

# 工 程 力 学

刘长荣 肖念新 主编



中国农业科技出版社

# 工 程 力 学

刘长荣 肖念新 主编

中国农业科技出版社

图书在版编目(CIP)数据

工程力学/刘长荣,肖念新主编.—北京:中国农业  
科技出版社,2002

ISBN 7-80167-298-4

I. 工… II. 刘… III. 工程力学 IV. TB12

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 095429 号

---

责任编辑	左月秋
出版发行	中国农业科技出版社 邮编:100081 电话:(010)68919711; 62173607; 传真:62189014
经 销	新华书店北京发行所
印 刷	河北职业技术师范学院印刷厂
开 本	787mm × 1092mm 1/16 印张:19.750
印 数	1~2 000 册 字数:468 千字
版 次	2002 年 2 月第 1 版 2002 年 2 月第 1 次印刷
定 价	22.50 元

# 前 言

本教材是国家教委师范教育司委托中国职业教育学会高等农业技术师范教育工作委员会为实施国家教委颁布试行的《农艺教育专业本科教学方案》而组织编写的 28 种教材之一。

为贯彻落实《中国教育改革和发展纲要》，进一步推进高等职业技术师范教育的建设和发展，国家教委师范教育司在高等农业技术师范教育中，首先选择了由传统农学专业改办的农艺教育专业为突破口，进行系统整体教育改革，以求全面推动高等农业技术师范教育的改革。为此，从 1992 年开始组织有关高校专家、教授研制《农艺教育专业本科教学方案》，1994 年国家教委以教师字[94]8 号文件颁布了《农艺教育专业本科教学方案(试行)》(以下称《方案》)在全国农业技术师范院校和普通高校职业教育系(部)试行。这一《方案》是在科学总结多年来农艺教育专业教改实践的基础上，按照高等农业技术师范教育的特点和规律、以专业为单位全面系统改革的试验，是近年来高等农业技术师范教育重大的改革成果。

该专业的教材建设不但是全面实施《方案》的保证，而且也是巩固高等农业技术师范教育教改成果，继续深化改革和真正办出特色的需要。为此国家教委师范教育司把农艺教育专业教材建设作为一项基础工程来抓，自始至终亲自领导了整个教材编写过程。

高等农业技术师范教育工作委员会根据国家教委师范教育司的要求于 1994 年 5 月在安徽农技师院组建了由 13 人组成的高等农业技术师范教育教材指导委员会，并举行了工作会议。会议对各院校多年来试用、代用的教材和讲义进行了分析和评价，全面总结了教材建设经验。为保证教材建设科学有序地进行，会议制定了教材建设规划、实施计划和编审工作规程。本着各院校自愿申报、公开竞争、专家评议、师范教育司批准来确定参编人员的原则，会议布置了遴选编审人员的工作。

1995 年 2 月在东北农业大学召开了农艺教育专业教材建设评选会议，会上由教材指导委员会聘请 10 名有关学科专家，对参编人员提出的各教材的“编写大纲”进行认真地评审。会议通过专家评审和领导协调确定了 28 种教材的编写人员，组建了编写组。1995 年 6 月国家教委师范教育司以教师司(95)46 号文件印发了《农艺教育专业教材编写人员名单及出版规划》的通知。1995 年 5 月又在河南职业技术学院召开主编工作会议，与会人员再次认真学习国家教委关于高等教育改革的有关精神，深入领会《方案》，进一步明确教材编写的指导思想，完善了各门教材的编写大纲，较好地解决了课程间的分工和衔接问题，帮助主编在专业整体教学层次而不是在本门课程的层次上研究了教材的内容和要求。会后教材编写工作进入了实施阶段。

这套教材适于全国高等农业技术师范院校和普通高等农林院校师范教育学院(系、部)的农艺教育专业使用，高等农业职业学校也可借用，其中的基础课教材还可供园艺教育、畜禽生产教育等专业使用，本教材也可作为农林专业技术人员、中等专业学校和中等职业学校的参考用书。

高等农业技术师范教育是一个新兴的教育门类,在教育、教学方面有很多问题需要我们不断地探索,我们组织编写这套教材,就是在教学上进行的一次较大规模整体改革的探索,但是能不能准确地体现高等农业技术师范教育的特定培养目标和培养规格的要求,尚需实践的检验。为此,肯请同行专家、应用本套教材的广大师生以及广大读者提出宝贵意见,以便提高我们的教材建设水平,进而促进高等农业技术师范教育水平的提高,以更好地适应我国职业教育事业发展的需要。

全国高等农业技术师范教育教材指导委员会

2001年6月

# 目 录

绪论 .....	(1)
----------	-----

## 静力学

<b>第一章 静力学基础</b> .....	(3)
第一节 静力学基本概念和公理 .....	(3)
第二节 约束与约束反力 .....	(5)
第三节 物体的受力分析和受力图 .....	(9)
小结 .....	(12)
思考题 .....	(12)
习题 .....	(13)
<b>第二章 汇交力系与力偶系</b> .....	(16)
第一节 力在坐标轴上的投影与合力投影定理 .....	(16)
第二节 汇交力系的合成及平衡条件 .....	(18)
第三节 力矩 .....	(20)
第四节 力偶及其性质 .....	(25)
第五节 力偶系的合成与平衡 .....	(28)
第六节 力的平移定理 .....	(30)
小结 .....	(30)
思考题 .....	(31)
习题 .....	(32)
<b>第三章 力系的简化和平衡方程</b> .....	(36)
第一节 平面任意力系向作用面内一点简化 .....	(36)
第二节 平面任意力系平衡条件和平衡方程 .....	(38)
第三节 物体系的平衡·静定和静不定问题 .....	(42)
第四节 平面简单桁架内力计算 .....	(45)
第五节 空间任意力系的简化 .....	(48)
第六节 空间任意力系的平衡方程 .....	(52)
第七节 平行力系中心·重心 .....	(55)
小结 .....	(61)
思考题 .....	(62)
习题 .....	(63)
<b>第四章 摩擦</b> .....	(71)

第 一 节 滑动摩擦	(71)
第 二 节 摩擦角与自锁	(73)
第 三 节 考虑摩擦时物体的平衡问题	(74)
第 四 节 滚动摩擦	(76)
小 结	(78)
思考题	(79)
习 题	(79)

## 运动学

<b>第五章 点的运动</b>	(84)
第一节 点的运动方程	(84)
第 二 节 点的速度和加速度	(86)
小 结	(97)
思考题	(98)
习 题	(98)
<b>第六章 刚体的基本运动</b>	(101)
第一节 刚体的平动	(101)
第 二 节 刚体的定轴转动	(102)
第 三 节 定轴轮系的传动比	(107)
第 四 节 角速度和角加速度矢量, 以矢积表示点的速度和加速度	(110)
小 结	(112)
思考题	(112)
习 题	(113)
<b>第七章 点的合成运动</b>	(115)
第一节 绝对运动、相对运动和牵连运动	(115)
第 二 节 速度合成定理	(117)
第 三 节 牵连运动为平动时的加速度合成定理	(120)
第 四 节 牵连运动为转动时的加速度合成定理·科氏加速度	(124)
小 结	(130)
思考题	(131)
习 题	(132)
<b>第八章 刚体的平面运动</b>	(138)
第一节 平面运动分解为平动和转动	(138)
第 二 节 用基点法、速度投影定理求平面图形上各点的速度	(140)
第 三 节 用瞬心法求平面图形上各点的速度	(143)
第 四 节 用基点法求平面图形上各点的加速度	(148)

小结 .....	(155)
思考题 .....	(155)
习题 .....	(157)

## 动力学

引言 .....	(162)
<b>第九章 质点运动的微分方程</b> .....	(163)
第一节 动力学的基本定律 .....	(163)
第二节 质点运动的微分方程 .....	(164)
第三节 质点动力学的两类基本问题 .....	(165)
小结 .....	(169)
思考题 .....	(170)
习题 .....	(170)
<b>第十章 动量定理</b> .....	(174)
第一节 动力学普遍定理的概述 .....	(174)
第二节 动量和力的冲量 .....	(175)
第三节 动量定理 .....	(177)
第四节 质心运动定理 .....	(183)
小结 .....	(186)
思考题 .....	(187)
习题 .....	(188)
<b>第十一章 动量矩定理</b> .....	(192)
第一节 动量矩 .....	(192)
第二节 动量矩定理 .....	(194)
第三节 刚体绕定轴转动的微分方程 .....	(200)
第四节 刚体对轴的转动惯量 .....	(202)
第五节 刚体平面运动微分方程 .....	(206)
小结 .....	(209)
思考题 .....	(211)
习题 .....	(212)
<b>第十二章 动能定理</b> .....	(218)
第一节 力的功 .....	(218)
第二节 动能 .....	(222)
第三节 动能定理 .....	(225)
第四节 功率·功率方程 .....	(231)
第五节 势力场和势能·机械能守恒定律 .....	(232)



第六节 普遍定理的综合应用 .....	(235)
小结 .....	(238)
思考题 .....	(239)
习题 .....	(240)
<b>第十三章 达朗伯原理 .....</b>	<b>(245)</b>
第一节 惯性力·达朗伯原理 .....	(245)
第二节 惯性力系的简化 .....	(248)
第三节 动静法应用举例 .....	(251)
第四节 转动刚体的轴承动反力·静平衡和动平衡的概念 .....	(254)
小结 .....	(256)
思考题 .....	(257)
习题 .....	(257)
<b>第十四章 虚位移原理 .....</b>	<b>(261)</b>
第一节 约束和广义坐标 .....	(261)
第二节 虚位移和虚功 .....	(264)
第三节 虚位移原理 .....	(266)
第四节 动力学普遍方程 .....	(271)
小结 .....	(275)
思考题 .....	(276)
习题 .....	(276)
<b>第十五章 机械振动基础简介 .....</b>	<b>(279)</b>
第一节 概述 .....	(279)
第二节 单自由度系统的自由振动 .....	(280)
第三节 计算固有频率的能量法 .....	(287)
小结 .....	(290)
习题 .....	(290)
<b>附录 习题答案 .....</b>	<b>(292)</b>

## 绪 论

工程力学包括理论力学和材料力学两部分，这两部分都是工程设计中最基本的知识。

理论力学是研究机械运动一般规律的科学。物体在空间的位置随时间的改变，称为机械运动。机械运动是人们在生活和生产实践中最常见的一种运动，平衡是机械运动的特殊情况。材料力学的主要任务是研究构件在外力作用下的变形规律和材料的力学性能，从而建立构件满足强度、刚度和稳定性要求所需的条件，为安全、经济地设计构件提供必要的理论基础和科学的计算方法。因此工程力学即是自然科学的理论基础，又是现代工程技术的理论基础。在日常生活和生产实际中具有非常广泛的应用。

理论力学内容分为静力学、运动学和动力学三部分：静力学主要研究受力物体平衡时作用力所应满足的条件；同时也研究物体受力的分析方法及力系简化的方法等。运动学只从几何观点研究物体的运动规律，而不研究引起物体运动的原因。动力学是研究作用于物体上的力与运动变化之间的关系。

材料力学的内容主要包括：分析并确定构件所受各种外力的大小和方向；研究在外力作用下构件的内部受力、变形和失效的规律；提出保证构件具有足够强度、刚度和稳定性的设计准则和方法。强度是指构件在载荷作用下抵抗破坏的能力；刚度是指构件在载荷作用下抵抗变形的能力；稳定性是指构件在载荷作用下保持其原有平衡形态的能力。

工程力学的发展与生产、科学研究紧密地联系着，我国历代劳动人民有很多发明创造，为人类社会的进步做出了杰出的贡献。在我国古代工程力学就有过辉煌的发展，如都江堰、长城、赵州桥的修建，表明我国很早以前，工程力学的水平就居于世界前列。中华人民共和国成立以来，社会主义建设事业取得了突飞猛进的发展，人造地球卫星的发射和回收中的力学课题的解决，表明了我国工程力学的水平已跃进了世界先进行列。面临 21 世纪，现代机械向着高速、高效、精密的方向发展，许多高新技术工程如各种机械、设备和结构的设计，机器的自动控制和调节、新材料的研制和利用等，都对工程力学提出了许多迫切要求解决的问题，所以生产的发展推动了工程力学的发展，工程力学的发展又反过来促进了生产的发展。

同任何一门科学一样，工程力学的研究方法也遵循认识过程的客观规律。即从观察、实践和科学实验出发，经过分析、综合和归纳，总结出最为基本的概念和规律；在对事物观察和实验的基础上，经过抽象建立起力学模型，作出表征问题实质的科学假设，然后进行推理和数学分析，得出正确的具有实用意义的结论和定理，构成工程力学理论。然后再回到实际中去验证理论的正确性，并在更高的水平上指导实践，同时从这个过程中获得新的材料，这些材料的积累又为工程力学理论的完善和发展奠定了基础。

工程力学是一门理论性实践性较强的技术基础课。学习工程力学，可以为解决工

程问题打下一定的基础。同时工程力学与机械、土建等专业许多课程有密切联系，它以先修课程高等数学、物理等为基础，并为机械原理、机械零件、结构力学等其它技术基础课和专业课提供必要的理论基础和计算结果。学习工程力学可以为一系列后续课程的学习打下重要的基础。

工程力学的分析和研究方法在科学研究中具有一定的典型性，通过工程力学的学习，有助于培养学生的辩证唯物主义世界观，培养正确的分析问题和解决问题的能力，使学生在整个学习过程中，逐步形成正确的逻辑思维，在获取知识的同时，学到科学的思想方法，培养创新能力。

工程力学的学习方法较高等数学、物理有所不同，一定要有工程观点，如理论研究与实验分析相结合的观点等。掌握把复杂的研究对象抽象为简单力学模型的技巧，掌握数学推理的技巧，在学习中不仅要理解数学推导过程，更要理解推导的结果，这样才能使所学的知识融会贯通，扩充与延伸，做到理论联系实际。

# 静力学

静力学是研究物体在力的作用下的平衡条件的科学。它的任务可归纳为以下二项：

一、物体的受力分析。即分析某个物体共受几个力，以及每个力作用线的位置、大小和方向。

二、力系的简化。作用在物体上的力往往是复杂的。通常把作用在物体上的一群力称为力系。若一个力系可以用另一个力系代替而不改变物体的原有状态，则称这两个力系等效。力系的简化就是将作用在物体上的力系代换为另一个与它等效且较为简单的力系。

三、研究力系的平衡条件。即研究物体平衡时，作用在物体上的力系所应满足的条件。

## 第一章 静力学基础

静力学的基本概念是从长期的生产实践和科学实验中总结概括出来的，是研究力系的简化和平衡的基础。本章将研究静力学的基本概念和静力学公理，以及约束和约束反力。

### 第一节 静力学基本概念和公理

#### 一、静力学基本概念

##### （一）力的概念

力是物体之间的相互机械作用。这种作用能使物体的运动状态发生改变，称为力的外效应；也可使物体发生变形，称为力的内效应。理论力学主要研究力的外效应，而内效应是材料力学研究的内容。

力的作用效果决定了二个要素，即力的大小、力的方向和力的作用点。因此力是一个矢量，用  $F$  表示。

在国际单位制中，力的单位是牛顿（ $N$ ），有时也以（ $kN$ ）作为单位。

$$1kN=1000N$$

##### （二）刚体

在力的作用下，其内部任意两点间的距离始终保持不变，这样的物体称之为刚体。它是一个抽象化的力学模型。实际上物体在力的作用下，都会产生程度不同的变形，因

此绝对的刚体是不存在的。但一个物体在力的作用下变形很小，不影响研究物体的实质，就可将其看成刚体。静力学研究的物体只限于刚体，故称为刚体静力学，它是研究变形体力学的基础。

## 二、静力学公理

静力学公理概括力的一些基本性质，是经过实践反复检验，被确认是符合客观实际的最一般的规律。是静力学全部理论的基础。

### (一) 力的平行四边形规则

作用在物体上的同一个点的两个力可以合成为一个力。合力也作用在该点；合力的大小和方向，由这两个力为边构成的平行四边形的对角线确定，如图 1-1。或者说合力等于原两力的矢量和，即

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

式中的“+”号为向量相加，即按平行四边形法则相加。它是力系简化的重要基础。

### (二) 二力平衡条件

作用在刚体上的两个力，使刚体保持平衡的必要与充分条件是：这两个力大小相等，方向相反，作用在一条直线上，如图 1-2 所示。

必须指出，对于刚体这个条件是即必要的又是充分的。但对于非刚体，这个条件是不充分的。例如：软绳受两个等值反向的拉力作用可以平衡，而受两等值反向的压力作用就不能平衡。工程中把只受两个力作用而处于平衡状态的构件称为二力构件（或二力杆）。二力构件上的两个力必须满足二力平衡条件。

### (三) 加减平衡力系公理

在已知力系上加上或减去一个平衡力系，并不改变原力系对刚体的作用效果。这个公理也只适用于刚体，这是力系简化的重要依据。

根据上述公理可以导出下列推论：

#### 推论 1 力的可传性

作用于刚体上某点的力，可以沿着它的作用线移到刚体内任意一点，并不改变该力对刚体的作用。此推论可由二力平衡公理和加减平衡力系公理导出，读者可以自己证明。

因此，对于刚体来说，力的作用点不再是力的三要素之一，它已为作用线代替。作用在刚体上的力矢可沿作用线移动，这种矢量称为滑动矢量。

#### 推论 2 三力平衡汇交定理

若一刚体上受三个力作用且处于平衡状态，其中两个力的作用线相交于一点，则

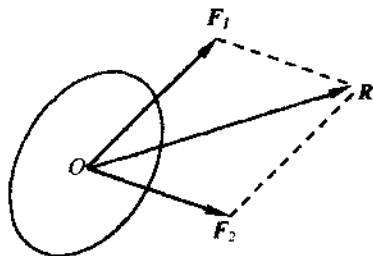


图 1-1

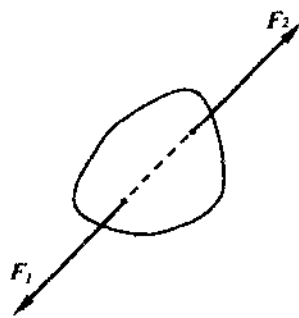


图 1-2

此三力必在同一平面内，且第三个力的作用线必通过汇交点。

证明 如图 1-3 所示，在刚体的  $A_1$ 、 $A_2$ 、 $A_3$  三点上，分别作用三个相互平衡的力  $\vec{F}_1$ 、 $\vec{F}_2$  和  $\vec{F}_3$ 。根据力的可传性，将力  $\vec{F}_1$  和  $\vec{F}_2$  移到汇交点  $O$ ，然后根据力的平行四边形规则，得合力  $\vec{R}$ ，则力  $\vec{F}_3$  应与  $\vec{R}$  平衡。由于两力平衡必须共线，所以力  $\vec{F}_3$  必与  $\vec{F}_1$  和  $\vec{F}_2$  共面，且通过其汇交点。

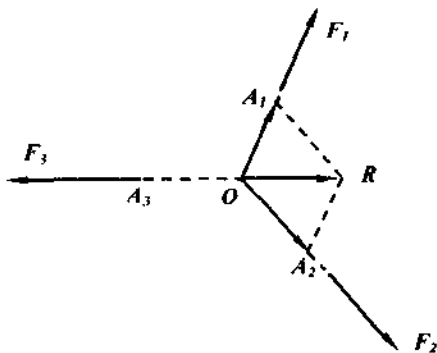


图 1-3

#### (四) 作用与反作用定律

两个物体之间的作用力与反作用力总是大小相等，方向相反，作用在同一条直线上。

在应用这个公理时，必须注意：作用力与反作用力同时存在，同时消失；分别作用在两个相互作用的物体上。

## 第二节 约束与约束反力

在力学中通常把物体分为两类：一类是自由体，它们的位移不受任何限制，例如鸟儿在天空中自由飞翔，鱼在水中自由游动；另一类称为非自由体，它们的位移受到了预先给定条件的限制，例如放在桌子上的书的位移受到桌面的限制，吊在电线上的灯泡的位移受到电线的限制，在工程结构中每一构件都根据工作的要求以一定的方式和周围其它构件相联系着，如图 1-4 所示，曲柄冲压机冲头受到滑道的限制只能沿垂直方向平动，飞轮受到轴承的限制只能绕轴转动，由以上分析引出约束和约束反力的概念。

### 一、 约束和约束反力

对非自由体的某些位移起限制作用的周围物体称为约束，或者说对某一构件的运动起限制作用的其它构件，就称为这一构件的约束，例如前面提到的桌面、电线、滑道、轴承等就分别是书、灯泡、冲头、飞轮的约束。

约束既然限制某一构件的运动，也就是说约束能够起到改变物体运动状态的作用，所以约束就必须承受物体对它的作用力，与此同时，它也给被约束物体以反作用力，这种力称为约束反力(或简称反力)。

约束反力是由于阻碍物体运动而引起的，所以属于被动力、未知力。静力学分析的重要任务之一就是确定未知的约束反力，例如轴承给轴的力，轨道给机车车轮的力等。约束反力的作用点在约束与被约束物体的接触点，它的方向总是与约束所能阻

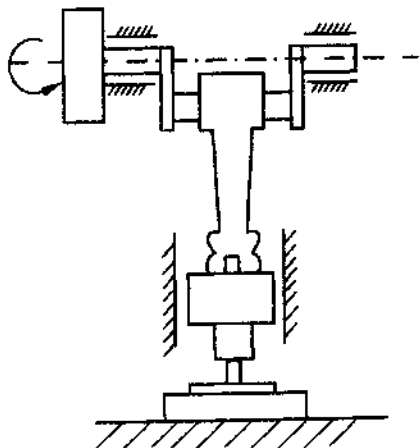


图 1-4

止物体的位移方向相反。根据约束的性质，有的约束反力方向可以直接定出，有的约束反力的方向则不能直接定出，要根据物体的平衡条件才能确定。至于约束反力的大小，一般是未知的，要由力系的平衡条件求出。

约束反力以外的其它力，能主动改变物体的运动状态，这种力称为主动力。如重力、气体压力等。

下面介绍几种常见的约束类型和确定约束反力方向的方法。

## 二、 约束的基本类型

### (一) 柔性约束

柔性约束由绳索、胶带或链条等柔软体构成，它们只能承受拉力而不能抵抗压力和弯曲(忽略其自重和伸长)，这种类型的约束称为柔性约束，所以柔性约束的约束反力只能承受拉力，其方向一定沿着柔性体的轴线背离物体，例如图 1-5 所示的用铁链吊起重

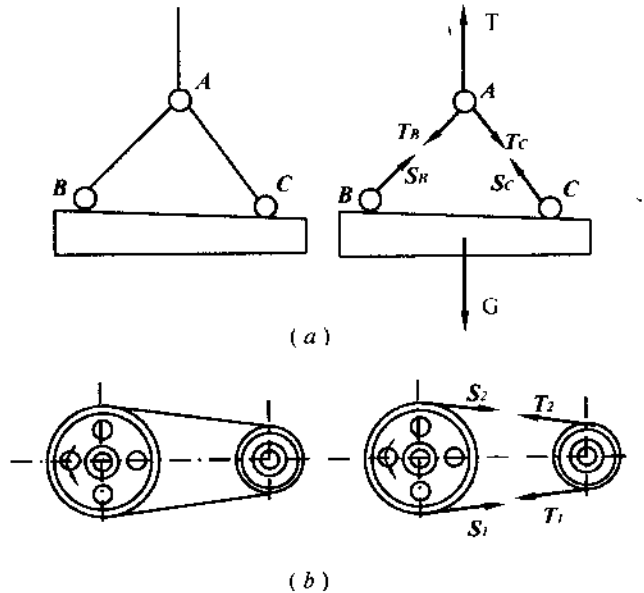


图 1-5

物，带轮所受的皮带拉力。

### (二) 光滑面约束

指两物体接触表面的摩擦忽略不计，接触面是光滑的。这类约束的特点是不论平面或曲面都不能阻碍物体沿接触面的公切线方向运动，只能限制物体沿接触面公法线方向运动，也就是说物体可以沿接触面滑动或沿接触面在接触点的公法线方向脱离接触，但不能沿公法线方向压入接触面，所以光滑接触面给被约束物体的约束反力的作用线沿接触面在接触点的公法线上，其方向指向被约束物体。

如物体受到光滑面的约束[图 1-6(a)], 约束反力就沿接触面的公法线方向指向被约束的物体, 接触点就是约束反力的作用点。又如图 1-6(b)所示的凸轮机构, 如将凸轮看成是顶杆的约束, 当接触面光滑时约束反力亦在接触处指向上, 在齿轮传动时相啮合的一对轮齿以它们的齿廓相接触, 如不计摩擦可以认为是光滑接触[图 1-6(c)], 约束反力沿

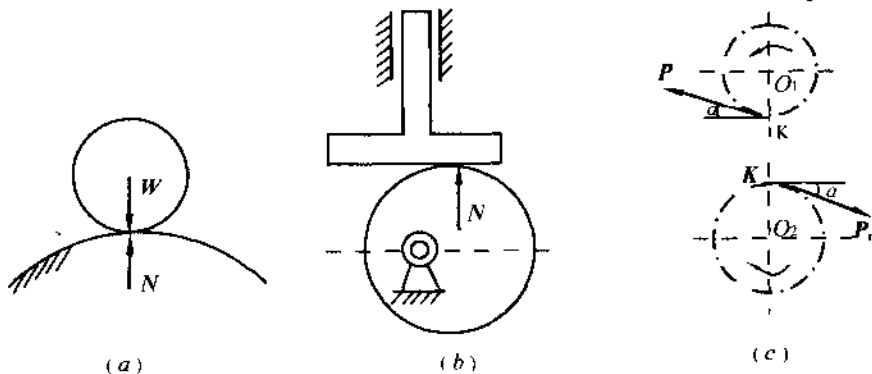


图 1-6

两轮齿廓接触点的公法线。

### (三)光滑铰链约束

通常由一个圆孔套在一个圆轴外面构成光滑铰链约束, 它在工程中有多种具体形式, 现将其中主要的几种分述如下。

1. 圆柱形销钉连接: 两个零件的连接处用销钉连接起来, 或用一个销钉将两个或更多个零件连接在一起, 形成一个统一的关节(例如合页)就构成圆柱形铰链, 而销钉就

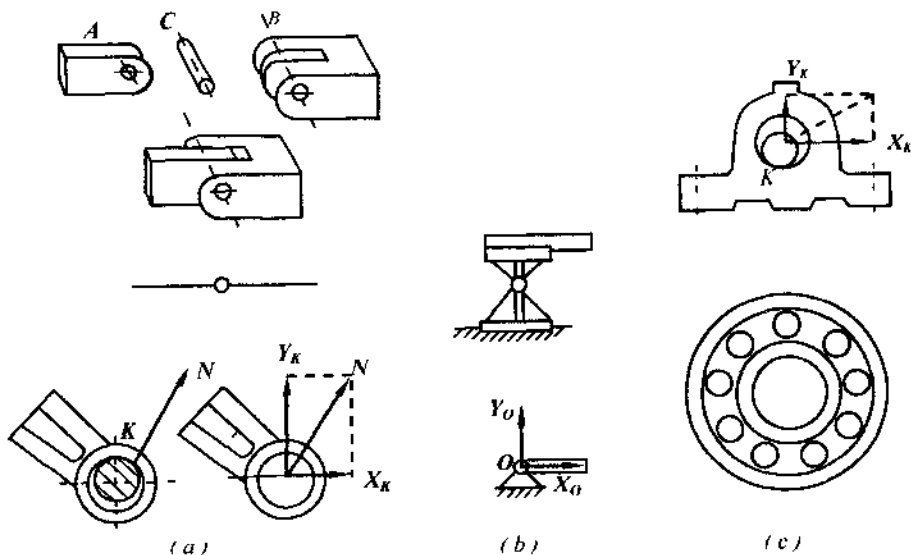


图 1-7



是两个零件的约束，它只限制两零件的相对移动而不限制两零件的相对转动[图 1-7(a)]，代表符号“O”，销钉给零件的反力用  $\vec{N}$  表示，反力  $\vec{N}$  的方向应该沿圆柱面在接触点  $k$  的公法线上(即销钉  $k$  的半径方向)，通过铰链中心，指向被约束的物体，但销钉与零件接触点位置是随作用力的方向改变而改变的，当主动力尚未确定时其约束反力  $\vec{N}$  的方向不能预先定出，然而，无论约束反力朝向何方，它的作用线必垂直于轴线并通过销钉中心。在受力分析时将圆柱型销钉的反力分解为两个互相垂直的分力  $\vec{X}_k$  和  $\vec{Y}_k$ ，反力的作用线一定通过销钉的中心，如图 1-7 (a) 所示，铰链约束反力的大小、方向、作用线均是未知而待求的量。工程上采用圆柱型铰链连接的实例很多，如曲柄连杆中的曲柄与连杆、连杆和滑块都是用铰链连接的。

2. 固定铰支座：用铰链把零件、构件同支承面(固定平面或机架)连接起来，这种连接方式叫固定铰支座，如图 1-7(b)所示。约束反力与圆柱型铰链约束反力相同，也是用通过铰链中心且相互垂直的两个分力来表示，该反力的大小、方向和作用线均为待求量。

3. 滚动支座：在桥梁和其它工程结构中，经常采用滚动支座，如图 1-8 (a)所示。这种支座中有几个圆柱滚子可以沿固定面滚动，以便当温度变化而引起桥梁跨度伸长或缩短时，允许两支座间的距离有微小变化，显然这种滚动支座的约束性质与光滑接触表面相同，其约束反力必然垂直于固定面，其简图及约束反力方向如图 1-8b。滚动支座与光滑接触面之间区别在于这种支座有特殊装置，能阻止支座离开接触面(支承面)方向运动，所以活动铰支座可以看作双向约束，反力方向有时也向下，和主动力的方向有关。

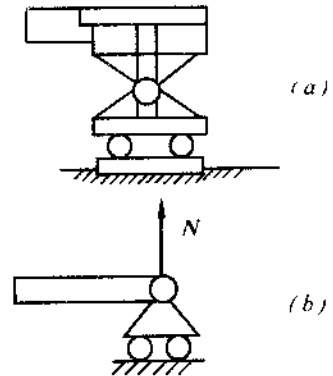


图 1-8

4. 向心轴承：包括向心滑动轴承和向心滚动轴承，如图 1-7(c)所示，只限制轴的移动而不限制轴的转动，这约束性质与铰链相同，所以向心轴承的反力也用两个正交分力  $\vec{X}_k$ 、 $\vec{Y}_k$  来表示。

5. 球形铰链约束：其结构如图 1-9 所示，杆端为球形，它被约束在一个固定的球窝中(简称球铰)，球和球窝半径近似相等，球心是固定不动的，杆只能绕此点在空间任意转动，与圆柱铰链约束类似，球和球窝的接触点的位置不能由约束的性质来决定，而取决于被约束物体上所受的力，但是可以肯定的是在光滑接触的情况下，约束反力的作用线必通过球心，通常把它沿坐标轴分解为三个正交分力，用  $X_0$ 、 $Y_0$ 、 $Z_0$  表示如图 1-9 (b) 所示。

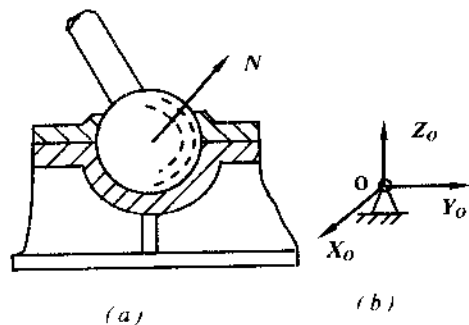


图 1-9