複變函數

江澤堅 著

人民教育出版社出版

複變函數

江澤堅著

人民教育出版社出版

書號：3017
複變函數

著　者：江　澤　堅
裝幀者：陳　聖　西
出版者：人民教育出版社
印刷者：新華印刷廠北京第一廠
發行者：新　華　書　店

1—4,000　　1951年8月原　版
定價10,400元　　1951年9月北京初版

序

本書正文共分十章. 第一章是一批專爲以下各章而設的預備知識. 第二章至第九章可視爲 Cauchy 理論的介紹. 第十章是 Weierstrass 理論的介紹. 學者在讀完這十章後, 可以大略知道這門學問的基礎.

Cauchy 積分公式與 Montel 定理是本書中兩個最重要的工具, 學者應特別注意. 若干有用的或者有趣的結果, 因爲節省時間而收入習題內, 希望學者不要忽視它們.

本書曾在清華大學數學系試用兩次. 假如每週上課三小時, 根據個人經驗, 可以在十八週內將前十章講完. 附錄則可備學者在假期中自習.

最後, 作者要利用這個機會向莊圻泰教授致謝. 他不憚煩瑣爲作者校訂全部原稿, 指出許多不妥的地方, 使原稿得到很大的改進. 在接洽出版及印刷過程中, 承段學復教授, 孫樹本教授, 汪志華先生給予很多幫助. 作者謹於此誌謝.

一九五一年八月江澤涵序於清華園

目　　錄

第一章　平面上的點集

第二章　單值複變函數的連續性及其微商

第三章　連續函數之積分

第四章　Cauchy 積分定理

第五章 Cauchy 積分公式

第六章 變項級數與一致收斂性

第七章 正規解析函數的展開式

第八章　孤立奇點

第九章　殘數與積分

第十章　解析開拓

附錄　正規解析函數的幾何性質

第一章 平面上的點集

§1. 集 合

“集合”(set)這個概念不僅是數學上最基本的概念，就在普通談話裏，我們也時常引用到或者意識着的，不過一般人沒有仔細考慮它而已．在數學上，一個集合並不就是一堆可以陳列出來指給人看的東西，而是適合某些條件的所有事物．因此我們談到某個集合 A 的時候，事實上就有一個條件 p 在邊上．滿足條件 p 的事物，才叫做屬於 A 的“元素”(element)；或者說 A 是由滿足條件 p 的事物組成的[1]．舉個例來說，所有的等腰三角形就做成一個集合；確定這個集合的條件是“有兩個邊相等的三角形”.

從上面的話，我們大概可以知道集合是怎麼回事．不過我們要注意，確實有些條件存在，任何事物都不能滿足它；例如“腰的長爲 1，底邊的長大於 2 的等腰三角形”，就是這樣的一個條件．如此條件所確定的集合稱爲“虛無集合”(null-set).

爲方便計，以後我們把“a 屬於 A”這句話簡寫爲“$a \in A$”.

集合 A 的元素如若都是集合 B 的元素，我們說 A 是 B 的“部分集合”(subset)，用符號表爲 $A \subseteq B$.

假如 $A \subseteq B, B \subseteq A$ 我們就說 $A = B$.

---

[1] 這兒我們要注意．並不是對於任何思維的對像，都能問他是否爲某集合中的元素．例如：一個集合是否爲其自身的元素，就是這類問題中的一個．針對着這類問題，數理邏輯家創立了“層次論”(theory of types).

若集合 A 與 B 依次為條件 p_1 及 p_2 所確定，則"p_1 或 p_2"這個條件確定一個集合，我們以符號 $A+B$ 表示它．顯然

$$A+B \supseteq A, \qquad A+B \supseteq B.$$

若集合 A 與 B 依次為條件 p_1 及 p_2 所確定，則以 $A-B$ 表示由條件"p_1 而非 p_2"所確定的集合，以 AB 表示由條件"p_1 而且 p_2"所確定的集合．

若有一對應關係，於任一自然數 n，恰有某集合中的一個元素 Z_n 與之對應，則稱

$$Z_1, Z_2, Z_3, \cdots, Z_n, \cdots$$

為某集合中的一串元素，或簡稱為某集合中的一"叙列"(Sequence)，通常以符號 $\{Z_n\}$ 表示它．

叙列這個概念並不難懂，不過我們要注意，叙列並不就是集合．例如：

$$1, 2, 1, 2, \cdots$$

與

$$2, 1, 2, 1, \cdots$$

都是由 1, 2 兩個元素構成的集合．因此它們都是相等的"有窮集合"(finite set)，但是它們與自然數間的對應關係並不一樣，所以是不同的叙列．

若 $\{Z_n\}$ 為一叙列，$\{n_i\}$ 為一串自然數，且 $n_i < n_{i+1}$，則 $\{Z_{n_i}\}$ 亦為一叙列，其與自然數間的對應關係為 $f(i) = Z_{n_i}$．叙列 $\{Z_{n_i}\}$ 稱為 $\{Z_n\}$ 的"子叙列"(sub-sequence)．

集合 A 與集合 B 之間若有一種關係，適合於下列條件：

(i) 於 A 中任意一個元素 a，在 B 中恰有一個元素 b（所謂

恰有一個，就是有一個而且只有一個的意思)，a 與 b 發生此種關係. b 稱爲 a 的對應元素.

(ii) 於 B 中任意一個元素 β, 在 A 中恰有一個元素 α, β 是 α 的對應元素.

則稱 A 與 B "等價" (equivalent).

假定大家很明白自然數的性質，我們來看下面的定義和定理.

定義 1. 於集合 E, 假如有自然數 n, E 與所有小於或等於 n 的自然數的集合等價，我們就說 E 是一個有窮集合；並且說它包含 n 個元素. 虛無集合也稱做有窮集合.

定義 2. 假如 E 不是有窮集合，E 稱爲無窮集合.

定義 3. 與全體自然數等價的集合，叫做 "可數集合"(enumerable set).

定理 1. 設

1) E 爲可數集合，

2) $E \supseteq A$,

3) A 是一個無窮集合，

則 A 爲可數集合.

[證明] 因爲 E 是可數集合，故 E 的任一元素 e, 恰與一個自然數 n 對應，爲方便計，我們說 n 是元素 e 的番號.

A 既然是 E 的部份集合，自然 A 的每個元素都帶有番號，取其番號之最小者爲 a_1.

根據第三條假設，集合 A 裏面 a_1 以外的元素一定是存在的，取其番號之最小者爲 a_2.

一般說來，若 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 已經確定，則在 A 中於 $a_1, a_2, \cdots,$

a_n 以外擇其番號之最小者爲 a_{n+1}; 從算學歸納原理,於任一自然數 m 就恰有一 A 中的元素 a_m 與之對應.

設 α 屬於 A, 其番號爲 j; 顯然屬於 A 而番號小於 j 的元素最多是 $j-1$ 個. 假定它們的總數是 i, 從上面所說的對應法則, α 應該就是 a_{i+1}. 因此 A 裏面的任一元素, 恰與一個自然數相對應, 故 A 爲可數集合.

平面上坐標是自然數的點組成一個集合 I, 現在來證明下列定理.

定理 2. I 是可數集合.

［證明］ I 裏面任意兩個元素 $(i,k),(m,n)$ 的次序可以如此規定, 若 $i+k<m+n$, 則 (i,k) 在 (m,n) 的前面; 若 $i+k=m+n$ 且 $i>m$, 則 (i,k) 在 (m,n) 的前面, 根據這個排法, 集合 I 就排成如下的一列數：

$$(1,1),(2,1),(1,2),(3,1),(2,2),(1,3),\cdots$$

故 I 是可數集合. 事實上這個對應關係可以確切的說出來, (m,n) 恰對應於自然數 $\frac{1}{2}(m+n-1)(m+n-2)+n$.

定義 假設條件 p_n 確定集合 $E_n(n=1,2,3,\cdots)$, 假如對於元素 a, 有自然數 n, a 適合條件 p_n, 我們就說 a 適合條件 p; 而且只於這種情況下才說 a 適合條件 p, 則由 p 所確定的集合就稱爲 $\{E_n\}$ 這串集合的和, 用符號 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}E_n$ 來表示它.

從定理 2 我們容易推出下面的結果

定理 3. 設 $E_1,E_2,E_3,\cdots,E_n,\cdots$ 都是可數集合, 則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}E_n$ 也是可數集合.

定理 . 全體有理數組成一個可數集合.

定理 5. 平面上坐標是有理數的點組成一個可數集合.

定理 6. n 維歐氏空間中坐標是有理數的點組成一個可數集合 R_n.

定理 7. $\sum_{n=1}^{\infty} R_n$ 是一個可數集合.

習題 假設係數爲整數的多項式所組成的集合是 E; 求證 E 是可數集合; 從而證明所有的"代數數" (algebraic number) 組成一個可數集合.

§2. 實數域

在代數學上有所謂"域" (field) 的概念, 如某域中諸元素之間有一未予界說的關係, 此種關係的符號是 "$<$", 具有下述性質:

(i) 如 $a<b$, 則 $a \neq b$.

(ii) 如 $a \neq b$, 則 $a<b$ 或 $b<a$.

(iii) 如 $a<b$ 且 $b<c$, 則 $a<c$.

(iv) 如 $a<b$, 則 $a+c<b+c$.

(v) 如 $0<a$ 且 $0<b$, 則 $0<ab$.

則稱此域爲"可序域" (ordered field).

可序域中又有所謂"完全可序域" (complete ordered field), 亦即可序域之適合下列公設者.

完備公設. 若

(1) $a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq \cdots \leqq a_n \leqq a_{n+1} \leqq \cdots$

(2) 有域中之元素 M,

$$a_n \leqq M \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

則 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在.

所有有理數構成一個可序域,全體實數也構成一個可序域;二者之間的差別, 就在前者非完全可序域, 而後者是完全可序域.普通教本上所說的 "Dedekind 分割" (Dedekind's cut) 或者 Cantor "基本敘列" (fundamental sequence), 不過是爲着說明確實有一個完全可序域存在;從而指出完備公設與可序域的公設之間沒有矛盾. 因此我們可以忘記 Dedekind 分割學說中的細節,但是決不可以忘記全體有理數與全體實數之間的重要差別,在於完備公設.

定理 1 若

1) $[a_n, b_n]$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 爲直線上一串"封閉的隔間" (closed interval),

2) $[a_n, b_n] \supseteq [a_{n+1}, b_{n+1}] \qquad (n=1,2,3,\cdots)$,

3) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$.

則恰有一點屬於所有的隔間.

[證明] 顯然

$$a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq \cdots \leqq a_n \leqq a_{n+1} \leqq \cdots \leqq b_1,$$

$$b_1 \geqq b_2 \leqq b_3 \geqq \cdots \geqq b_n \geqq b_{n+1} \geqq \cdots \geqq a_1.$$

從完備公設,知道 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 存在. 根據第三條假設,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c.$$

但 $a_n \leqq c \leqq b_n$, 故 c 屬於每一個隔間.

如有兩個相異的點屬於所有的隔間，則由這兩點所確定的隔間，也一定屬於所有的隔間，這與第三條假設衝突，因此只可能有一個點屬於所有的隔間

§3. 複數域

嚴格說來，一個複數應該就是一對有次序的實數；例如 (x,y). 其間的加，乘與相等的關係是

$$(x,y)+(x^*,y^*)=(x+x^*,y+y^*),$$
$$(x,y)\times(x^*,y^*)=(xx^*-yy^*,x^*y+y^*x),$$
$$(x,y)=(x^*,y^*),\qquad \text{只於 } x=x^*,y=y^* \text{ 時}.$$

而普通所謂虛數 i, 就是 $(0,1)$.

全體複數顯然也形成一個代數學上所謂的域，但是它和實數域不同，它不是一個可序域．因爲如果它是可序域，則於 i, $(0,0)$ 這兩個不相等的數，必定 $(0,0)<i$, 或者 $i<(0,0)$. 假定是第一種情形，由前節性質 v, $(0,0)<i^2$, 亦即 $(0,0)<(-1,0)$. 再用性質 v, 得到 $(0,0)<(1,0)$. 據性質 iv, 從 $(0,0)<(-1,0)$, 可以知道 $(1,0)<(0,0)$. 於是由性質 iii 就推出 $(0,0)<(0,0)$, 這與性質 i 相抵觸．同樣從 $i<(0,0)$, 我們也得到矛盾的結果．因此複數域不是可序域．

習慣上，我們常把一個複數 z 寫成 $x+iy$ 的形式．其中 x 稱作 z 的實數部分，y 稱作 z 的虛數部分．若引用 Weierstrass 的符號，即

$$x=\Re z,\quad y=\Im z.$$

假如我們讓複數 $x+iy$ 對應於坐標爲 (x,y) 的點，則全體複

數與平面上所有的點一一對應. 由於平面解析幾何學上兩點間距離的公式, 我們說複數 $z=x+iy$ 的絕對值 $|z|$ 是 $\sqrt{x^2+y^2}$, 從而於複數 z_1, z_2, z_3 之間有下列不等式,

$$|z_1-z_2| \leqq |z_1-z_3|+|z_2-z_3|$$

特別於 $z_3=0$ 時, 有

$$|z_1-z_2| \leqq |z_1|+|z_2|.$$

通常我們以符號 $\bar{z}$ 代表複數 $z=x+iy$ 的共軛複數 $x-iy$. 顯然 (x,y) 與 $(x,-y)$ 對於 x-軸而言是對稱的. 又

$$|z|^2=z\bar{z},$$

這個式子在實際計算上很有些好處, 我們應該注意到它.

利用矩形坐標與極坐標間的變換關係,

$$x=r\cos\theta, \qquad y=r\sin\theta$$

我們立刻就將複數 $z=x+iy$ 寫成,

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta),$$

此處 $r=|z|, -\pi<\theta\leqq\pi$. 此後我們稱 θ 為 $\arg z$. 令 $\operatorname{cis}\theta$ 代表複數 $\cos\theta+i\sin\theta$. 由著名的 De Moivre 定理,

$$\operatorname{cis}(\theta_1+\theta_2)=\operatorname{cis}\theta_1\cdot\operatorname{cis}\theta_2, \qquad (\operatorname{cis}\theta)^n=\operatorname{cis}(n\theta);$$

從而於複數 $z_1=r_1\operatorname{cis}\theta_1$ 及 $z_2=r_2\operatorname{cis}\theta_2$ 有,

$$z_1z_2=r_1r_2\operatorname{cis}(\theta_1+\theta_2), \qquad z_1^n=r_1^n\operatorname{cis}(n\theta_1).$$

最後我們似乎應該提到這樣的一個問題: 複數域除了非可序域這一點之外, 它與有理數域及實數域還有什麼重要差別呢? 答覆是: 在於複數域的"代數封閉性"(algebraically closed), 即任意

係數爲複數的 n 次多項式，恰有 n 個複數根．這個重要事實的證明，我們不久就可以利用函數論上的知識得到．

習題 1 由不等式 $\left|\frac{1}{z}\right| < d\ (d > 0)$ 所確定的集合是什麽？由等式 $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| = 2$ 所確定的集合是什麽？

習題 2 由不等式 $\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| \lesseqgtr 1\ (|a| < 1)$ 所確定的集合是什麽？

習題 3 設 $z = r\operatorname{cis}\theta$，求證：

$$\Re\frac{1+z}{1-z} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}.$$

習題 4 假設 $0 < a_0 < a_1 < \cdots < a_n$，求證方程式

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

的根全在集合 $|z| > 1$ 之內．

習題 5 設

(1) $p_0, p_1, p_2, \cdots p_n$ 都是正數，

(2) $\alpha = \min\left(\frac{p_1}{p_0}, \frac{p_2}{p_1}, \cdots, \frac{p_n}{p_{n-1}}\right), \beta = \max\left(\frac{p_1}{p_0}, \frac{p_2}{p_1}, \cdots, \frac{p_n}{p_{n-1}}\right)$ ❶

求證方程式

$$p_0 z^n + p_1 z^{n-1} + \cdots + p_n = 0$$

之根全在集合 $\alpha \leqq |z| \leqq \beta$ 內．

習題 6 設 $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$；令 A 代表平面上的

---

❶ $\min(r_1, r_2, \cdots, r_n)$ 表示 $r_1, r_2, \cdots, r_n$ 中的最小者，$\max(r_1, r_2, \cdots, r_n)$ 表示 $r_1, r_2, \cdots, r_n$ 中的最大者．