大学生数学竞赛
及研究生入学考试辅导

主　编　桂文豪
副主编　邵吉光
参　编　何卫力
主　审　季文铎

机 械 工 业 出 版 社

本书是主要面对基础比较好的大学生、数学爱好者提高数学素质和技能，参加数学竞赛以及研究生入学考试的学习指导书。全书以专题形式论述，将相关知识放进一个专题，提高分析问题和解决问题的能力，开拓视野、活跃思路。

全书由极限、微积分中值定理、不等式、反向思考方法、重积分、曲线积分与曲面积分、级数、函数方程与微分方程、数学专题选讲、附录等章节组成。编写时力求应用性强，适用面广；文字简明通顺；加大信息量。本书不是历届竞赛题的简单解答，而是把重点放在阐述解题思路和方法上。

图书在版编目（CIP）数据

大学生数学竞赛及研究生入学考试辅导/桂文豪主编.
—北京：机械工业出版社，2002.6
ISBN 7-111-10360-2

Ⅰ.大…　Ⅱ.桂…　Ⅲ.①高等数学—高等学校—教学参考资料②高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料　Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 036132 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）
责任编辑：余茂祚
封面设计：陈　沛　责任印制：路　琳
中国建筑工业出版社密云印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行
2002 年 6 月第 1 版·第 1 次印刷
890mm×1240mm A5·6.5 印张·191 千字
0001－5000 册
定价：15.00 元

前言

本书是主要面对基础比较好的大学生、数学爱好者提高数学素质和技能，参加数学竞赛以及研究生入学考试的学习指导书。

大学生数学竞赛一直是各高校的一项重要的学术活动。它对于提高学生的数学技能和素质，选拔优秀人才起到了重要的作用。北京市、上海市、广东省、陕西省、浙江省、黑龙江省等全国大部分省市一直高度重视该项活动。

在编写本书时，我们注意到针对该项竞赛的辅导材料比较少，很多资料还停留在普通的高等数学辅导上面，读者对象也一般为大学成绩中等的学生。另外，许多资料只是将历届试题按年代次序给出参考解答，没有从方法角度进行阐述。这样有可能使学生陷进题海战术，得不到方法要领。为此，我们编写了这本辅导书。其目的是从方法的角度展现大学数学竞赛的内涵，以专题形式论述，将相关知识放进一个专题，让学生对该专题内容和方法有深刻的领悟；帮助学生总结解题规律，提高分析问题和解决问题的能力，开拓视野、活跃思路。

本书以专题的形式编写，例题解析中的题目一般都是比较典型的竞赛或研究生入学真题。自我检测题突出学生对该专题的理解和应用，通过做自我检测题，可使他们加深对知识的掌握。对于方法小结，力求系统阐述该专题知识的内在联系，从而有助于学生更好地巩固该专题的知识。

编写时力求应用性强，适用面广；文字简明通顺；加大信息量。本书不是历届竞赛题的简单解答，而是把重点放在阐述解题思路和方法上。

本书由北方交通大学桂文豪任主编，他提出了全书的总体构思及编写的指导思想和应注意事项。本书编写的具体分工如下，第 1 章、第 2 章、第 5 章、第 8 章由桂文豪编写；第 3 章、第 4 章、第 7 章、第 9 章由邵吉光编写；第 6 章、附录由何卫力编写。最后由桂文豪和

邵吉光统稿修订。

本书由北京市数学会季文铎教授主审，季老师一直负责北京市大学生数学竞赛的组织工作，他认真、仔细地审阅了全稿，并提出了许多宝贵的修改意见，对此表示衷心的感谢。

在本书的编写过程中，得到作者所在单位的大力支持和帮助，柳金甫教授、陈治中教授、管克英教授、张后扬教授、赵达夫教授、刘晓教授、付俐教授、修乃华教授等一直给予了具体的指导，吴海燕女士、刘颖女士也给予了很大的帮助。另外，机械工业出版社的研究员级高级工程师余茂祚编辑对本书的出版付出了很大的心血，在此一并表示感谢。

由于我们的水平有限，书中难免有缺点和不当之处，敬请专家、同仁和广大读者批评指正。

编　者

目　　录

第1章 极　　限

1.1 内容提要

极限是高等数学的基础，也是高等数学中比较困难的问题之一。主要的问题是求极限和证明极限的存在。

通常我们把极限分为数列极限和函数的极限。这两种极限，有深刻的内在联系，有许多类似的解决方法。

数列极限的定义，数列$\{x_n\}$以a为极限是指，对于$\forall\varepsilon>0$，存在正整数N，当$n>N$时，$|x_n-a|<\varepsilon$。可以用极限的定义来证明极限，这一般应找到最小的N，其方法主要有放大法，分步讨论法等。用定义证明极限存在，有一个前提条件，需要事先知道极限的值。但通常极限值不清楚，如何依据表达式求出极限，只能根据每道题进行分析。一般用得比较多的方法有，**初等变形、夹逼法则、单调有界法、定积分定义法、施笃兹(stolz)公式等**。

1.2 例题解析

例1 计算极限$\lim\limits_{m,n\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{i+j}}{i+j}$。

分析 可以将求和号后面内容写成定积分的形式，考虑级数部分和，利用积分性质和几何级数求和，并注意求和号次序的化简。

解 因为$\int_{-1}^{0}x^{i+j-1}\mathrm{d}x=-\frac{(-1)^{i+j}}{i+j}$，所以部分和

$$S_{m,n}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{i+j}}{i+j}=-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\int_{-1}^{0}x^{i+j-1}\mathrm{d}x$$

$$=-\sum_{i=1}^{m}(\int_{-1}^{0}x^{i+1-1}\mathrm{d}x+\int_{-1}^{0}x^{i+2-1}\mathrm{d}x+\cdots+\int_{-1}^{0}x^{i+n-1}\mathrm{d}x)$$

$$=-\sum_{i=1}^{m}\int_{-1}^{0}(x^{i}+x^{i+1}+x^{i+2}+\cdots+x^{i+n-1})\mathrm{d}x$$

$$=-\sum_{i=1}^{m}\int_{-1}^{0}\frac{x^{i}(1-x^{n})}{1-x}\mathrm{d}x$$

$$=-\sum_{i=1}^{m}\int_{-1}^{0}\frac{x^{i}-x^{i+n}}{1-x}\mathrm{d}x$$

$$=-\int_{-1}^{0}\frac{(x^{1}-x^{1+n})+(x^{2}-x^{2+n})+\cdots+(x^{m}-x^{m+n})}{1-x}\mathrm{d}x$$

$$=-\int_{-1}^{0}\frac{x^{1}+x^{2}+\cdots+x^{m}}{1-x}\mathrm{d}x+\int_{-1}^{0}\frac{x^{n+1}+x^{n+2}+\cdots+x^{n+m}}{1-x}\mathrm{d}x$$

$$=-\int_{-1}^{0}\frac{x-x^{m+1}}{(1-x)^{2}}\mathrm{d}x+\int_{-1}^{0}\frac{x^{n+1}-x^{n+m+1}}{(1-x)^{2}}\mathrm{d}x$$

下面先证明 $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_{-1}^{0}\frac{x^{t}}{(1-x)^{2}}\mathrm{d}x=0$，事实上，因为 $x\in[-1,0]$，所以 $(1-x)^{2}\geqslant 1$。$\int_{-1}^{0}\frac{x^{t}}{(1-x)^{2}}dx\leqslant\int_{-1}^{0}x^{t}\mathrm{d}x=\frac{(-1)^{t+2}}{t+1}\to 0$，当 $t\to+\infty$ 时。

于是，
$$\lim_{m,n\to+\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{i+j}}{i+j}=\lim_{m,n\to+\infty}S_{m,n}$$
$$=-\int_{-1}^{0}\frac{x}{(1-x)^{2}}\mathrm{d}x=\ln 2-\frac{1}{2}$$

例 2 设 $f''(x)$ 连续，且 $f''(x)>0$，$f(0)=f'(0)=0$，试求极限 $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\int_{0}^{u(x)}f(t)\mathrm{d}t}{\int_{0}^{x}f(t)\mathrm{d}t}$，其中 $u(x)$ 是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x,f(x))$ 处的切线在 x 轴上的截距。

分析 当 $x\to 0+$ 时，所求极限为 $0/0$ 型未定式，可考虑用洛必达法则，因此要对变上限的定积分函数求导，所以先要求出 $u(x)$ 及 $u'(x)$，进而可利用 $f(x),f'(x)$ 的泰勒公式求得极限。

解 由导数的几何意义，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x,f(x))$ 处的切线为 $Y-f(x)=f'(x)(X-x)$，求此切线在 x 轴上的截距。

令$Y=0$，则$X=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$

于是得到 $u(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$， $u'(x)=\dfrac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$ 又对于$f(x)$，由泰勒公式有

$$f(x)=f''(0)x^2/2+o(x^2),\quad f'(x)=f''(0)x+o(x)$$

所以$u(x)=x-\dfrac{\frac{1}{2}f''(0)x^2+o(x^2)}{f''(0)x+o(x)}\sim x-\dfrac{1}{2}x=\dfrac{1}{2}x \quad (x\to 0+)$

于是，$\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\int_0^{u(x)}f(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{f[u(x)]u'(x)}{f(x)}$

$$=\lim_{x\to 0+}\left[\frac{[\frac{1}{2}f''(0)u^2(x)+o(x^2)]}{f(x)}\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0+}\frac{[\frac{1}{2}f''(0)u^2(x)+o(x^2)]f''(x)}{[f''(0)x+o(x)]^2}$$

$$=\lim_{x\to 0+}\frac{[\frac{1}{2}f''(0)(\frac{x}{2})^2+o(x^2)]f''(x)}{[f''(0)x+o(x)]^2}=\frac{1}{8}$$

例 3 设$f(x,y)$是定义在区域$0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1$上的二元函数，$f(0,0)=0$，且在点$(0,0)$处$f(x,y)$可微，求极限

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\int_0^{x^2}\mathrm{d}t\int_x^{\sqrt{t}}f(t,u)\,\mathrm{d}u}{1-\mathrm{e}^{-x^4/4}}$$

分析 先对分子上的积分变换次序，然后用洛必达法则，再对分子用中值定理，化简后，再对分子使用二元函数的一阶泰勒公式，即可求出其极限。

解 交换积分次序

$$\int_0^{x^2}\mathrm{d}t\int_x^{\sqrt{t}}f(t,u)\,\mathrm{d}u=\int_0^x\mathrm{d}u\int_0^{u^2}f(t,u)\,\mathrm{d}t$$

从而原式$=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\int_0^x \mathrm{d}t\int_0^{u^2} f(t,u)\,\mathrm{d}t}{1-\mathrm{e}^{-x^4/4}}$

$$=-\lim_{x\to 0+}\frac{\int_0^{x^2} f(t,x)\,\mathrm{d}t}{x^3\mathrm{e}^{-x^4/4}}=\lim_{x\to 0+}\frac{x^2 f(\xi,x)}{x^3}$$

$$=-\lim_{x\to 0+}\frac{f(\xi,x)}{x},\qquad (0<\xi<x^2)$$

因为二元函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微，且 $f(0,0)=0$ 及 $0<\xi<x^2$，所以

$$f(\xi,x)=f(0,0)+f_x'(0,0)\xi+f_y'(0,0)x+o(\sqrt{\xi^2+x^2})$$

$$=f_y'(0,0)x+o(x)$$

故原式$=-\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{f_y'(0,0)x+o(x)}{x}=-f_y'(0,0)=-\dfrac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(0,0)}$

例 4 设 $f(x)$ 是在闭区间 $[a,b]$ 上非负的连续函数，且严格单调增加，由积分中值定理知，对任意的正整数 n，存在惟一的 $x_n\in(a,b)$，使 $[f(x_n)]^n=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b[f(x)]^n dx$

试求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，并证明你的结论。

分析 若设 $f(x)=x$，$[a,b]=[0,1]$，满足题目所给条件，不难计算出 $x_n\to 1(n\to\infty)$。因此可启发我们得出结论 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=b$，这种以特殊情况猜测一般结论再进行严格证明的方法在不少讨论性题目中是有用的。

证明 由所给等式易得

$$1=\frac{1}{b-a}\int_a^b\left[\frac{f(x)}{f(x_n)}\right]^n\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{b-a}\int_{\frac{x_n+b}{2}}^b\left[\frac{f(x)}{f(x_n)}\right]^n\mathrm{d}x$$

由于 $f(x)$ 单调增加，所以有

$$1\geqslant\frac{1}{b-a}\int_{\frac{x_n+b}{2}}^b\left[\frac{f(x)}{f(x_n)}\right]^n\mathrm{d}x\geqslant\frac{b-x_n}{2(b-a)}\left[\frac{f(\frac{x_n+b}{2})}{f(x_n)}\right]^n$$

从而 $b-x_n\leqslant 2(b-a)[\dfrac{f(x_n)}{f(\dfrac{x_n+b}{2})}]^n$

由于 $(x_n+b)/2\geqslant x_n$ 以及 $f(x)$ 单调增加，故 $\dfrac{f(x_n)}{f((x_n+b)/2)}\leqslant 1$。

于是我们可以推测 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=b$，但由于 $\dfrac{f(x_n)}{f((x_n+b)/2)}$ 和 n 有关，必须给出证明。下面用反证法证明。假设断言不成立，则存在 $\varepsilon_0>0$，存在 $\{x_n\}$ 的一个子数列 $\{x_{n_k}\}$ 和正整数 K，使得当 $k\geqslant K$ 时，就有 $b-x_{n_k}>\varepsilon_0$，如此就得到

$$1=\frac{1}{b-a}\int_a^b[\frac{f(x)}{f(x_{n_k})}]^n\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{b-a}\int_{b-\varepsilon_0/2}^b[\frac{f(x)}{f(x_{n_k})}]^{n_k}\mathrm{d}x$$

$$\geqslant\frac{\varepsilon_0}{2(b-a)}[\frac{f(b-\varepsilon_0/2)}{f(x_{n_k})}]^{n_k}\geqslant\frac{\varepsilon_0}{2(b-a)}[\frac{f(b-\varepsilon_0/2)}{f(b-\varepsilon_0)}]^{n_k}$$

由于 $f(b-\varepsilon_0/2)>f(b-\varepsilon_0)$，且此式在 k 充分大后与 k 无关，所以当 $k\to+\infty$ 时，$[\dfrac{f(b-\varepsilon_0/2)}{f(b-\varepsilon_0)}]^{n_k}\to+\infty$，得到 $1\geqslant+\infty$，矛盾，于是断言成立。

例 5 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}(\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2-2^2}+\cdots+\sqrt{n^2-(n-1)^2})$

分析 解这种类型的题一般有两种方法，一是用夹逼定理，二是化为定积分和式。本题求极限内容和定积分定义形式相近，可以试试化成定积分来求。

解 $S_n=\dfrac{1}{n^2}(\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2-2^2}+\cdots+\sqrt{n^2-(n-1)^2})$

$$=\frac{1}{n}[\sqrt{1-(\frac{1}{n})^2}+\sqrt{1-(\frac{2}{n})^2}+\cdots+\sqrt{1-(\frac{n-1}{n})^2}]$$

$$=\frac{1}{n}[\sqrt{1-(\frac{0}{n})^2}+\sqrt{1-(\frac{1}{n})^2}+\cdots+\sqrt{1-(\frac{n-1}{n})^2}]-\frac{1}{n}$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{1-(\frac{i}{n})^2}\cdot\frac{1}{n}-\frac{1}{n}$$

注意到$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\sqrt{1-(\frac{i}{n})^2}\cdot\frac{1}{n}$，所以有

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\pi/4$$

例 6 计算$\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+1}]$

分析 本题是夹逼定理和化定积分方法的结合，先用夹逼定理，而夹逼的左右两边再化为定积分的和式。

解 由于$\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+1}<\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+i/n}<\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n}$

所以 $$\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}<\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+i/n}<\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}$$

而 $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n})=\frac{\pi}{2}$$

于是由夹逼定理知原式极限为$\pi/2$。

例 7 设C为实数，函数$f(x)$满足下列两个等式，

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=C，\quad\lim_{x\to\infty}f'''(x)=0$$

求证：$\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=0$，$\lim\limits_{x\to\infty}f''(x)=0$

分析 在题设中给出一个函数二阶和二阶以上可导的条件时，应该先想到将该函数在某点处展开成泰勒公式。

证明 由泰勒公式有

$$f(x+1)=f(x)+f'(x)+\frac{1}{2}f''(x)+\frac{1}{6}f'''(\xi_1)\qquad x<\xi_1<x+1$$

$$f(x-1)=f(x)-f'(x)+\frac{1}{2}f''(x)-\frac{1}{6}f'''(\xi_2)\qquad x-1<\xi_2<x$$

将上面二式分别相加和相减得到

$$f''(x)=f(x+1)+f(x-1)-2f(x)+\frac{1}{6}f'''(\xi_2)-\frac{1}{6}f'''(\xi_1)$$

$$2f'(x)=f(x+1)-f(x-1)-\frac{1}{6}f'''(\xi_2)-\frac{1}{6}f'''(\xi_1)$$

当$x\to\infty$时，我们有$\xi_1\to\infty$，$\xi_2\to\infty$，于是

$$\lim_{x\to\infty}f''(x)=C+C-2C+\frac{1}{6}\times 0-\frac{1}{6}\times 0=0$$

$$\lim_{x\to\infty}2f'(x)=C-C-\frac{1}{6}\times 0-\frac{1}{6}\times 0=0$$

因此 $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=0$，$\lim\limits_{x\to\infty}f''(x)=0$

例 8 设函数$f(x)$在$(-L,L)$连续，在$x=0$可导，且$f'(0)\neq 0$，

（1） 求证：对于任意给定的$0<x<L$，存在$0<\theta<1$，使$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t=x[f(\theta x)-f(-\theta x)]$

（2） 求极限$\lim\limits_{x\to 0+}\theta$。

解 （1）设$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t$，则$F(0)=0$，$F(x)$在$[0,x]$可微，由拉格朗日中值定理得到

$$F(x)-F(0)=F'(\theta x)x,\ 0<\theta<1$$

即 $$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t=x[f(\theta x)-f(-\theta x)]$$

（2）由（1）可得

$$\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t}{2x^2}=\frac{f(\theta x)-f(-\theta x)}{2\theta x}\cdot\theta$$

令$x\to 0+$，由$f(0)$存在，且$f'(0)\neq 0$，得上式的

左端$=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{f(x)-f(-x)}{4x}=\dfrac{1}{2}f'(0)$

右端$=\lim\limits_{x\to 0+}[\dfrac{f(\theta x)-f(-\theta x)}{2\theta x}\cdot\theta]=f'(0)\lim\limits_{x\to 0+}\theta$

故 $\lim\limits_{x\to 0+}\theta=1/2$

例 9 设函数$f(x)$在$x=0$连续，求极限

$$\lim_{t\to 0+}\frac{1}{t^3}\iiint_{\Omega} f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V$$

其中$\Omega:\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant\sqrt{t^2-x^2-y^2}$。

分析 对于积分中被积函数或其主要部分为复合函数，可以考虑先做变量替换使之成为简单形式。本题极限是商的形式，可以想到用洛必达法则试试。

解 用球坐标变换计算

$$\iiint_{\Omega} f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^t f(r^2)r^2\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\int_0^t f(r^2)r^2\mathrm{d}r,$$

故 $$\lim_{t\to 0+}\frac{1}{t^3}\iiint_{\Omega} f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V=\pi(2-\sqrt{2})\lim_{t\to 0+}\frac{\int_0^t f(r^2)r^2\mathrm{d}r}{t^3}$$

$$=\frac{\pi(2-\sqrt{2})}{3}f(0)$$

例 10 设连续函数$f(x)$在$[1,+\infty)$单调减少，且$f(x)>0$，若$u_n=\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)\mathrm{d}x$，证明：当$n\to\infty$时，$u_n$的极限存在。

分析 证明极限存在方法有两种，一是推测出极限值，并证明该极限；二是可以考虑用单调有界必有极限定理，证明极限存在。另外出现在题设或解题过程中出现积分式时，可以试着用积分中值定理对积分式处理一下再说。

证明 $u_{n+1}-u_n=\sum_{k=1}^{n+1}f(k)-\sum_{k=1}^{n}f(k)$

$$-\int_1^{n+1}f(x)\mathrm{d}x+\int_1^n f(x)\mathrm{d}x=f(n+1)-\int_n^{n+1}f(x)\mathrm{d}x$$

$=f(n+1)-f(\xi)$，$\xi\in(n,n+1)$

因为$f(x)$在$[1,+\infty)$连续且单调减少，故由$n<\xi<n+1$得，$f(n+1)<f(\xi)$。从而 $u_{n+1}-u_n=f(n+1)-f(\xi)<0$，
即$\{u_n\}$是单调减少数列，

$$u_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(n) - \int_1^n f(x)\mathrm{d}x$$
$$= [f(1) - \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x] + \cdots + [f(n-1) - \int_{n-1}^n f(x)\mathrm{d}x] + f(n)$$
$$= [f(1) - f(\xi_1)] + \cdots + [f(n-1) - f(\xi_{n-1})] + f(n)$$

其中 $i < \xi_i < i+1\ (i = 1,2,\cdots,n-1)$，

据题设 $f(i) - f(\xi_i) > 0$， $f(n) > 0$，故 $u_n > 0$，即 $\{u_n\}$ 是单调减少有下界数列，故 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ 存在。

例 11 若 $a \leqslant f(x) \leqslant b$， $x \in [a,b]$ 且

$|f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|$，其中 k 为常数，且 $0<k<1$，设 $x_1 \in [a,b]$， $x_{n+1} = f(x_n)$， $n = 1,2,\cdots$，证明：

（1）存在惟一的 $x \in [a,b]$，使得 $x = f(x)$；

（2） $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$。

分析 证明存在性方法很多，一般来说，和函数有关的可以利用连续函数的介值定理，和导函数有关的可以利用中值定理。

证明 （1）由 $|f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|$ 知 $f(x)$ 连续，所以 $g(x) = f(x) - x$ 连续。

由于 $a \leqslant f(x) \leqslant b$， $x \in [a,b]$，所以

$g(a) = f(a) - a \geqslant 0$， $g(b) = f(b) - b \leqslant 0$，

由介值定理知道，$\exists\ x \in [a,b]$，使 $g(x) = 0$，即 $x = f(x)$。

若另有 $x_0 = f(x_0)$ 且 $x_0 \neq x$，则

$|x_0 - x| = |f(x_0) - f(x)| \leqslant k|x_0 - x| < |x_0 - x|$，矛盾。

这就说明，存在惟一的 $x \in [a,b]$，使得 $x = f(x)$。

（2） $|x_n - x| = |f(x_{n-1}) - f(x)| \leqslant k|x_{n-1} - x| \leqslant$

$k^2|x_{n-2} - x| \leqslant \cdots \leqslant k^{n-1}|x_1 - x|$，

$k<1$，令 $n \to \infty$，由夹逼定理得 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n - x| = 0$，

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - x) = 0$，即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$。

例 12 序列 $\{x_n\}$ 对一切 m 与 n 满足条件 $0 \leqslant x_{n+m} \leqslant x_n + x_m$，证明序列 $\{x_n / n\}$ 收敛。

分析 要证明这样一个序列是收敛的，关键是利用条件对 x_n / n

进行估计，找出极限，然后进行证明。

证明 首先，由题设条件知$0\leqslant x_n\leqslant nx_1$ $(n=1,2,\cdots)$，这样就有$\{x_n/n\}$是有界序列，设其下确界是$\alpha=\inf\{x_n/n\}$，显然$\alpha\geqslant 0$。

下面，我们证明α就是其极限。

任给$\varepsilon>0$，则存在正整数m，使得$\alpha\leqslant x_m/m<\alpha+\varepsilon/2$，对任一自然数$n$，将其表成$n=qm+r$，其中$r$是小于$m$的非负整数，由条件知，$x_n=x_{qm+r}\leqslant qx_m+x_r$

从而有

$$\frac{x_n}{n}\leqslant\frac{qx_m+x_r}{qm+r}=\frac{x_m}{m}\cdot\frac{qm}{qm+r}+\frac{x_r}{n}$$

故有（当n很大时）

$$-\frac{\varepsilon}{2}+\alpha\leqslant\frac{x_n}{n}<(\alpha+\frac{\varepsilon}{2})\cdot\frac{qm}{qm+r}+\frac{x_r}{n}\leqslant\alpha+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{x_r}{n}$$

因为$0\leqslant r\leqslant m-1$，在上式中令$n\to\infty$，则有

$$\alpha-\varepsilon/2\leqslant x_n/n\leqslant\alpha+\varepsilon/2$$

又因ε的任意性，则得$\lim\limits_{n\to\infty}x_n/n=\alpha$。

例 13 设$\{x_n\}$是非负数列，满足$x_{n+1}\leqslant x_n+1/n^2$，$n=1,2,\cdots$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在。

分析 如果数列收敛，其极限是数列的确界，易知数列$\{x_n\}$有界，其确界存在，可以证明数列的确界是数列的极限。

证明 因为$0\leqslant x_{n+1}\leqslant x_n+1/n^2\leqslant x_1+\sum\limits_{k=1}^{\infty}1/k^2$，$n=1,2,\cdots$，

所以数列$\{x_n\}$的下确界是存在的，令其下确界为α，则对任意给定的$\varepsilon>0$，存在正整数$N>0$，使得当$n\geqslant N$时，有

$$\sum_{k=N}^{\infty}1/k^2<\varepsilon/2,\quad x_n-\alpha>-\varepsilon/2,\ \text{且}\ x_N-\alpha<\varepsilon/2$$

对于任意正整数m，有

$$\begin{aligned}&-\varepsilon/2<x_{N+m}-\alpha=x_{N+m}-x_N+x_N-\alpha\\&=(x_{N+m}-x_{N+m-1})+\cdots+(x_{N+1}-x_N)+(x_N-\alpha)\\&<1/(N+m-1)^2+\cdots+1/N^2+\varepsilon/2<\varepsilon\end{aligned}$$