算學小叢書

幾何圓錐曲線論

A. Cockshott
F. B. Walters 著
徐韞知 譯

國立自貢工業專科學校
五週年紀念
劉文三 贈
六·十一·三

商務印書館發行

算學小叢書

幾何圓錐曲線論

A. Cockshott
F. B. Walters 著
徐譽知 譯

商務印書館發行

中華民國二十六年三月初版

算學小叢書 幾何圓錐曲線論一冊 (52268)

A Treatise on Geometrical Conics

每冊實價國幣柒角

外埠酌加運費匯費

原著者 A. Cockshott F. B. Walters

譯述者 徐韞知

發行人 王雲五 上海河南路

印刷所 商務印書館 上海河南路

發行所 商務印書館 上海及各埠

(本書校對者陳忠杰)

-01314 414

3545

序

全部高級幾何學(解析幾何學，投影幾何學等)中，"圓錐曲線(conic sections)研究可以說佔了最重要的地位。其次，如微積學 天文學，物理學……等也有不少的部分，需要到關於"圓錐曲線"的學識.在近世數學研究上，"圓錐曲線"的種種問題固然都可用解析方法，由二次普遍式

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

的推求而獲得解決(參看譯者所譯的 Whitehead 的算學導論，商務出版)。但是在應用解析方法推求的時候，卻處處離不開由純幾何方法而得的一些結果。這兩種方式的研究本是互相聯繫的.

所以，學習"解析幾何學"，"微積學"，"投影幾何學"等與"圓錐曲線"有關的科目之先"，"圓錐曲線"幾何方面的研究是不可少的準備.要不然，對於這種曲線形象的特性尙未能完全認識，卽一知半解地來運用解析方法，結果必致發生觀念含糊，理解淩亂，或事倍功半等缺點.這大概讀者都已經感到!

A. Cockshott, F. B. Walter 兩氏的這本書正就是針對上述的需要所編成。這本書所有的材料全以英國幾何教學改進會 (The Association for the Improvement of Geometrical Teaching) 所議決的綱要爲基幹，直到現在仍是各校風行的重要讀物。現在爲適合我國讀者，閱讀和修習起見，譯者除加以編列外，並將所引證到的幾何學定理摘要記入(原書僅列歐幾里得原書篇名節名，一般讀者不易得歐氏書卽無從參證)；此外在解題和定義兩方面也根據下列各參考書稍有增改。第六章雜題多半採錄劍橋大學各種試題，頗有演習的價值，故仍全數譯出。

我相信這本書定能給讀者相當的幫助！

徐韞知二四，九，五。

參考材料：

G. A. Wentworth: Plane and Solid Geometry (商務張彝譯本，又原本).

W. P. Milen: Projective Geometry (商務郭善潮譯本，又原本).

F S. Macaulay: Geometrical Conics.

M. Chasles: Traite des Sections Coniques.

L. Cremona: Pure Geometry (英譯本).

A. N. Whitehead: Introduction to Mathematics (商務徐韞知譯本，又原本).

A. Clebsch: Vorlesungen über Geometrie.

G. Salmon: A Treatise on Conic Sections.

W. Lietzmann: Kegelschnittlehre.

目　次

幾何圓錐曲線論

第一章　拋物線(parabola)

§1. **定義**　設一移動點到一個定點和到一條定直線永爲等距離，則這個移動點的軌跡所成的曲線即稱爲“拋物線”. 如用 P 表移動點，S 表定點，XM 表定直線，就有如下的關係

$$SP=PM.$$

§2. **定義**　這個定點 (S) 稱爲“焦點” (focus).

§3. **定義**　這條定直線 (XM) 稱爲“準線” (directrix).

§4. **定義**　如果在一直線一側的曲線上有點，和在另一側的曲線上的點相應，如此聯這兩點的弦被這條直線垂直平分，我們就說：這個曲線是對這條直線對稱。

§5. **定義**　這條直線稱爲這個曲線之一“軸” (axis).

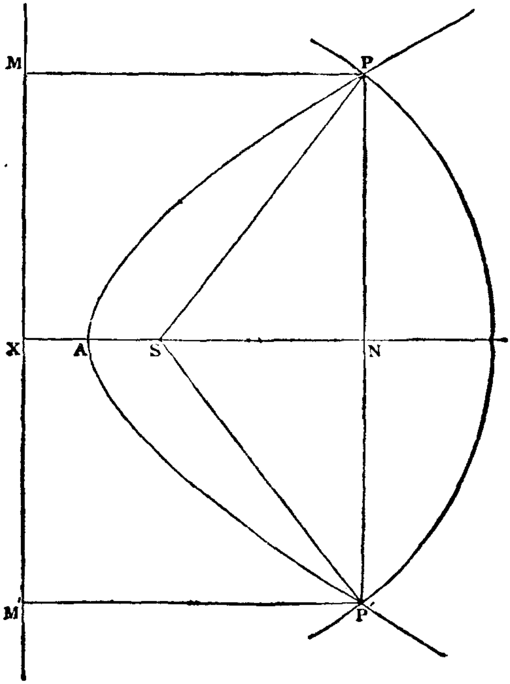
§6. **定義**　軸和曲線相遇的點稱爲“頂點” (vertex)，簡稱爲“頂”.

解題一 作圖題

§7 拋物線上諸點作法 過焦點垂直於準線的直線是一對稱軸 (axis of symmetry).

設 S 爲焦點, MXM' 爲準線. 過 S 作一直線 SX 垂直於準線, 並使它順 XS 方向任意延長.

平分 SX 於 A; 因爲 $SA=AX$, 所以 A 是拋物線上的一點.



在 XS 或 XS 延長線上取任意點 N; 過 N 作一直線 PNP' 垂直於 XN; 用 S 作圓心和 XN 長作半徑畫弧，截 PNP', 設截點為 P 和 P'; 更作 PM 和 $P'M'$ 垂直於準線.

在此因　　　$SP=NX=PM$,

所以P是拋物線上的一點.

依同樣理由，P' 是拋物線上的一點。

因為　　$NP=NP'$　　　　[弦被垂直於其上的直徑平分]

PP' 是被 XS 垂直平分，並且這個曲線是對 XS 對稱.

(1)　如果 N 和 S 位在 A 的同側, SN 較NX 為短，所作弧就會截 PNP' 線.

(2)　如果 N 和 S 位在 A 的兩側，所作弧就不會截 PNP' 直線.

所以拋物線的範圍是無限的，不過全在過 A 垂直於 AS 的一條直線的一側.　　Q. E. F.

本題可看成有已知的"焦點"和"準線"而求聯諸點作一"拋物線"的作圖題. 參看問題一.

§8. 定義　"一個拋物線的軸 (SX)" 是過"焦點"垂直於"準線"的一條直線.

§9 **定義** "一個拋物線的頂 (A)" 是軸與拋物線相遇的點.

§10. **定義** 一個"拋物線"上一點的"縱線" (ordinate, PN) 是從這個點 (P) 引到軸上的垂線.

§11. **定義** "橫線" (abscissa) 就是"頂點"和"縱線"中間的這部分的軸長,

§12. **定義** 一個"拋物線"上一點的"焦點距" (focal distance)—或作"焦點半徑" (focal radius)—是從它到"焦點"的距離.

解題二 定理

§13. 如果弦 PP' 與準線相交於 K 則 SK 平分 SP 和 SP' 間所含的外角.

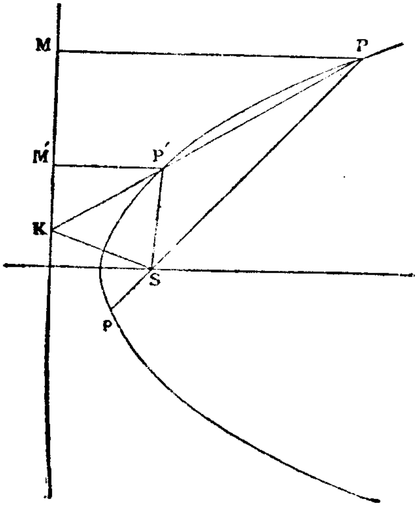
聯 SP, SP'.

作 $PM, P'M'$ 垂直於準線, 並延長 PS 到 p.

應用相似三角形的理解, 在 $\triangle s$ $PKM, P'KM'$ 內,

$$PK : P'K = PM : P'M' = SP : SP';$$

$$\therefore\ SK \text{ 平分外角 } P'SP.$$



[三角形一外角的平分線外分其對邊成兩線分，與其兩鄰邊爲比例.]

Q. E. D.

圖內 Pp 有時也稱爲"焦點弦"(focal chord).

解題三 定理

§ **14**. 如果 PN 是拋物線一條在 P 點的縱線，則

$$PN^2 = 4AS \cdot AN.$$

聯 SP, 並作 PM 垂直於準線. 則

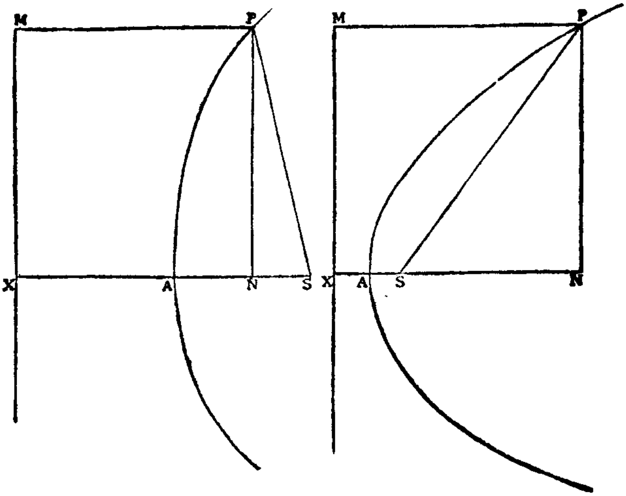
$$NX^2 = XA^2 + AN^2 + 2XA \cdot AN$$

[兩直線的和的平方等於各線的平方和加二倍兩線的相乘積.]

$$=AS^2+AN^2+2AS\cdot AN$$

$$=2AS\cdot AN+SN^2+2AS\cdot AN$$

[兩直線的差的平方等於各線的平方和減二倍兩線的相乘積.]



$$=4AS\cdot AN+SN^2.$$

但是 $NX^2=PM^2=SP^2=PN^2+SN^2$;

$$\therefore\quad PN^2+SN^2=SN^2+4AS\cdot AN,$$

$$\therefore\quad PN^2=4AS\cdot AN.$$ Q. E. D.

[別證] $PN^2=SP^2-SN^2=PM^2-SN^2=NX^2-SN^2$

[定義]

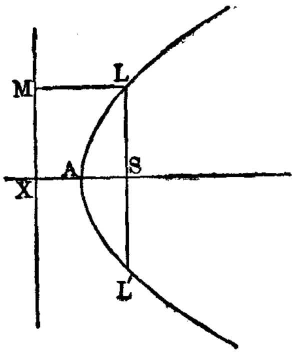
$$=(NX-SN)(NX+SN)=(2AS)(2AN).$$

所以 $$PN^2=4AS\cdot AN.$$ *Q. E. D.*

§ 15. **定義** 過"焦點"的倍縱線(the double ordinate)稱爲"通徑" (latus rectum 或 parameter).

解題四

§ 16. "通徑" $LL'=4AS$.



$$SL^2=4AS\cdot AS.$$ [解題三]

$$\therefore\quad SL=2AS;$$

$$\therefore\quad LL'=4AS.$$ *Q. E. D.*

[別證] 設作 LM 垂直於準線,則

$$LS=LM \text{ 和 } LM=XS.$$ [定義]

$$\therefore\quad LS=XS=2AS.$$

依同理, $$L'S=XS=2AS.$$

所以, $$LL'=4AS.$$ *Q. E. D*

問題一

(解題一之部)

1. 試應用等腰三角形的理解，聯各點畫成拋物線.

2. PP', QQ' 都是拋物線的倍縱線.求證 PQ, $P'Q'$ 和軸交於一點。

3. 設 SM 和過 A 平行於準線的直線相交於 Y. 求證 SM 在 Y 處被平分.

4. 又證 PY 垂直於 SM, 且平分角 SPM.

5. 設作 SZ 垂直於 SP, 和準線相遇於 Z. 求證 PZ 平分角 SPM.

6. 設一個拋物線的兩條焦點弦 (focal chord) 相等，則聯兩弦中點的直線垂直於拋物線的軸.

7. 求過一已知點且切一已知直線的一個圓的圓心軌跡.

8. 求與一已知圓和一已知直線相切的一個圓的圓心軌跡.

9. 平行於軸的一條直線與拋物線只交於一點。

（解題二之部）

1. Pp 是一拋物線的一條焦點弦，Q 是曲線上另一點設 PQ, pQ 分別與準線相遇於 K 和 K', KSK' 是一直角.

2. PQ, pq 都是焦點弦. 求證 Pp Qq 在準線上相遇.

又證 Pq, pQ 也在準線上相遇.

3. 如果 PQ, pq 與準線相遇於 K 和 K', 則 KSK' 是一直角.

4. 應用本解題的理解，試聯 A 至準線上各點畫成拋物線.

5. P 是拋物線上任意點. 設 PA 延長線與準線相交於 K, MSK 是一直角.

6. 已知一拋物線和它的焦點，求準線.

7. PQ 是拋物線的一條倍縱線，PX 截曲線於 P'；求證 $P'Q$ 經過焦點.

(解題三之部)

1. 求證拋物線兩縱線平方的比等於相應的兩橫線的比.

2. PP' 是拋物線的一條倍縱線. 如果環繞 PAP' 的圓重截軸於 Q, 求證 NQ 一定，並求它的長.

3. PNP' 是拋物線的一條倍縱線. 過拋物線上另一點 Q 作兩直線，一條經過頂點，一條與軸平行，截 PP' 於 L 和 L'. 求證 $NL \cdot NL' = PN^2$.

(解題四之部)

1. 試求拋物線內等於兩倍通徑的一條倍縱線.

2. 設一點的縱橫線相等，求證這兩條線各等於通徑.

3. 求證三角形 LAL' 的外接圓半徑的長等於通徑長的八分之五.

§ 17. **定義** 設 PP' 是任意曲線的弦. 現在如 P' 向 P 移近，到 P' 與 P 相合時，在極限位置的弦 PP' 即稱為 P 點上的"切線" (tangent). 切線是與曲線相切，而不是相截. 所切曲線的一點稱為"切點" (point of contact).

解題五 定理

§ 18. 設 P 點上的切線與準線相遇於 Z, PSZ 是一