美国大学生

数学竞赛题解

上

mei guo da xue sheng shu xue jing sai ti ji

美国大学生
数学竞赛题解

〔上〕

上海师范学院　数学系

张永祺　陈国钧
卢亭鹤　杨有锠　译

甘肃人民出版社

摘自美国数学月刊

1961——1968

《The American Mathematical Monthly》

美国大学生数学竞赛题解

〔上〕

上海师范学院数学系

张永祺　陈国钧
卢亭鹤　杨有锢　译

甘肃人民出版社出版

（兰州庆阳路230号）

甘肃省新华书店发行　兰州新华印刷厂印刷

开本787×1092　1/32　印张3.375　字数70,000

1981年9月第1版　1981年9月第1次印刷

印数：1—5,000

书号：13096·67　定价：0.30元

译 者 的 话

美国大学生数学竞赛的全名是：威廉·洛威尔·普特南数学竞赛(The Willian Lowell Putnam Mathematical Competition)。

威廉·洛威尔·普特南，曾任美国哈佛大学校长，于1933年退休。当普特南去世后，按他的遗嘱指定拨款，作为数学竞赛的基金。自从1938年首次举行普特南数学竞赛以来，受到人们的普遍重视，激起许多青年人对数学的爱好和兴趣，同时也发现了不少人材。

普特南数学竞赛由美国数学协会（MAA）负责管理，这就保证了竞赛的连续性和一致性。在历次竞赛中强调了“赛能力”，不强调“赛课程”，而且赛题严格控制在大学的基础课范围内。

本书是从《美国数学月刊》（The American Mathematical Monthly）1961—1968年各期刊载的普特南数学竞赛题解摘译过来的。其中有一部分试题和题解是我国中学生可以看懂的；大部分试题和题解对大学低年级学生是可以掌握的。虽然，历届试题难度较高，但对我国大、中学生和教师以及从事数学研究工作的广大读者都是一份较好的参考读物。

译 者

目　录

第 18 届

威廉·洛威尔·普特南数学竞赛

（1958年2月8日举行）

译自 L.E. Bush 的总结，载于
1961年1月号《美国数学月刊》

第一部分试题

1. 若a_0，a_1，…，a_n为实数，并满足

$$\frac{a_0}{1}+\frac{a_1}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=0$$

求证方程$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0$至少有一个实根。

2. 两个均匀而半径相等的实心球上下叠放。底下的是固定的，上面的球由静止开始滚下来。问两球在哪一点上脱离接触？假设其摩擦系数使得不会出现滚动。

3. 从区间($0\leqq x\leqq 1$)中随便地选取实数．如果在选取了第n个数后，这样选出的数之和首次超过1，求证：对于n的期望值或平均值等于e。

4. 若a_1，a_2，…，a_n是复数，并且

$$|a_1|=|a_2|=\cdots=|a_n|=r\neq 0,$$

又用${}_nT_s$表示从这n个数中每次取s个的所有乘积之和，求证

$\left|\dfrac{{}_nT_s}{{}_nT_{n-s}}\right| = r^{2s-n}$，只要左边的分母不为零时就成立。

5. 证明积分方程

$$f(x,y)=1+\int_0^x\int_0^y f(u,v)\,du\,dv$$

至多有一个在$0\leqq x\leqq 1$，$0\leqq y\leqq 1$连续的解。

6. 按每年复利率为i计算，问最小的投资额应为多少方能在第1年年终提取1元，在第2年年终提取4元，…，在第n年年终提取n^2元，且永远继续提下去？

7. 有10个大小相等的正方形放在同一平面上，且任意两个皆无公共内点，证明第一个正方形不可能与另外的9个都接触。

第 二 部 分 试 题

1. (a)已知线段A,B,C,D，其中A为最长。在可能情况下，以它为边求作一个四边形，且使A和B平行。

(b)已知一个任意锐角三角形ABC和一条高AH，在AH上任取一点D，然后，引BD并延长与AC相交于E。引CD并延长与AB相交于F。求证：$\angle AHE=\angle AHF$

2. 证明4个相邻正整数的乘积不可能是一个完全平方或完全立方数。

3. 在由n个选手参加的一次循环赛中（每对选手赛一场），假设在比赛中没有平局，各选手得胜的次数是$S_1,S_2,\cdots,S_n$。求证：在三个选手A、B、C中，A胜B，B胜C，C胜A的情况存在的充要条件是

$$S_1^2+S_2^2+\cdots+S_n^2<(n-1)(n)(2n-1)/6.$$

4. 在一个半径为 1 的球面上，问两点间的平均直线距离是多少？

5. 在一个平面上给出无穷多个点，证明：假如每两点间的距离都是整数，则所有的点都在一条直线上。

6. 一个抛射体在阻力介质中运动。此阻力是速度的一个函数，并且阻力的方向是沿着速度向量的方向。方程 $x=f(t)$是以时间t来表示的水平距离。证明：垂直距离y是由下式给出

$$y=-gf(t)\int\frac{dt}{f'(t)}+g\int\frac{f(t)}{f'(t)}dt+Af(t)+B,$$

式中A和B为常数，g是重力加速度。

7. 求证：假如$f(x)$在$a\leqq x\leqq b$上连续，而且对于$n=0$，1，2，…有$\int_a^b x^n f(x)dx=0$，则$f(x)$在$a\leqq x\leqq b$上恒等于零。

第一部分试题解答

1. 令$f(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{a_i x^{i+1}}{i+1}$。则有$f(0)=f(1)=0$，应用中值定理对于某个满足 $0<\theta<1$ 的实数θ 有$f'(\theta)=0$。因此$\sum\limits_{i=0}^{n}a_i x^i=0$ 有一实根。

2. 设M为滚动球的质量和r为其半径。取固定球的球心作为坐标原点，设$R(\theta)$为滚动球球心的位置矢量，其中θ是在

$R(\theta)$与过原点的向上铅垂线之间的夹角。显然，当滚动发生时，$R(\theta)$始终保持在一个铅垂面内。离心力是$2Mr\dot{\theta}^2$，其中$\dot{\theta}=\frac{d\theta}{dt}$。指向原点的重力分量是$Mg\cos\theta$。当$2Mr\dot{\theta}^2$正好超过$Mg\cos\theta$时，两球分离，这就是说，当$2r\dot{\theta}^2=g\cos\theta$时，分离时刻就到了。位能的损失是$2rMg(1-\cos\theta)$，并且它必须等于总动能，而总动能是平移能量$2Mr^2\dot{\theta}^2$加上转动能量$\frac{4}{5}Mr^2\dot{\theta}^2$。因此，$\dot{\theta}^2=5g(1-\cos\theta)/(7r)$，于是，分离发生在$\cos\theta=\frac{10}{17}$的时候。

3. 设 $P_n(x)=Pr(\sum_{i=1}^{n}x_i<x)$。

则 $P_{n+1}(x)=\int_0^x(x-y)dP_n(y)=\int_0^x P_n(y)dy$。

因为$P_1(x)=x$，从而得出$P_n(x)=\frac{x^n}{n!}$。

在第$n+1$次选取时要求和首次超过1的概率是

$$Q_{n+1}=\int_0^1 y\,d\,P_n(y)=\int_0^1\frac{y^n}{(n-1)!}\,dy=\frac{n}{(n+1)!}.$$

因此 $\overline{n}=\sum_{n=2}^{\infty}nQ_n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}=e$。

4. 设$a_j=r\exp(\theta_j)$，$j=1,2,\cdots,n$。

（译者注：此处应为$a_j=r\exp(i\theta_j)$，$j=1,2,\cdots n$。）

则${}_nT_s=r^s\sum\exp[i(\theta_{j1}+\cdots+\theta_{js})]$。是在$c_s$上作和，而集

c_s

合c_s是表示从1，2，…，n中每次取S个的所有可能组合的集合，类似地有

$$_nT_{n-s}=r^{n-s}\sum_{C_n^{-s}}exp[i(\theta_{j_1}+\cdots+\theta_{jn-s})].$$

令 $\Omega=\sum_{j=1}^{n}\theta_j$，则

$$_nT_{n-s}=r^{n-s}\sum_{c_s}exp[i(\Omega-\theta_{j_1}-\cdots-\theta_{js})],$$

$$|_nT_{n-s}|=r^{n-s}|\sum_{c_s}exp[i(\theta_{j_1}+\cdots+\theta_{js})]|$$

$$=r^{n-2s}|_nT_s|.$$

5．两个解的差，譬如说为h，必须满足齐次方程

$$h(x,y)=\int_0^x\int_0^y h(u,v)dudv.$$

令$M_p=max\,h(x,y)$，对于$0\leqq x,y\leqq p<1$.

应用积分中值定理及h的连续性，$M_p=h(x_p,y_p)\leqq M_px_py_p\leqq M_pp^2$. 于是对于使得$0<p<1$的所有$p$有$M_p\leqq 0$. 由于$h$的连续性因此对于$0\leqq x,y\leqq 1$有$h(x,y)\leqq 0$. 用一个对称的讨论，有$h(x,y)\geqq 0$，由此可见$h(x,y)=0$.

6．从现在起，年利率为i，n年n^2元的提取值是$n^2(1+i)^{-n}$. 于是所要求的和是$\sum_{n=1}^{\infty}n^2(1+i)^{-n}$.

因为 $(1-x)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$，用微分法可见

$$x(1-x)^{-2}=\sum_{n=1}^{\infty} nx^n,\quad (x+x^2)(1-x)^{-3}=\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n,$$

这些级数在$-1<x<1$皆收敛．取$x=(1+i)^{-1}$,得到所需要求的和是$(1+i)(2+i)i^{-3}$．

7． 设Q是边长为1的一个正方形，设Q^*是边长为2的正方形,而Q^*与Q有公共的中心和对应边平行,只需证明：任何仅与Q有 公共边界点的边长为1的正方形P必须包含Q^*的周长为1或大于1的一部分．可将各种情况分为两类：（1）P的一个顶点在Q的一边上,从此顶点到Q的最近的一个顶点的距离为l，而且在P和Q的边之间的最小的锐角是θ．（2）Q的一个顶点在P的一边上，且此顶点到P的最近的一个顶点的距离为l，在P和Q的边之间的最小的锐角为θ.（1）和（2）中的每一种又能分为两小类，此两小类是根据Q^*的一个顶点是否落在P内而分的.所有别的情况是限定在这些情况中.对每一种情况的讨论是初等的.

第二部分试题解答

1． a)假设本题是可以作的,就作出$A-B$,并以$A-B$，C，D为边作一个三角形．对此可作的条件是其中任一边是小于另两边之和．延长边$A-B$的一个长为B的线段,再作与三角形较近的一条边的一条平行线，这样就可以把所求的四边形容易地做成了.

b)假设我们选择一个笛卡儿坐标系，以H为原点，以HA和CB作为坐标轴,则容易计算出HE和HF的斜率且两

者仅符号相反。

2. 由于$x(x+1)(x+2)(x+3)=(x^2+3x+1)^2-1$，所以四个相邻正整数的积是一个完全平方相差1，因而不是完全平方。对于四个相邻正整数，x，$x+1$，$x+2$，$x+3$，或者$x+1$或者$x+2$必和另外三数的积互质。于是，倘若四个连续正整数的积是一个完全立方，则$x+1$或$x+2$中的一个仍是一个完全立方。于是剩下的三个正整数的积是一个完全立方。但这是荒谬的，因为当$x>1$时，$x(x+2)(x+3)$和$x(x+1)(x+3)$肯定处于$(x+1)^3$与$(x+2)^3$之间。对于$x=1$的情况可以直接验证。

3. 假如A胜B，B胜C，和C胜A，我们将要称这三个选手构成一个“三角形”。假如两个选手有相同分数，譬如说A和B都得R分，则必有一个三角形出现。因为或者A胜B或B胜A，$R>0$。譬如说A胜B，这样一来，B要胜A和B以外的R个选手，而A只能胜A和B之外的$R-1$个选手。于是B胜某个选手C，而此选手C要胜A。反之，如果所有得分不同，则必须是0，1，…，$n-1$，显然不可能有三角形。于是，得分S_1，…，S_n是0，1，…$n-1$的充要条件是不出现三角形。还有：

$$\sum_{i=1}^{n} S_i^2 \leqq \frac{1}{6}(n-1)(n)(2n-1)$$，等号只有当得分是排成$S_i=i-1$时才成立。对于$n=2,3$时检验一下这是对的。假设对于$n-1$个选手此结论正确，若$S_n=n-1$和某个另外的$S_i \neq i-1$时，结论得证。假如$S_n<n-1$，则某个$S_i>i-1$。假如S_n是增加1和S_i是减1，则平方和增加$2(S_n-S_i)+2>0$。

应用数学归纳法的第二步也与$S_n=n-1$一样得证，因此结论得证。

4. 应用对称性，只需求出从一个单点出发的所有弦的平均长，譬如说取为北极。应用球坐标（以$\rho=1$），面积不可取为$2\pi sin\phi d\phi$，式中ϕ是过北极的半径与过弦的另一个端点的半径所组成的夹角。所要求的积分是

$$(4\pi)^{-1}\int_0^{\pi}(2sin\frac{1}{2}\phi)(2\pi sin\phi)\,d\phi=\frac{4}{3}.$$

5. 假设P_1,P_2,P_3是在此集合中而不是共线的。在此集合中的任何一点P_4落在P_iP_j上，或落在以下双曲线的某一条上：

$|d(P,P_i)-d(P,P_j)|=1,2,\cdots,d(P_i,P_j)-1$，式中$i\neq j,i,j=1,2,3$。由于任意两条这样的轨迹最多只有四个交点，所以$P_4$的可能位置总共是有限的。

6. 因为$mx''(t)=Rx'(t)$和$my''(t)=-mg+Ry'(t)$，由此可得$R=m(\frac{f''(t)}{f'(t)})$。

因此$\left\{\frac{y'(t)}{f'(t)}\right\}'=-\frac{g}{f'(t)}$

且 $y'(t)=\left\{\frac{y'(0)}{f'(0)}\right\}f'(t)-gf'(t)\int_0^t\left\{\frac{1}{f'(\tau)}\right\}d\tau$.

再积分一次得

$$y(t)=y(0)+\left\{\frac{y'(0)}{f'(0)}\right\}\left\{f(t)-f(0)\right\}-$$

$$g\int_0^t f'(x)\,dx\int_0^x\left\{\frac{1}{f'(\tau)}\right\}d\tau.$$

7. 显然对于任何多项式$P(x)$，有$\int_a^b P(x)f(x)=0$.

给定$\varepsilon>0$，总可选择$P(x)$，使得

$|f(x)-P(x)|<\varepsilon, a\leqq x\leqq b$。

因此$\int_a^b f^2(x)dx=\left|\int_a^b f(x)\left\{f(x)-P(x)\right\}dx\right|\leqq\varepsilon(b-a)M$，

其中M是对于$|f(x)|$在$a\leqq x\leqq b$上的一个界。这就推得$\int_a^b f^2(x)dx=0$，由于f是连续的，所以必须在此区间上f应等于零。

第 19 届
威廉·洛威尔·普特南数学竞赛

（1958年11月22日举行）

译自 L. E. Bush 的总结，载于
1961年1月号《美国数学月刊》

第一部分试题

1. 当$m\geqq1, n\geqq1$时，设$f(m,1)=f(1,n)=1$，当$m>1$和$n>1$时，设$f(m,n)=f(m-1,n)+f(m,n-1)+f(m-1,n-1)$。还要假设$S_{(n)}=\sum\limits_{a+b=n}f(a,b), a\geqq1$和$b\geqq1$。

证明：当$n\geqq2$时$S(n+2)=S(n)+2S(n+1)$。

2. 设$R_1=1, R_{n+1}=1+\dfrac{n}{R_n}, n\geqq1$。

证明：对于$n\geqq 1, \sqrt{n}\leqq R_n\leqq\sqrt{n}+1$

3. 假设在下列一些关系式下有唯一解$u(t)$：

$$\frac{du(t)}{dt}=u(t)+\int_0^1 u(S)dS,\ u(0)=1,$$

求出$u(t)$。

4. 在分配集体宿舍的房间中，某一个学院对同房间的两名学生喜欢指定以下的安排：

$AA, AB, AC, BB, BC, AD, CC, BD, CD, DD$，其中$AA$表示两名高年级学生，$AB$表示一名高年级学生和一名较低年级的学生，如此等等。对A、B、C、D各确定一个数值，这样一来对应于以上的安排的数集为$A+A$，$A+B$，$A+C$，$B+B$，等等是递降的数值。找出一般解和最小的正整数解。

5. n阶行列式的主对角线上都是0，而其余都是1，证明：在此行列式的展开式中非零项的项数是

$$n!\left[1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}\right].$$

6. 设$a(x)$和$b(x)$在$0\leqq x\leqq 1$上都是连续函数，又设在$0\leqq x\leqq 1$上有$0\leqq a(x)\leqq a<1$. 问在怎样的条件（如果要的话）下，方程

$u=max[b(x)+a(x)\cdot u]$的解是

$0\leqq x\leqq 1$

$$u=\max_{0\leqq x\leqq 1}\left[\frac{b(x)}{1-a(x)}\right]?$$

7. 设a和b是互质的正整数，b为偶数。对于每个正整数q，选择$p=p(q)$使得

$\left|\frac{p}{q}-\frac{a}{b}\right|$是一个极小值。

证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{q=1}^{n}\frac{q\left|\frac{p}{q}-\frac{a}{b}\right|}{n}=\frac{1}{4}$。

第二部分试题

1． 给定 $b_n=\sum\limits_{K=0}^{n}\binom{n}{K}^{-1}$，$n\geqq 1$。

证明 $b_n=\frac{n+1}{2n}b_{n-1}+1, n\geqq 2$，

因此，作为一个推论，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=2$。

2． 给定$n+1$个正整数的一个集合，其中都不超过$2n$，证明在此集合中至少有一个数必须除尽集合中的另一个数。

3． 假如一个单位边长的正方形分割成两部分，则其中一部分的直径（两点间距离的最小上界）不小于$\frac{1}{2}\sqrt{5}$。还要证明不会有较大的数值可作这个界。

4． 设C是一个实数，设f是一个函数，使得：

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=c,\quad \lim_{x\to\infty}f'''(x)=0。$$

证明：$\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=0$，$\lim\limits_{x\to\infty}f''(x)=0$。

其中上标（撇）表示求导。

5． 一条折线的逐段的长度，由调和级数1，$\frac{1}{2}$，…，$\frac{1}{n}$，…的逐项来表示。每一线段与前一线段形成一个给定的角度θ.求从第一条线段的始点到极限点（假如有一个的话）

的方向和距离？

6. 设给出在n点上的一个完全有向图，即，给出n点1，2，…，n的一个集合和任两点i和j之间的一个方向，$i \to j$。求证：存在一个这些点的一个排列$[a_1, a_2, \cdots, a_n]$，使得$a_1 \to a_2 \to \cdots \to a_n$。

7. 设$a_1, \cdots, a_n$是整数$1, \cdots, n$的一个排列。假如对于所有的$j > i$有$a_i > a_j$，则称a_i为“大”整数。求在原来的n个正整数上的所有排列的“大”整数的平均数。

第一部分试题解答

1.
$$
\begin{aligned}
S(n+2) &= \sum_{j=1}^{n+1} f(j, n+2-j) \\
&= f(1, n+1) + \sum_{j=2}^{n} \{f(j-1, n+2-j) + f(j, n+1-j) \\
&\qquad f(j-1, n+1-j)\} + f(n+1, 1) \\
&= [f(n,1) + \sum_{j=1}^{n-1} f(j, n+1-j)] \\
&\qquad + [\sum_{j=2}^{n} f(j, n+1-j) + f(1, n)] \\
&\qquad + \sum_{j=1}^{n-1} f(j, n-j) \\
&= 2S(n+1) + S(n).
\end{aligned}
$$