§1.2 平面桁架结构矩阵位移法	3
§1.3 空间杆单元计算及其程序实施	18
§1.4 平面刚架结构的梁单元计算	22
§1.5 空间梁单元计算及其程序实施	34

第二章 弹性体有限单元法初步

§2.1 弹性力学基本方程	52
§2.2 虚功原理	57
§2.3 平面应力和平面应变问题	59
§2.4 轴对称问题	73
§2.5 热应力问题	79
§2.6 几点补充	81

第三章 等参数单元

§3.1 二维形状函数	87
§3.2 三维形状函数	103
§3.3 数值积分	106
§3.4 二维等参数单元	113
§3.5 三维等参数单元	126
§3.6 八节点二维等参数单元计算的程序实施	133

第四章 总体刚度方程的形成和求解

§4.1 总体刚度方程的形成和位移边界条件的处理	153
§4.2 大型线性方程组的求解	158
§4.3 总刚矩阵的一维数组紧凑存储	167
§4.4 紧凑存储三角分解法及其程序实施	176
§4.5 子结构技术	183

第五章 弹性板弯曲

§5.1 薄板弯曲的基本方程	188
§5.2 矩形单元(部分协调)	183
§5.3 三角形单元(部分协调)	201
§5.4 三角形单元(协调)	298
§5.5 考虑剪切变形影响的曲边四边形单元(协调)	215

第六章 结构分析有限元程序 SAFEP

§6.1 程序概述	222
§6.2 程序结构	222
§6.3 程序使用	230
附录 SAFEP源程序	246

第七章 弹性结构动力学问题

§7.1 运动方程	267
§7.2 质量矩阵和阻尼矩阵	270
§7.3 弹性结构的无阻尼自由振动	275
§7.4 直接积分法	276
§7.5 振型叠加法	283

第八章 特征值问题解法

§8.1 引言	288
§8.2 广义雅可比法	289
§8.3 行列式搜索法	295
§8.4 子空间迭代法	308

参考文献

第一章 杆系结构矩阵位移法

§1.1 概 述

杆系结构矩阵位移法是采用结构力学位移法原理以及矩阵代数运算形成的。对于各种不同的杆系结构和载荷, 矩阵位移法的求解过程都可以写出统一的矩阵公式, 这种良好的规律性比较便于编制计算机程序。下面通过例题 1.1 来简介矩阵位移法的求解过程, 并建立有限单元法的初步概念。

例题1.1 如图 1.1 所示双跨连续梁, 两段梁的抗弯刚度 EI 、长度 L 都相同, 在支座 A 、 B 、 C 处分别受外力矩 m_A 、 m_B 、 m_C 的作用, 试计算连续梁在各支座处的转角和弯矩。

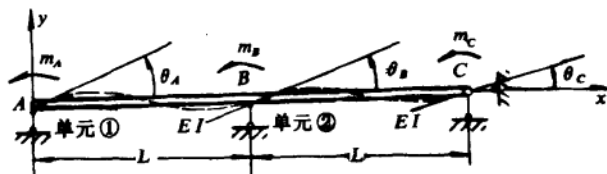


图1.1

解 第一步, 将图示连续梁在中间支座处截开, 分成两段梁。每一段梁称为一个单元。取图示 A 、 B 、 C 三个节点, 单元两端与节点相连。由于连续梁在小变形时可以忽略轴向变形, 并且节点都位于支座上, 没有横向位移, 因此节点位移只有转角一种。整个连续梁有三个节点转角 θ_A 、 θ_B 、 θ_C , 作为矩阵位移法的基本未知量。这一步骤称为单元剖分。

第二步, 建立梁单元杆端力与杆端位移的关系式 (称为单元刚度方程)。由于杆端位移是对应节点的节点位移, 杆端力是对应节点对杆端的作用力 (称为节点力), 一般将单元刚度方程称为单元节点力与节点位移的关系方程。值得指出, 此处讲的力和位移是广义的, 包括力矩和转角。

单元① (梁单元 AB) 的两端节点位移 (转角 θ_A 、 θ_B) 和节点力 (力矩 M_{AB} 、 M_{BA}) 如图 1.2 所示。由节点位移求节点力是一个单跨梁的二次超静定问题, 可以用材料力学方法求得

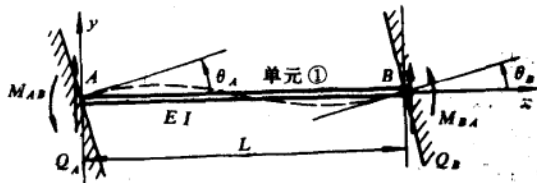


图1.2

$$M_{AB} = \frac{EI}{L} (4\theta_A + 2\theta_B)$$

$$M_{BA} = \frac{EI}{L}(2\theta_A + 4\theta_B)$$

式中节点力符号 M_{AB} 、 M_{BA} 的第一个脚标 A 或 B 表示该节点力作用的位置,全部脚标 AB 或 BA 表示该节点力所属的单元。上式用矩阵形式表示

$$\begin{Bmatrix} M_{AB} \\ M_{BA} \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \end{Bmatrix}$$

$$\{F^{(1)}\} = [k^{(1)}]\{q^{(1)}\} \quad (1.1)$$

简称为

称为单元①的单元刚度方程。

式中

$$\{F^{(1)}\} = [M_{AB} \ M_{BA}]^T$$

$$\{q^{(1)}\} = [\theta_A \ \theta_B]^T$$

$$[k^{(1)}] = \begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} \end{bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$\{F^{(1)}\}$ 称为单元节点力矢量, $\{q^{(1)}\}$ 称为单元节点位移矢量, $[k^{(1)}]$ 称为单元刚度矩阵, 它是一个对称矩阵

同理, 可得单元② (梁单元 BC) 的单元刚度方程

$$\{F^{(2)}\} = [k^{(2)}]\{q^{(2)}\} \quad (1.2)$$

式中

$$\{F^{(2)}\} = [M_{BC} \ M_{CB}]^T$$

$$\{q^{(2)}\} = [\theta_B \ \theta_C]^T$$

$$[k^{(2)}] = \begin{bmatrix} k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(2)} \\ k_{21}^{(2)} & k_{22}^{(2)} \end{bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

第三步, 形成连续梁的总体平衡方程组。在各个节点处, 相连单元的杆端对节点的作用力矩与该节点处的外力矩应该处于平衡状态, 而单元杆端对节点的作用力矩与节点对杆端作用的力矩 (即节点力) 大小相等、方向相反, 如图 1.3 所示。连续梁在各节点处的力矩平衡方程为



图1.3

$$\begin{cases} m_A = M_{AB} \\ m_B = M_{BA} + M_{BC} \\ m_C = M_{CB} \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} m_A \\ m_B \\ m_C \end{cases} = \begin{cases} M_{AB} \\ M_{BA} \\ 0 \end{cases} + \begin{cases} 0 \\ M_{BC} \\ M_{CB} \end{cases} \quad (1.3)$$

将单元刚度方程(1.1)和(1.2)扩大后代入上式, 得连续梁的总体平衡方程

$$\begin{Bmatrix} m_A \\ m_B \\ m_C \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} & 0 \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \\ \theta_C \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(2)} \\ 0 & k_{21}^{(2)} & k_{22}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \\ \theta_C \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} & 0 \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} + k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(2)} \\ 0 & k_{21}^{(2)} & k_{22}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \\ \theta_C \end{Bmatrix}$$

简称为

$$\{R\} = [K]\{U\} \quad (1.4)$$

称为总体刚度方程。

式中

$$\{R\} = [m_A \ m_B \ m_C]^T$$

$$\{U\} = [\theta_A \ \theta_B \ \theta_C]^T$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} & 0 \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} + k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(2)} \\ 0 & k_{21}^{(2)} & k_{22}^{(2)} \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$\{R\}$ 称为总体载荷矢量, $\{U\}$ 称为总体位移矢量。 $[K]$ 称为总体刚度矩阵, 它也是一个对称矩阵。

总体载荷矢量和总体位移矢量中各个元素是按节点 A 、 B 、 C 顺序排列的。总体刚度矩阵的各个元素是由有关单元刚度矩阵元素组成的。在总体刚度方程中, 总体位移矢量 $\{U\}$ 是待求的, 总体载荷矢量 $\{R\}$ 和总体刚度矩阵 $[K]$ 都是已知的。

第四步, 求解总体刚度方程(1.4), 得到总体位移矢量

$$\{U\} = [K]^{-1}\{R\} \quad (1.5)$$

第五步, 将求出的节点位移 θ_A 、 θ_B 、 θ_C 代入各个单元刚度方程, 就可以得到各个单元的杆端力矩, 即杆端弯矩 M_{AB} 、 M_{BA} 、 M_{BC} 、 M_{CB} 。

从上述例题可以看出, 矩阵位移法以节点位移作为基本未知量。由单元刚度方程得到用节点位移表示的杆端力, 再代入各个节点处力的平衡方程, 得到用节点位移表示的总体刚度方程组。在求解出节点位移后, 再从单元刚度方程求杆端力。

这里需要指出, 在例题 1.1 中建立单元刚度方程时已经考虑到节点处的支座约束条件, 因此形成的总体刚度方程满足连续梁的全部支座约束条件。

§1.2 平面桁架结构 矩阵位移法

桁架结构是由若干根直杆用理想铰将其端部相互联结而成, 并且外载荷都作用在铰节点上, 因此每根直杆都是两端铰接的二力杆, 只承受轴向力的作用。如果桁架结构的全部杆件轴线和外载荷作用线都位于同一平面内, 那么节点位移和

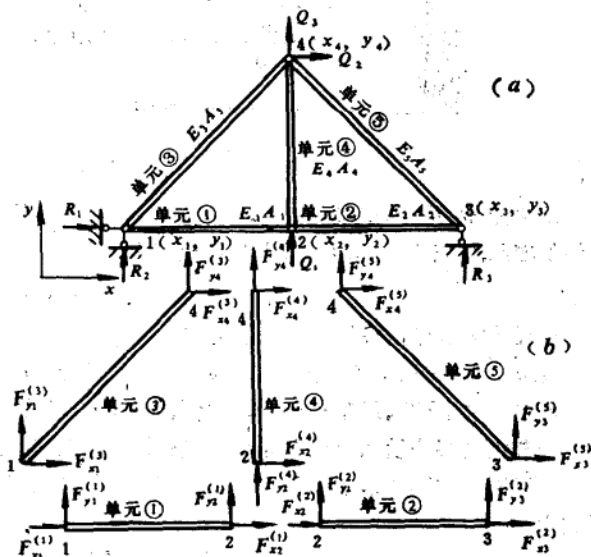


图1.4

节点力也将发生在该平面内, 这种桁架结构称为平面桁架结构。下面结合例题 1.2 详细介绍平面桁架结构的矩阵位移法。重点是求解方法的规律性, 我们只有弄清楚矩阵位移法的计算规律, 才能编制计算机通用程序。

例题 1.2 如图 1.4(a) 所示平面桁架结构。受给定节点载荷 Q_1, Q_2, Q_3 和未知反力 R_1, R_2, R_3 作用。已知各杆的截面积 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 和材料弹性模量 E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 。各节点的坐标分别是 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$ 。用矩阵位移法计算各节点的位移和各杆件的内力及应力。

1.2.1 单元划分

由于桁架结构是由若干根直杆铰接组成, 把两端铰接的直杆取为桁架单元是很自然的, 称为杆单元。它是二力杆, 只有轴向力作用。首先对桁架节点进行编号, 然后对杆件进行单元编号, 并记录单元两端的节点号。在例题 1.2 中单元①的两端节点号为 1、2, 单元②的两端节点号为 2、3, 单元③的两端节点号为 1、4, 单元④的两端节点号为 2、4 和单元⑤的两端节点号为 3、4, 见图 1.4(b)。

1.2.2 计算单元刚度方程

如何计算平面桁架结构中杆单元的单元刚度方程, 现以图 1.5 的杆单元为例来说明。

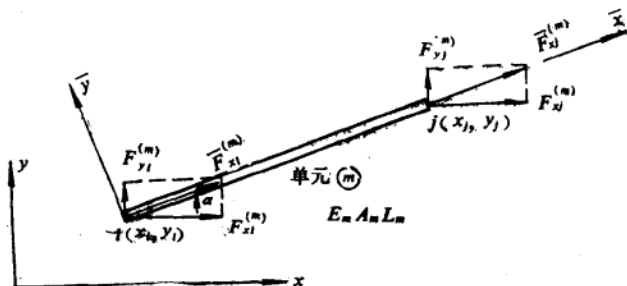


图 1.5

设单元①的杆端节点为 $i(x_i, y_i)$ 和 $j(x_j, y_j)$, 杆件截面积为 A_m , 材料弹性模量为 E_m 。杆件长度 L_m 可以由单元两端节点坐标值算出, 即

$$L_m = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \quad (1.6)$$

单元①的节点位移和节点力采用如下符号表示

u_i, v_i, u_j, v_j —— i 和 j 节点在 x, y 方向的位移分量,

$F_{xi}^{(m)}, F_{yi}^{(m)}, F_{xj}^{(m)}, F_{yj}^{(m)}$ —— i 和 j 节点在 x, y 方向的节点力分量。

若节点位移分量和节点力分量沿坐标轴 x, y 正向, 规定为正值, 反之为负值。

单元刚度方程, 即单元节点力矢量 $\{F^{(m)}\}$ 和单元节点位移矢量 $\{q^{(m)}\}$ 的关系式, 其矩阵形式为

$$\{F^{(m)}\} = [k^{(m)}] \{q^{(m)}\} \quad (1.7)$$

式中

$$\{F^{(m)}\} = [F_{xi}^{(m)} F_{yi}^{(m)} F_{xj}^{(m)} F_{yj}^{(m)}]^T$$

$$\{q^{(m)}\} = [u_i v_i u_j v_j]^T$$

$[k^{(m)}]$ 为单元刚度矩阵, 简称单元刚度矩阵。

通常先建立局部坐标系的单元刚度方程, 然后经过坐标变换得到总体坐标系的单元刚度方程。

一、局部坐标系的单元刚度方程

我们规定单元③的局部坐标轴为 $\bar{x}$ 、 $\bar{y}$, 参见图 1.5。令 $\bar{x}$ 轴位于单元③的轴线 ij 上, 方向由节点 i 指向节点 j 。 $\bar{y}$ 轴垂直于 $\bar{x}$ 轴, 指向按右手坐标系规定。单元③在局部坐标系中的节点力分量和节点位移分量 F_{xi} 、 F_{yi} 、 F_{xj} 、 F_{yj} , u_i 、 v_i 、 u_j 、 v_j 如图 1.6 所示。

由于杆单元仅受轴向力的作用, 并且单元③的轴线与局部坐标轴 $\bar{x}$ 重合, 所以

$$F_{yi} = 0 \quad F_{yj} = 0$$

单元③的轴向变形 $\Delta L_m = u_j - u_i$, 根据虎克定律得

$$F_{xi}^{(m)} = -\frac{A_m E_m}{L_m} \Delta L_m = -\frac{A_m E_m}{L_m} (u_j - u_i)$$

又由单元的力平衡关系可得

$$F_{xj}^{(m)} = -F_{xi}^{(m)} = \frac{A_m E_m}{L_m} (u_j - u_i)$$

上述四式用矩阵形式表达

$$\begin{Bmatrix} F_{xi}^{(m)} \\ F_{yi}^{(m)} \\ F_{xj}^{(m)} \\ F_{yj}^{(m)} \end{Bmatrix} = \frac{E_m A_m}{L_m} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix}$$

简写为

$$\{F^{(m)}\} = [k^{(m)}] \{q^{(m)}\} \quad (1.8)$$

式中

$$\{F^{(m)}\} = [F_{xi}^{(m)} \quad F_{yi}^{(m)} \quad F_{xj}^{(m)} \quad F_{yj}^{(m)}]^T$$

$$\{q^{(m)}\} = [u_i \quad v_i \quad u_j \quad v_j]^T$$

$$[k^{(m)}] = \frac{E_m A_m}{L_m} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

$\{F^{(m)}\}$ 、 $\{q^{(m)}\}$ 、 $[k^{(m)}]$ 分别是局部坐标系的单元节点力矢量、单元节点位移矢量和单元刚度矩阵。

二、总体坐标系的单元刚度方程

如何从求出的局部坐标系单元刚度方程 (1.8) 来得到总体坐标系单元刚度方程 (1.7) 呢, 这就需要进行坐标变换。

如图 1.7 所示, 任意一个矢量 $\bar{A}$ (节点位移矢量或节点力矢量) 在总体坐标系 x 、 y 轴方向的分量分别是 A_x 、 A_y , 而在局部坐标系 $\bar{x}$ 、 $\bar{y}$ 轴方向的分量分别是 $\bar{A}_x$ 、 $\bar{A}_y$ 。根据几何关系可知,

这两种坐标系的矢量分量的关系是

$$\bar{A}_x = A_x \cos \alpha + A_y \sin \alpha$$

$$\bar{A}_y = -A_x \sin \alpha + A_y \cos \alpha$$

式中, α 是从 x 轴到 $\bar{x}$ 轴的夹角, 逆时针转向为正值。用矩阵形式表示

$$\begin{Bmatrix} \bar{A}_x \\ \bar{A}_y \end{Bmatrix} = [t] \begin{Bmatrix} A_x \\ A_y \end{Bmatrix} \quad (1.10)$$

$$\text{式中} \quad [t] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

矩阵 $[t]$ 称为节点矢量的变换矩阵, 可以证明 $[t]$ 矩阵是一个正交矩阵, 即 $[t]^{-1} = [t]^T$ 。

利用 (1.11) 式可以将两种坐标系的节点力矢量或节点位移矢量相互变换。两种坐标系的单元节点位移矢量的变换关系是

图1.7

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \end{Bmatrix}$$

或简写为

$$\{q^{(m)}\} = [T] \{q^{(m)}\} \quad (1.12)$$

式中

$$[T] = \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

矩阵 $[T]$ 称为单元坐标变换矩阵, 它也是一个正交矩阵, 即 $[T]^{-1} = [T]^T$ 。

同理, 两种坐标系的单元节点力矢量的变换关系是

$$\{F^{(m)}\} = [T] \{F^{(m)}\} \quad (1.14)$$

将 (1.12)、(1.14) 式代入局部坐标系单元刚度方程 (1.8), 得

$$[T] \{F^{(m)}\} = [k^{(m)}] [T] \{q^{(m)}\}$$

或

$$\{F^{(m)}\} = [T]^T [k^{(m)}] [T] \{q^{(m)}\} \quad (1.15)$$

此处利用 $[T]$ 矩阵的正交性, 即 $[T]^{-1} = [T]^T$ 。对照 (1.7) 式, 可以得知总体坐标系的单元刚度矩阵为

$$[k^{(m)}] = [T]^T [k^{(m)}] [T]$$

$$= \frac{A_m E_m}{L_m} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

式中 $c = \cos \alpha = (x_j - x_i) / L_m$, $s = \sin \alpha = (y_j - y_i) / L_m$ 。

单元刚度矩阵在有限单元法中极为重要, 有必要进一步讨论它的力学意义和特性。总体坐标系的单元刚度方程 (1.7) 可以写成一般形式

$$\begin{Bmatrix} F_{x_i}^{(m)} \\ F_{y_i}^{(m)} \\ F_{x_j}^{(m)} \\ F_{y_j}^{(m)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^{(m)} & k_{12}^{(m)} & k_{13}^{(m)} & k_{14}^{(m)} \\ k_{21}^{(m)} & k_{22}^{(m)} & k_{23}^{(m)} & k_{24}^{(m)} \\ k_{31}^{(m)} & k_{32}^{(m)} & k_{33}^{(m)} & k_{34}^{(m)} \\ k_{41}^{(m)} & k_{42}^{(m)} & k_{43}^{(m)} & k_{44}^{(m)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} \quad (1.17)$$

展开成

$$\begin{aligned} F_{x_i}^{(e)} &= k_{11}^{(e)} u_i + k_{12}^{(e)} v_i + k_{13}^{(e)} u_j + k_{14}^{(e)} v_j \\ F_{y_i}^{(e)} &= k_{21}^{(e)} u_i + k_{22}^{(e)} v_i + k_{23}^{(e)} u_j + k_{24}^{(e)} v_j \\ F_{x_j}^{(e)} &= k_{31}^{(e)} u_i + k_{32}^{(e)} v_i + k_{33}^{(e)} u_j + k_{34}^{(e)} v_j \\ F_{y_j}^{(e)} &= k_{41}^{(e)} u_i + k_{42}^{(e)} v_i + k_{43}^{(e)} u_j + k_{44}^{(e)} v_j \end{aligned}$$

如果让 $u_i = u_i^*$ (给定值), 而使 $v_i = u_j = v_j = 0$, 则有

$$\begin{cases} F_{x_i}^{(e)} = k_{11}^{(e)} u_i^* \\ F_{y_i}^{(e)} = k_{21}^{(e)} u_i^* \\ F_{x_j}^{(e)} = k_{31}^{(e)} u_i^* \\ F_{y_j}^{(e)} = k_{41}^{(e)} u_i^* \end{cases} \quad (1.18)$$

如图 1.8 所示, 固定 i 节点 y 方向的位移和 j 节点 x, y 方向的位移, 而强迫 i 节点沿 x 方向产生位移 u_i^* , 那么在 i, j 节点上引起的节点力 $F_{x_i}^{(e)}, F_{y_i}^{(e)}, F_{x_j}^{(e)}, F_{y_j}^{(e)}$ 分别等于 $k_{11}^{(e)} u_i^*, k_{21}^{(e)} u_i^*, k_{31}^{(e)} u_i^*$ 和 $k_{41}^{(e)} u_i^*$, 见 (1.18) 式。由此可见, $k_{11}^{(e)}, k_{21}^{(e)}, k_{31}^{(e)}$ 和 $k_{41}^{(e)}$ 是单元节点力与位移 u_i^* 之间的刚度系数, 如同弹簧的刚度系数一样。

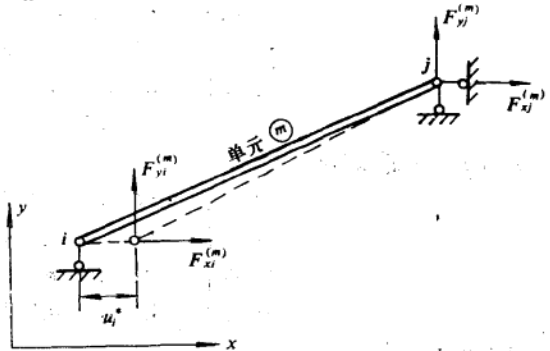


图 1.8

若取任意一个单元刚度矩阵元

素来讨论, 例如 $k_{31}^{(e)}$, 由 (1.17) 式可知, 在 $u_i = v_i = u_j = 0$ 和 $v_j = v_j^*$ 时, $F_{x_j}^{(e)} = k_{31}^{(e)} v_j^*$, 这说明 $k_{31}^{(e)}$ 是单元 e 在节点 j 的 x 方向抵抗位移 v_j^* 的刚度系数。

由于单元刚度矩阵各个元素的物理意义是刚度系数, 因此命名这个单元矩阵为单元刚度矩阵。单元刚度矩阵有二个特性:

1. 单元刚度矩阵是一个对称矩阵, 即 $k_{rs}^{(e)} = k_{sr}^{(e)}$, $r, s = 1, 2, \dots$ 。它可以由 (1.16) 式看出, 但这是一个普遍规律, 可以用结构力学的反力互等定律证明。

2. 单元刚度矩阵是一个奇异矩阵, 也就是说矩阵行列式等于零。如果把单元刚度矩阵 (1.16) 式的第三行元素分别加到第一行对应元素上, 则第一行元素全部变成零元素, 这证明单元刚度矩阵的行列式等于零。又如果把单元刚度矩阵的第四行元素分别加到第二行对应元素上, 第二行元素也将全部变成零元素。这是因为不论单元节点位移有多大, 单元节点力分量都将满足平衡关系

$$F_{x_i}^{(e)} + F_{x_j}^{(e)} = 0 \quad \text{和} \quad F_{y_i}^{(e)} + F_{y_j}^{(e)} = 0$$

所以有关二行各对应列元素之和为零值。

在例题 1.2 中, 将各个单元的数据 E, A, L, C, S 代入 (1.16) 式, 可以求得各个单元的单元刚度矩阵。为了以后讨论具有一般意义, 这里用符号表示各个单元刚度矩阵, 列出各个单元的单元刚度方程

单元①——节点 1, 2