



中等專業學校教學用書

# 工程力學

第一部分 理論力學

Д. В. 倍其柯夫 著  
М. О. 米 洛 夫

高等教育出版社



中等專業學校教學用書



# 工 程 力 學

## 第一部分 理論力學

Д. В. 倍其柯夫  
趙 超  
趙 宗

М. О. 米洛夫著  
變 基  
譯

高等教育出版社

本書系根据苏联國立建筑書籍出版社 (Государственное издательство литературы по строительству и архитектуре) 出版的倍其柯夫 (Д. В. Бычков) 教授和米洛夫 (М. О. Миров) 工程师合著“工程力学第一部分——理論力学” (Техническая механика) 1953 年版譯出。原書經苏联建筑工程部審定為土木建筑中等技術学校的教科書。

本書內容由三編組成。第一編為靜力学，研究力系对物体作用的平衡条件。第二編為运动学，研究質点和質点系的平面运动。第三編為动力学，研究質点和質点系的动力学定律及其应用。

本書第一、二編由趙超燮翻譯，第三編由趙宗基翻譯，全書由趙超燮校訂。

## 工 程 力 学

### 第一部分 理論力学

Д. В. 倍其柯夫, М. О. 米洛夫著

趙超燮 趙宗基譯

高等教育出版社出版

北京琉璃廠一七〇号

(北京市書刊出版業營業許可証出字第〇五四号)

京華印書局印刷 新華書店总經售

書号 15010·73 開本 850×1168 1/32 印張 10 2/16 插頁 1 字數 245,000

一九五四年八月上册第一版共印 37,000 册

一九五四年十一月下册第一版共印 22,000 册

一九五六年七月訂合本第一版

一九五六年七月北京第一次印刷

印數 00,091—10,000 定價 (10) 洋 1.30

## 序 言

在第十九次黨代表大會關於發展蘇聯的第五個五年計劃（1951—1955）的指示<sup>①</sup>中規定：“按照進一步發展國民經濟和文化建設的任務，在五年內使各種高等專業學校和中等專業學校的畢業生大約增加百分之三十到百分之三十五”。這樣大量地增加各專業的畢業生，就需要極充分地供應學生們的教科書和教學參考書。

在中等技術學校用的工程力學方面，曾出版了若干教科書。但是到目前為止，還沒有一本專為土木建築中等技術學校用的教本。本書出版的目的是要彌補這個現存的缺陷。

本書包括三部分：理論力學、材料力學和結構靜力學；全書係根據蘇聯前高等教育部<sup>②</sup>中等技術教育司批准的教學大綱而編寫的。本書中除理論部分外還特別注意到理論的實際應用，並且書中的例題和習題也是特為建築技術人員而選擇的。

理論力學的各部分由下列同志編寫：緒論和第一編——Д. В. 倍其柯夫教授，第二編和第三編——М. О. 米洛夫工程師。全書由 Д. В. 倍其柯夫教授總校訂。

本書作者對審查原稿和提出一系列寶貴指示的各位評閱者——技術科學候補博士 С. Т. 捷爾齊巴霞茨、烏拉基米爾土木建築中等技術學校的教師 В. Ф. 雅布羅諾夫斯基以及本書的編輯技術科學候補博士 А. М. 安法那西也夫副教授表示衷心的感謝。

考慮到這本書是第一本為土木建築中等技術學校用的工程力學，作者特別關心應用本書的讀者們的意見。意見和評論可按下面地址寄交出版社：Москва, Третьяковский пр. 1.

<sup>①</sup> 第十九次黨代表大會關於發展蘇聯第五個五年計劃（1951—1955）的指示，國立政治書籍出版社，1952年版第28頁。

<sup>②</sup> 在斯大林同志逝世後，蘇聯高等教育部曾併入文化部，現在又分開成立；本書係1953年10月出版——譯者註。

# 第一編所用符號表

| 符 號                 | 代 表 意 義                            | 符 號                            | 代 表 意 義               |
|---------------------|------------------------------------|--------------------------------|-----------------------|
| $a, b, c, \dots$    | 線段長度、距離、索多邊形上的點                    | $M_x, M_y, M_z$                | 對 $X, Y, Z$ 各軸的力矩     |
| $b$                 | 型鋼寬度                               | $M_C$                          | $C$ 點左邊所有的力對 $C$ 點的力矩 |
| $d$                 | 直徑                                 | $M_{傾覆}$                       | 傾覆力矩                  |
| $f$                 | 滑動摩擦係數                             | $M_{穩定}$                       | 穩定力矩                  |
| $h$                 | 高度、距離、桁架高度                         | $N$                            | 正壓力，法向力               |
| $k$                 | 穩定係數，滾動摩擦係數                        | $P$                            | 力，合力                  |
| $l$                 | 長度，桁架跨度，                           | $P_1, P_2, P_3, \dots$         | 力，分力                  |
| $q$                 | 單位面積的荷載 ( $\text{kg}/\text{M}^2$ ) | $(P, P)$                       | 合力偶                   |
| $r$                 | 半徑                                 | $(P_1, P_1), (P_2, P_2)$       | 分力偶                   |
| $u$                 | 投影軸                                | $Q$                            | 水平力，力，重量              |
| $x$                 | 橫坐標                                | $R$                            | 合力                    |
| $x_0$               | 平行力中心的橫坐標，重心的橫坐標                   | $R_t$                          | 極限摩擦力                 |
| $y$                 | 縱坐標                                | $S$                            | 力                     |
| $y_0$               | 平行力中心的縱坐標，重心的縱坐標                   | $S_1, S_2, S_3, \dots$         | 桁架各桿的內力               |
| $z_0$               | 重心的豎坐標                             | $S_X$                          | 面積對 $X$ 軸的靜力矩         |
| $A, B$              | 支座、支座反力                            | $S_Y$                          | 面積對 $Y$ 軸的靜力矩         |
| $A, B, C, D, \dots$ | 點，桁架節點                             | $T$                            | 拉力，重量單位(噸)            |
| $C$                 | 重心，平行力中心                           | $X$                            | 橫坐標軸，橫坐標軸上的投影         |
| $F$                 | 面積                                 | $Y$                            | 縱坐標軸，縱坐標軸上的投影         |
| $G$                 | 重量                                 | $Z$                            | 豎坐標軸，豎坐標軸上的投影         |
| $H$                 | 水平分力，水平反力，極點                       | $U$                            | 在 $u$ 上的投影            |
| $M$                 | 力矩，力偶矩，長度單位(米)                     | $V$                            | 豎直反力                  |
| $M_R$               | 合力矩，合力偶矩                           | $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ | 角度                    |
| $M_A, M_B, M_C$     | 對 $A, B, C$ 各點的力矩                  | $\varphi$                      | 摩擦角                   |
| $M_0(P)$            | $P$ 力對坐標原點的力矩                      | $\Sigma$                       | 代數和                   |

## 第二、三編 所用符號表

| 符號       | 代表意義            | 單位(工程單位制)            | 符號              | 代表意義             | 單位(工程單位制)           |
|----------|-----------------|----------------------|-----------------|------------------|---------------------|
| $a$      | 加速度, 總加速度, 眞加速度 | 米/秒 <sup>2</sup>     | $J$             | 轉動慣量             | 千克·米·秒 <sup>2</sup> |
| $a_n$    | 法向加速度           | 米/秒 <sup>2</sup>     | $M$             | 轉矩               | 千克·米                |
| $a_t$    | 切向加速度           | 米/秒 <sup>2</sup>     | $N$             | 功率               | 馬力                  |
| $a_{平均}$ | 平均加速度           | 米/秒 <sup>2</sup>     | $Q$             | 慣性力              | 千克                  |
| $a_x$    | 加速度在 $x$ 軸上的投影  | 米/秒 <sup>2</sup>     | $Q_n$           | 法向慣性力            | 千克                  |
| $c$      | 彈簧常數            |                      | $Q_t$           | 切向慣性力            | 千克                  |
| $g$      | 自由落體加速度         | 米/秒 <sup>2</sup>     | $R$             | 轉動半徑             | 米                   |
| $h$      | 曲率              | $\frac{1}{米}$        | $T$             | 動能               | 千克·米                |
| $m$      | 質量              | 千克·秒 <sup>2</sup> /米 | $\Pi$           | 位能               | 千克·米                |
| $n$      | 轉數              | 轉/分                  | $\alpha, \beta$ | 角度               | 弧度                  |
| $s$      | 路程, 距離, 位移      | 米                    | $\epsilon$      | 角加速度, 眞角加速度      | 弧度/秒 <sup>2</sup>   |
| $s_0$    | 初距離             | 米                    | 度               |                  |                     |
| $t$      | 時間              | 秒                    | $\epsilon_{平均}$ | 平均角加速度,          | 弧度/秒 <sup>2</sup>   |
| $v$      | 速度, 眞速度, 末速度    | 米/秒                  | $\eta$          | 效率               |                     |
| $v_0$    | 初速度             | 米/秒                  | $\varphi$       | 轉角, 偏角,          | 弧度                  |
| $v_{平均}$ | 平均速度            | 米/秒                  | $\omega$        | 角速度, 眞角速度, 圓形角速度 | 弧度/秒                |
| $u$      | 碰撞後的速度          | 米/秒                  | $\omega_0$      | 初角速度             | 弧度/秒                |
| $A$      | 功               | 千克·米, 焦, 磅·英尺        | $\omega_{平均}$   | 平均角速度            | 弧度/秒                |
| $D_n$    | 迴轉直徑            | 米                    | $\lambda$       | 彈簧伸長             | 米                   |
| $G$      | 重量              | 千克                   | $\rho$          | 曲率半徑, 迴轉半徑       | 米                   |

# 目 錄

|                  |     |
|------------------|-----|
| 序言 .....         | iii |
| 第一編所用符號表 .....   | xi  |
| 第二、三編所用符號表 ..... | xii |
| 緒論 .....         | 1   |

## 第一編 靜力學

|                                 |    |
|---------------------------------|----|
| 第一章 基本定義和靜力學公理 .....            | 12 |
| § 1. 基本概念 .....                 | 12 |
| § 2. 靜力學公理 .....                | 14 |
| § 3. 支座和支座反力 .....              | 15 |
| 第二章 作用線交於一點的力系(“共點力系”) .....    | 18 |
| A. 共點力系的圖解法 .....               | 18 |
| § 4. 力平行四邊形 .....               | 18 |
| § 5. 力三角形 .....                 | 18 |
| § 6. 將一個力分解為兩個分力 .....          | 19 |
| § 7. 力多邊形 .....                 | 21 |
| § 8. 三個力的情形 .....               | 23 |
| B. 共點力系的解析法 .....               | 27 |
| § 9. 力在軸上的投影 .....              | 27 |
| § 10. 用解析法求共點力系的合力 .....        | 28 |
| § 11. 物體在共面共點力系作用下平衡的解析條件 ..... | 29 |
| § 12. 共線力系 .....                | 32 |
| B. 共點力系的理論在桁架計算中的實際應用 .....     | 33 |
| § 13. 桁架的基本概念 .....             | 33 |
| § 14. 計算桁架時在實用上的幾點注意 .....      | 34 |

|   |     |
|---|-----|
| <b>第三章 共面平行力系</b> .....                 | 40  |
| § 15. 兩個平行力的合成.....                     | 40  |
| § 16. 將力分解為兩個平行分力.....                  | 41  |
| § 17. 兩個反向平行力的合成.....                   | 43  |
| § 18. 將力分解為兩個反向平行分力.....                | 44  |
| § 19. 槓桿及其平衡條件.....                     | 46  |
| § 20. 力對於一點的力矩.....                     | 48  |
| § 21. 力矩定理.....                         | 50  |
| § 22. 力對坐標原點的力矩的式子.....                 | 52  |
| § 23. 幾個平行力的合成.....                     | 54  |
| § 24. 力偶.....                           | 55  |
| § 25. 力偶的基本性質.....                      | 56  |
| § 26. 力偶的合成·力偶的平衡條件.....                | 59  |
| <b>第四章 重心</b> .....                     | 64  |
| § 27. 一般概念.....                         | 64  |
| § 28. 共面平行力中心的坐標.....                   | 65  |
| § 29. 平面圖形面積重心的求法.....                  | 68  |
| § 30. 複雜圖形面積重心的求法.....                  | 71  |
| § 31. 以求平面圖形重心的方法實際應用到求金屬型材組合截面的重心..... | 77  |
| <b>第五章 共面力系平衡的一般情形</b> .....            | 83  |
| § 32. 共面力系向已知中心點的簡化.....                | 83  |
| § 33. 共面力系平衡的解析條件·平衡方程式的三種形式.....       | 85  |
| § 34. 靜定與超靜定問題.....                     | 89  |
| § 35. 求支座反力的例題.....                     | 94  |
| § 36. 穩定力矩和傾覆力矩.....                    | 99  |
| § 37. 用截面法求桁架各桿的內力.....                 | 102 |
| <b>第六章 摩擦</b> .....                     | 110 |
| § 38. 滑動摩擦.....                         | 110 |
| § 39. 滾動摩擦.....                         | 114 |



|                                    |     |
|------------------------------------|-----|
| 第七章 圖解靜力學.....                     | 117 |
| A. 共面力系的圖解法·索多邊形法 .....            | 117 |
| § 40. 力多邊形和索多邊形·力系簡化為一個合力的情形 ..... | 117 |
| § 41. 力系簡化為一個力偶的情形·平衡的情形 .....     | 128 |
| § 42. 求支座反力的圖解法 .....              | 125 |
| § 43. 索多邊形的基本性質 .....              | 128 |
| § 44. 求力矩的圖解法 .....                | 130 |
| B. 用圖解法求桁架各桿件的內力 .....             | 132 |
| § 45. 內力圖解 .....                   | 132 |
| § 46. 用內力圖解求桁架各桿件的內力 .....         | 138 |
| 第八章 空間力系 .....                     | 141 |
| § 47. 作用線交於一點的力系(共點力系) .....       | 142 |
| § 48. 力對於一點的力矩 .....               | 146 |
| § 49. 力對於一軸的力矩 .....               | 147 |
| § 50. 空間力系的簡化 .....                | 149 |
| § 51. 空間任意力系的平衡方程式 .....           | 152 |
| § 52. 空間平行力系 .....                 | 157 |
| § 53. 某些物體重心的求法 .....              | 158 |

## 第二編 運動學

|                                 |     |
|---------------------------------|-----|
| 第一章 質點的直線運動 .....               | 161 |
| § 54. 概論 .....                  | 161 |
| § 55. 勻速運動 .....                | 162 |
| § 56. 變速運動 .....                | 163 |
| § 57. 勻變速運動 .....               | 167 |
| § 58. 豎直的自由運動(勻變速運動的特殊情形) ..... | 170 |
| 第二章 質點的曲線運動 .....               | 172 |
| § 59. 確定運動的兩個方法 .....           | 172 |

|                              |            |
|------------------------------|------------|
| § 60. 曲線運動的速度 .....          | 175        |
| § 61. 速度在坐標軸上的投影 .....       | 177        |
| § 62. 從直角坐標的運動方程式求速度 .....   | 178        |
| § 63. 曲線運動的加速度 .....         | 179        |
| § 64. 曲率 .....               | 180        |
| § 65. 切向加速度和法向加速度 .....      | 182        |
| § 66. 各種不同運動情形的加速度 .....     | 186        |
| § 67. 從直角坐標的運動方程式求加速度 .....  | 190        |
| <b>第三章 剛體的最簡單運動</b> .....    | <b>192</b> |
| § 68. 剛體的平動 .....            | 192        |
| § 69. 剛體繞定軸的轉動 .....         | 194        |
| § 70. 勻速轉動 .....             | 195        |
| § 71. 變速轉動 .....             | 199        |
| § 72. 勻變速轉動 .....            | 203        |
| <b>第四章 質點的合成運動</b> .....     | <b>207</b> |
| § 73. 絕對、相對和牽連運動 .....       | 207        |
| § 74. 運動的合成(問題的提出) .....     | 209        |
| § 75. 共線運動的合成 .....          | 210        |
| § 76. 彼此相交成一角度的直線運動的合成 ..... | 212        |
| <b>第五章 剛體的平面平行運動</b> .....   | <b>217</b> |
| § 77. 平面平行運動的概念 .....        | 217        |
| § 78. 平面運動分解為平動和轉動 .....     | 218        |
| § 79. 平面圖形上各點速度間的關係 .....    | 219        |
| § 80. 速度的瞬時中心 .....          | 220        |
| § 81. 求速度瞬心的方法 .....         | 222        |

## 第三編 動力學

|                    |     |
|--------------------|-----|
| 第一章 質點動力學的原理       | 225 |
| § 82. 動力學概論        | 225 |
| § 83. 動力學定律        | 226 |
| § 84. 重量和質量間的關係    | 229 |
| § 85. 單位制          | 230 |
| § 86. 質點運動的微分方程式   | 234 |
| § 87. 質點的斜拋運動      | 236 |
| § 88. 慣性力          | 239 |
| § 89. 達朗培爾原理       | 241 |
| 第二章 質點系動力學的原理      | 246 |
| § 90. 質點系、內力和外力    | 246 |
| § 91. 慣性中心         | 246 |
| § 92. 慣性中心(重心)運動定律 | 248 |
| § 93. 剛體動力學        | 253 |
| § 94. 轉動慣量和迴轉矩     | 255 |
| 第三章 功和功率           | 258 |
| § 95. 恆力在直線軌道上的功   | 258 |
| § 96. 變力在曲線軌道上的功   | 260 |
| § 97. 合力的功的定理      | 261 |
| § 98. 功的圖解表示法      | 262 |
| § 99. 重力所作的功       | 263 |
| § 100. 彈力所作的功      | 266 |
| § 101. 轉動時所作的功     | 267 |
| § 102. 功率          | 270 |
| § 103. 效率          | 271 |
| § 104. 轉動時的功率      | 273 |

---

|                      |     |
|----------------------|-----|
| 第四章 動能和動量.....       | 275 |
| § 105. 質點的動能定律 ..... | 275 |
| § 106. 剛體的動能 .....   | 278 |
| § 107. 剛體的動能定律 ..... | 280 |
| § 108. 機械能守恒定律 ..... | 283 |
| § 109. 動量定律 .....    | 286 |
| § 110. 動量守恒定律 .....  | 288 |
| § 111. 非彈性體的碰撞 ..... | 290 |

華俄名詞對照表

人名對照表

本書所用公式表

## 緒 論

廣義地說，工程力學是一門研究建築物和機器的設計及計算原理和方法的科學。

工程力學包含：理論力學、材料力學、結構靜力學和機器零件。

理論力學是研究物體的機械運動和平衡的科學。所謂機械運動就是物體隨着時間而在空間所作的移動，而移動時並不改變運動物體在性質上的特徵。但是另外一些運動的形式：分子、原子、電子的運動——在化學和物理的專門章節中研究。

材料力學的任務是在確定建築物或機器中各構件的尺寸，使其既安全又經濟。這裏的“安全”係指強度、剛度和穩定性等方面而言。

結構靜力學主要是研究整個建築物強度的計算。

最後，機器零件這一門課程是要使學生們熟悉機器中各種構件的設計方法和原理。

理論力學又分為靜力學、運動學和動力學。

靜力學研究物體的平衡，運動學從純幾何方面研究物體的運動而並不考慮引起運動的原因（力），動力學則研究物體在所加的力作用下的運動。

工程力學這一門課程是研究專業技術課程的基礎。

爲了使學生們熟悉理論力學發展的階段，下面作簡短的敘述來說

明在理論力學方面許多著名學者的事業和他們的主要著作。

力學是最古老的科學之一。在二千多年以前阿基米德(公元前 287—212 年)第一個創立了關於固體和液體平衡學說嚴格地合乎科學的原理。阿基米德在關於平面圖形的平衡及重心的著作中,敘述了他所研究出來的槓桿平衡原理並且求出了各種平面圖形:平行四邊形、三角形、梯形和拋物線弓形的重心位置。阿基米德奠定了液體靜力學——研究液體平衡的科學——的基礎;他發現了這門科學中一個基本的定律,這個定律就以他的名字來稱呼(阿基米德定律)。阿基米德除了理論方面的發現以外,在工程方面還作了很多重要的發明。

在中世紀時期,力學的發展差不多完全停頓了。祇是在文藝復興時代,由於現實所提出一些最重要的和迫切的任務,力學才得到了很大的發展。在這方面的第一個成就是在十五世紀初葉,著名的藝術家兼科學家列奧納爾多·達·芬奇(1452—1519 年)首先建立了落體運動定律的正確概念。同時,物體斜面運動定律的研究、撞擊物體的研究、摩擦問題的研究、角錐體重心的求法以及測力計的發明也都是他所作的。他第一個建立了一個非常重要的概念——力對於一點的力矩。

比薩大學的數學教授伽利略·伽利來(1564—1642 年),可以正確地認為是動力學這門科學的奠基者。他證明了勻加速運動和勻減速運動的性質。伽利略在 1638 年在一本叫做“有關於力學和局部運動學兩門新科學的討論和數學證明”的書中,發表了動力學的原理。

在專講動力學的該書第三章中,伽利略寫道:“我們創立了新的科學,其研究對象是非常古老的。在自然界中再沒有比運動更古老的,但正就是關於它,哲學却寫得極少極少”。

伽利略第一個確定了力是速度變化的原因,也就是確立了力的動力學定義。在伽利略以前,人們在平衡狀態下研究各種物體,而用靜力學方法來量度力。伽利略的功績之所以寶貴,更因為他第一個把實驗的研究方法用到力學中來的緣故。

伽利略發現的落體定律，由於當時數學的不完全，所以不能嚴格地從理論上來證明，一方面也因為關於力、質量和加速度之間的關係還沒有足夠清楚的概念。祇是到了十七世紀末葉，由於惠更斯和牛頓的著作才闡明了動力學的基本原理，並提供了落體定律以及行星圍繞太陽運動的定律的嚴格證明。

赫利斯傑安·惠更斯(1629—1695年)第一個研究物理擺的理論，並在力學中引入了物體對於一軸的轉動慣量這個概念。

伊薩克·牛頓(1642—1727年)在“自然哲學的數學原理”一書中(1687年出版)給出了力學基本定律的完善體系。他曾研究出以微分形式來表示的、力的動力學定義。牛頓創立了力平行四邊形定律和運動合成定律。牛頓和萊布尼茲應認為是無窮小解析法的奠基者，這個對於力學的進一步發展具有非常重大的意義。

第一個應用無窮小解析法來解力學問題的是十八世紀著名的數學家 and 力學家、俄羅斯科學院院士列奧納爾德·歐勒(1707—1783年)。他寫了43卷著作和780多篇論文。在他傑出的著作中，大多數是有關力學的問題。歐勒曾創立了質點和固體的解析動力學方面的基礎著作。歐勒很明白地並且很完備地研究了關於固體圍繞固定點運動的問題。歐勒在這些問題中所得到的公式就叫做歐勒公式，這些公式都載於現代的理論力學教程中。歐勒應當認為是液體動力學的奠基者，因為他第一個推導了理想液體運動的基本方程式。

在1743年達朗培爾(1717—1783年)提出了解決動力學問題的新原理。這個原理就是現在大家知道的達朗培爾原理。這個原理在對於作用力附加以慣性力之後，就提供了用靜力學方法解決動力學問題的可能性。

在十八世紀中葉出版了俄羅斯最偉大的學者——米哈伊爾·華西里耶維奇·羅蒙諾索夫(1711—1765年)的許多著作。祇有在兩個世紀以後的今天，這位科學勇士的功績才能受到充分的重視。按普希金

的話：羅蒙諾索夫是“俄羅斯的大學”。他是偉大的物理學家、化學家、地理學家、歷史家、詩人、卓越的藝術家以及俄文文法第一個創立者。他是物質守恆定律和能量守恆定律的創立者、材料硬度學說的奠基者、好些新機器的發明者。

M. B. 羅蒙諾索夫的許多著作對於全世界以及俄國科學(包括力學方面)的發展具有決定性的意義。

在 1754 年 M. B. 羅蒙諾索夫在俄羅斯科學院大會上演講關於能夠把氣象觀察用的各種儀器帶到大氣上層去的機械。在這一時期內，M. B. 羅蒙諾索夫還研究另外一種重要的發明——直昇飛機。因此，早在十八世紀時，M. B. 羅蒙諾索夫的著作就已為氣體動力學奠定了基礎。

在十八世紀後半期，俄羅斯的發明家和力學家伊萬·彼得洛維奇·庫里賓(1735—1818 年)以其在力學方面的成就而著名，他第一個研究了索多邊形的性質並用它來計算跨度 298 m 跨越尼瓦河的格構桁架式拱橋。他利用索多邊形的性質來選擇這座橋的拱形桁架的輪廓。

拉格蘭日(1736—1813 年)在 1788 年出版了一本書，他在書裏以一般方法——所謂虛位移原理——為基礎而敘述了整個力學。

但是虛位移原理的最一般形式是俄羅斯著名的數學家兼力學家、科學院院士米哈伊爾·華西里耶維奇·奧斯特羅格拉斯基(1801—1861 年)所編成的。他去除了拉格蘭日著作中一些不必要的限制條件並且修正了在推導動力學方程式中的一些錯誤。M. B. 奧斯特羅格拉斯基談到，在單向約束的情形下，以及在所謂撞擊力的作用下，這個原理應該怎樣來編成。

他曾發現了一個最重要的力學定律——最小作用原理——並用撞擊的一般理論來補充了體系運動的一般理論。M. B. 奧斯特羅格拉斯基曾在液體靜力學、液體動力學、彈性理論、引力理論和彈道學等方面解決了許多重要的問題。



奧斯特羅格拉斯基學派繼續了自己的事業一個多世紀。這個學派十分顯著地分為兩支派：莫斯科支派和彼得堡支派。莫斯科支派的代表人物是些力學界最卓越的學者如 H. E. 茹柯夫斯基和 C. A. 恰布雷金；而彼得堡支派的代表人物有：И. И. 契倍雪夫，A. M. 遼普諾夫，Л. H. 波倍列夫和 A. H. 克雷洛夫。

以自己卓越的著作爲俄羅斯科學增光的第一位俄羅斯女數學家索菲亞·華西里耶夫娜·柯娃列夫斯卡雅（1850—1891年）在1888年寫了一本科學著作，其中研究了固體繞固定點而運動時運動方程式的可積分性的各種新情形。法國科學院曾因這本著作而授獎金給 C. B. 柯娃列夫斯卡雅。

俄羅斯著名的砲兵家尼古拉·華西里耶維奇·馬伊耶夫斯基教授（1823—1892年）成功地研究了砲彈旋轉運動的問題。他曾於1870年在其巨著“外彈道學教程”中發表自己的研究，這本書在彈道學文獻方面是一本最著名的書。他這些在砲兵科學發展史上有所劃時代意義的著作，至今仍有其一定的價值。俄羅斯著名的造船家兼數學家、科學院院士阿列克塞·尼古拉耶維奇·克雷洛夫（1863—1945年）也成功地研究了砲彈旋轉運動的理論。

俄羅斯著名的數學家兼力學家巴夫努其·里沃維奇·契倍雪夫（1821—1894年）的許多著作，在機構解析理論方面具有重大的意義。И. И. 契倍雪夫在“平行四邊形機構原理”這一著作中，就是用他所提出的數學儀器而解決了任意級近似於直線運動的線性運動。他是世界上第一個建立平面機構中鏈桿和運動對偶數目之間數學關係的人。

И. И. 契倍雪夫創立了40多種不同的機構，以及將近80多種不同的機構形式。他是機構理論方面俄羅斯學派的奠基者，他研究出順序地連接鏈桿對偶的基本鉸鏈接合來組成複雜機構這個理論，因而確立了俄羅斯科學在這方面的優先地位。И. И. 契倍雪夫第一個爲機構的本身結構的理論研究打下了基礎。