序

居今日而欲致國家於富强之林，登斯民於康樂之境，其道無他，要在教育、文化、經濟諸方面力求進步而已。自然科學之研究與發展，屬於文化領域之一環，同時亦爲國防建設之主動力，其在教育設施方面，實佔有甚大之比重，久爲識者所共喩。

巴西華僑徐君銘信，身繫異邦，心縈祖國，鑒於自然科學之發展與夫建國前途所關之鉅，嘗思盡一己之力，爲邦人士格物致知之助。比年以來，其慨捐於國內學術機構者，固已爲數不貲，前歲之冬，復搜購德國著名函授學校之數學、物理、化學、生物等優良課本約五百萬言寄臺，經東海大學吳校長德耀與淵院長步頤之介紹，欲以迻譯刋行，嘉惠學子之任，委諸元吉，自維學殖荒落，本不敦敢，惟感於徐君所見者大，所志者遠，殊不宜過拂其意，爰勉受義務主編及統籌出版之命。嗣經先後約請江鴻（數學總執筆人）、宋彤、李煥燊、南登岐、孫廣年(物理學總執筆人)、張壽彭、陳喜棠、許巍文、黃友訓、傅貽椿、熊俊（生物學總執筆人）、廖可奇、劉泰庠、鍾恩龍、關德懋（以姓氏筆劃爲序）諸君分任迻譯，其事遂舉。顧以個人精力時間，均屬有限，一年以還，竭知盡能，時以能否符合信達雅之準則爲慮，幸賴各方碩彥陳力就列，各自靖獻，得如預期出書，以餉讀者，實爲元吉精神上莫大之收穫。今後倘蒙文教先進及讀者不吝匡翼，俾在吾國科學發展史上日呈緝熙光明之象，遂徐君之初願於萬一，並使其今後仍就此途徑邁進之志事，（徐君近復精選英文本初級科學百科全書，交由科學勵進中心* 譯印。）永感吾道不孤，邪許同聲，則尤元吉一瓣心香，朝夕禱祝者也。茲值本書出版伊始，謹誌涯略，並向協助譯印諸君子敬致感謝之忱。

中華民國五十一年元月湯元吉序於臺北

*該中心爲一不以營利爲目的之財團法人，其宗旨在於促進科學教育、發展科學研究及介紹科學新知。現任董事爲李熙謀、錢思亮、趙連芳、林致平、徐銘信、李先聞、戴運軌、鄭堃厚、湯元吉等九人。

ZU492/115

徐氏基金會啓事

一、凡對本書任何一部分，或本會所印行之其他書籍，能在內容及文字方面，提供建議，致使讀者更易迅捷了解書中意義者，如被採納，當致酬美金十二元五角(折合新臺幣五百元)至一百二十五元（折合新臺幣五千元），以示謝意。

二、本會誠徵關於自然科學及機械、電機、電子等工程之中文創作或翻譯稿件，以適合於一般人士或中等學校以上學生自修之用者爲標準。稿費每千字美金二元五角（折合新臺幣一百元），特優譯著稿酬另議。

三、茲爲獎酬本會出版各書之作者及譯者起見，將於各書出版後之次年年底，核計其在臺灣、香港及星加坡三處之銷售數量，分配贈與其作者或譯者以下列三項獎金：

1. 銷數最多者美金6,000元

2. 第二多數者美金4,000元

3. 第三多數者美金2,000元

關於上開一、二兩項事宜，請逕函香港郵政信箱 1284 號徐氏基金會接洽。

編 輯 要 旨

一・本叢書包括數學、物理、化學、生物等四種。

二・本叢書物理、化學、生物等三種，均係採用德國魯斯汀(Rustin)函授學校之課本；數學一種，則係採用德國馬特休斯(Mathesius)函授學校之課本，分別遴請專家迻譯。

三・本叢書之供應對象，主要爲中等以上學校之學生、自行進修人士及從事教授各該有關課業之教師，故其內容亦以適合上述各界人士之需要爲主旨。

四・原書內於每一相當節段，均附有習題、複習題、試題及論文作業等，可使在學者增加反覆研討之機，自修者亦易得無師自通之樂。本叢書對於前三者均已予以保留，俾利讀者之研習。至於論文作業題目，本係該函授學校對於所屬學生之另一種教學措施，學生於作成論文後，校方尙需負修改之責，與本叢書旨趣未盡相同，故均於正文內予以省略，惟爲存眞起見，一俟本叢書出齊後，當彙印單行本，以供讀者參考。

五・本叢書因係依據原書格式譯輯而成，故未能於每一學科之首册中編列總目，擬俟全書出齊後，另行編印專册，以供讀者檢閱。

六・本叢書數學原文，每講約爲六萬字，而其餘各書字數自二萬餘字至四萬餘字不等，且各講自成段落，不能分割，故爲便利讀者及減輕讀者負擔，只能將其每二講或三講合印爲一册，字數遂在七萬餘字至九萬餘字之間。

七・本叢書所有各種科學名詞，一律採用國立編譯館輯譯，教育部審

定公布之名詞；但主編者認爲必要時，亦偶用其他譯名代替之；其爲上述公布名詞中所無者，則出於主編者或譯者之創擬。該項替代或創擬之名詞，是否妥善無疵，未敢自是，尙冀海內專家學者不吝賜教。

八・本叢書之迻譯工作係由多人執筆，行文屬辭，難免各具風格，主編者能力時間，均屬有限，故雖竭智盡慮，勉爲整理，亦僅能使其小異而大同，尙祈讀者諒之。

九・本叢書原文篇帙浩繁，約近五百萬字，出版須依一定進度，編者勢難將譯文與原文逐一核對，倘有未盡妥洽之處，亦請讀者隨時指教，俾於再版時更正，幸甚幸甚！

主編者謹識

數學第十五册目錄

上册　　數　　頁數

下册　　體　　任意角之三角函數

上 册 數

直角坐標系中之函數 $y=x^2$ 及其微分係數

我們已在第十四册中之〔61〕節有所說明，函數方程式 $y=x^2$ 之數字亦可當作**量的量度數**看待，同時利用這種量的圖解，更可使我們對函數及其微分係數一目了然。所謂圖解，卽使函數與直角坐標發生連繫之意，我們早已習慣如此做法了。先將用直角坐標表示函數的主要內容說明如下： 72

如所周知，如此坐標系的兩個軸是用長度單位分成若干等分（兩軸所用之單位一般是相同的，例如 cm），然後按照慣例賦予各分劃以正數及負數。

兩軸分劃之正數及負數究竟代表什麼？

首先是代表線段的量度數；例如在 X 軸分劃上的 $+5$，它是代表 X 軸上從坐標原點出發位於正方向而有 5 個長度單位的線段之量度數。至于爲什麼在每個分劃的旁邊祇寫量度數（例如 5），而不將所採用的長度單位 (cm) 寫出的理由，實因在純粹數學方面，這兩軸的部分線段，只不過是用以明白表示純粹數字的比率關係而已。如果我們觀察好比 X 軸上的分劃數字 1 及 5，或者 X 軸上的 1 和 Y 軸上之 5，則不論 1 是不是指 1 cm，和 5 是不是指 5 cm，那是無關緊要的；我們所要知道的祇是數字的比率 1:5 罷了，並且這種關係可用線段的比率 $1s:5s$ 表示出來，不管 s 的單位是什末，好比“米”或“吋”等等，則無論用 1 米與 5 米之比，或用 1 吋與 5 吋之比，結果還是 1:5。

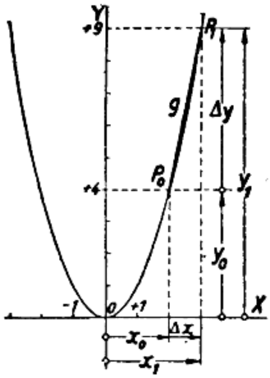
因爲在直角坐標系中所能表達的祇是線段的比率關係，所以這種圖解法可用以比較任何大小或數量，例如面積的大小，時間的長短等。

本節內我們使用直角坐標系的目的，祇在利用線段比率以表達或顯示純數字關係而已。

在純粹數字之間應有的關係，拿本節所討論的來說，乃決定於函數方程式 $y=x^2$ ：每一個 y 數是代表所屬 x 數的二次冪；例如 $y_1=+9$ 是代表 $x_1=+3$ 的平方。故就此二數字 9 及 3 相互間的聯帶關係而論，我們只要將含有量度數 9 及 3 的二線段配合在同一圖上（例如使 $y_1=9cm$ 及 $x_1=3cm$），便可具體顯示出來。至於如何使此二線段妥爲配合（即引二軸之平行線），又如何個別的決定 $X-Y$ 平面上一點之位置，以及如何由這些點畫成平方拋物線等等，（參閱第九册中之〔846〕節）都是各位所熟習的！

用這種圖解法表示函數 $y=x^2$ 所形成的圖形（參看〔72 a〕圖），爲什麼完全不同於上册〔61〕節對函數 $F=a^2$ 所表示之圖形？——假如 x 和 y 及 a 和 F 都是純粹數字，則此二函數並無區別，只所選用之字母不同而已；故不論一般以 a 或 x 表示級數 1，2，3…… 之數字，又用 F 或 y 表示所屬二次冪級數 1，4，9，…… 之數字，那是無所謂的。但上册〔61〕節及本節所用圖解法，却有很大的差別：在〔61〕節是用正方形面積表示數字 F，即 a 之二次冪；但在本節却用 Y 軸的局部線段而不是用面積表示 a 的二次冪（現在稱爲 y）。我們不要被通常的說法"三的平方"（即 3^2）所迷惑，誤以爲在直角坐標系中 3 的平方（即 9）可用正方形來表示。不是的，這個 9 在此已變爲線段的量度數，即Y 軸部份線段的量度數！至此應該明白了，因爲〔61〕及本節的表示方法完全不同，所以顯出的圖形當然也是兩樣的。

到目前爲止，我們祇是把以前所講過的加以溫習而已。現在我們要問：在直角坐標系中除了函數 $y=x^2$ 以外，如何也可以把上册〔60〕節中所求得的差比及微分係數用圖表示出來？在〔61〕節裏我們已能把差數 ΔF 當作長方形，把差比及微分係數當作長方形的邊，亦即當作線段來表示。因此之故，本節所用性質完全不同的圖解法，對於函數 $y=x^2$ 的差比及微分係數勢必亦將產生完全不同的圖形，是可以預料得到的。



72 a

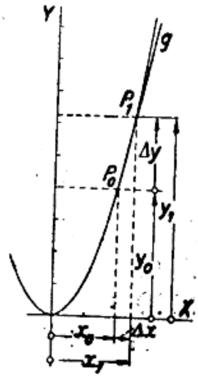
在〔72 a〕圖中，假定 P_0 是曲線$y=x^2$ 上一個任意點，其坐標亦假定爲 $x_0=+2$，$y_0=(+2)^2=+4$，簡寫爲：$P_0\begin{cases}x_0=2\\y_0=4\end{cases}$。假如對 $x_0=2$ 加上一個增量 Δx，例如 $\Delta x=1$，並且畫出所屬的曲線點 $P_1\begin{cases}x_1=3\\y_1=9\end{cases}$，那末便可看出，屬於 P_1 的縱標（參閱第八册中之〔750〕節）乃是由 y_0（即 P_0 之縱標）及增量 Δy_0（在〔72 a〕圖中未附指數）所組成之和數。此一增量及其與 Δx 之比率，可仿照第十四册〔59〕節所用之方法求之（各位要儘可能的把下面計算出來的各值與〔72 a〕圖作一對照！）：

$$
\begin{array}{rcl}
y_1=y_0+\Delta y_0=(x_0+\Delta x)^2 & =x_0^2+2x_0\cdot\Delta x+(\Delta x)^2 & =9\\
y_0 & =x_0^2 & =4\\
\hline
\Delta y_0= & 2x_0\cdot\Delta x+(\Delta x)^2 & =5\\
\dfrac{\Delta y_0}{\Delta x}= & 2x_0 \quad + \quad \Delta x & =\dfrac{5}{1}
\end{array}
$$

實則這個差比$\dfrac{\Delta y_0}{\Delta x}$在〔72 a〕圖中並不是如此顯示出來，所以我們並不能在圖上直接指出：這就是$\dfrac{\Delta y_0}{\Delta x}$，實際上它是由通過 P_0 與 P_1 二點所作割線 g 與 X 軸所成之斜率，說得更正確些，它是由 g 與 X 軸相交之角的正切值表達出來，在〔72 a〕圖中各位幾乎一目了然，因此亦易於了解下面這幾點：1）一個 $(x_0+\Delta x)$ 級數的第零項 (x_0) 及第一項是當作橫標表示出來，2）一個 $(y_0+\Delta y_0)$ 級數的第零項 (y_0) 及第一項是當作縱標表示出來，3）一個$\dfrac{\Delta y_0}{\Delta x}$級數的第一項是當作傾斜值（即割線 g 之正切）表示出

來。

爲了要求得這些級數裏每一級數的第二項起見，必須設計一個新的圖解才行（參看〔72 b〕圖）。我們選用 $\Delta x=0.5$，但保留〔72 a〕圖的 x_0 及其他一般記號。計算方法與上面完全相同。（請各位從頭到底詳細的做一做！）：$\frac{\Delta y_0}{\Delta x}=4.5$。此一差比可由通過 P_0 及 P_1 所作割線 g 的斜率明白看出。爲求每一個相續的差比一目了然起見，似應每次都作新的圖解：卽保留 P_0，但逐步選用較小的 Δx；實則祇須抽象的運用思考爲之，比用圖來表示要準確多了。現在我們明白的指出：

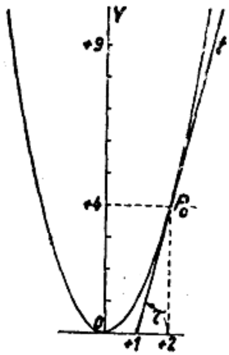


72 b

選用愈小的 Δx，則曲線上的 P_1 點就愈接近於 P_0。但在任何情況下，通過 P_1 及 P_0 所作割線的斜率必等於 $\frac{\Delta y_0}{\Delta x}=2x_0+\Delta x$。最後必將到達 $\frac{\Delta y_0}{\Delta x}$ 級數之極限值：$y'_0=\frac{dy_0}{dx}=2\cdot x_0=2\times 2=4$。

至於在此過程中可以略去被加數 Δx（但不是 $\frac{\Delta y_0}{\Delta x}$ 之分母 Δx），則可由下面的具體考慮推論而得：各位只要設想整個圖形之放大是與每次 Δx 之縮小有聯帶作用的，也就是說，各位只要使放大圖形之線段 Δx 和未放大時一般大小就行了。各位最好根據上述之例，將此情形畫出圖來看看，便容易確定：$\frac{\Delta y_0}{\Delta x}$ 的比率乃隨圖形的變化逐漸接近於 4：1 之值；因此，假如說要略去分數 $\frac{\Delta y_0}{\Delta x}$ 的分母的話，那是毫無意義的。反之，被加數 Δx 對於另一加數 $2x$ 而言，則將愈來愈不足重視，故在此情形下，因爲 Δx 已小到無可再小，遂可將其略去。

現在我們要問：如何可使 $\frac{dy_0}{dx}$ 的極限值在上面所述抽象之圖形內明白表示出來（參看〔72 c〕圖）？ P_1 與 P_2 兩點之間的距離已變爲零，卽兩點已重合爲一；割線已變爲 P_0 點上的切線 t，其斜率正好等於 $\frac{2\times 2}{1}=\frac{2x_0}{1}=2x_0$；如稱切線與 X 軸相交之角爲 τ（參閱第一册中之〔100〕節），卽可寫成下式：



72 c

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=tg\,\tau}$$

由此可見，在 P_0 緊靠平方拋物線所作切線之斜率 $tg\tau$，乃是一個對函數 $y=x^2$ 的微分係數，質言之，卽對特殊情形〔x_0； $y_0=x_0^2$〕的一種醒目的表達方式。

到目前爲止，我們是把 P_0 點固定在一個位置上作爲研究對象。在下面的實驗級數中却要選用其他出發點：

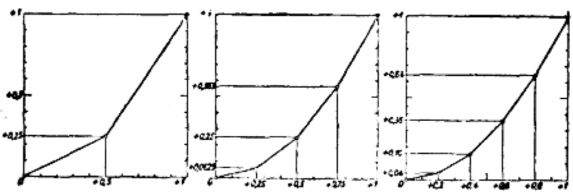
習　題：

試就上述的思想路線求 a) 以 $P_0=+1$ 作爲出發點，b) 以 $P_0=-2$ 作爲出發點的增量比（卽差比）！各位在任何情況下所求得的都是：$\frac{dy_0}{dx}=2x_0$。

因爲 P_0 可能爲曲線 $y=x^2$ 的一個任意點，而 x_0 可能爲該點的任意橫坐標，故最後略去指數 0，便可依照第十四册〔59〕節所講的一覽表求得曲線 $y=x^2$ 上每一點的導微函數 $y'=2x$，亦卽其差比級數的項之極限值。就圖形來說：微分係數在任何情況下都是代表我們就有關曲線點 $P\begin{cases}x\\y=x^2\end{cases}$ 依此曲線所作切線之斜率 $tg\tau$，而此切線在每個例子中都是被當作割線級數之極限情形

看待的。（此類割線係繞着 P_0 旋轉，直至與切線 t 重疊為一，然後不再旋動而止。）因曲線有無窮多的點，可選作割線的如此旋轉點，故亦可能有無窮多的 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 級數，由此產生無窮多的圖形，其中每一圖形都含有一個如上面所說的旋轉點，割線即以無窮多的不同方式繞着此點而旋轉。我們雖不能描繪如此多的圖形，但我們知道：假如通過曲線 $y=x^2$ 上無窮多點中任意一點，引此曲線之切線，則此切線之斜率必為 $2x:1$ 。由此可見，我們控制上面所講的無窮性，不是利用圖解，却是利用在算術上所定的有關法則和定律。各位至此諒必更加瞭解，我們對微分係數確立其定義時，為什麼祇採取計算方面的思想路線的理由所在了。

73 **曲線 $y=x^2$ 由割線及切線之近接作圖法**



73 a　　73 b　　73 c

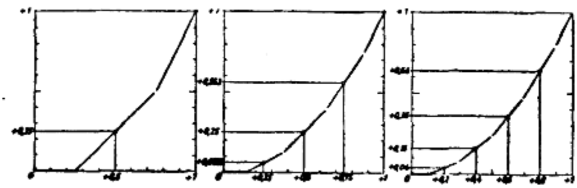
如上所述，我們是把微分係數 $y'=2x$ 當作無窮多的無窮級數中彼此相符的項之極限值看待的，而無窮級數則係依照有規律的方法從原始函數 $y=x^2$ 導引而來。這種双重的無窮性，亦可根據〔73*a* 至 *c*〕三圖所示之近接作圖法予以證明之：

在直角坐標系中介於 $x=0$ 與 $x=1$ 之間繪有平方拋物線 $y=x^2$ 的許多點，其位置是由任意選擇的橫標及其所屬縱標所決定（例如〔73 *a*〕圖： $x=0.5$; $y=0.5^2=0.25$ ）。這些拋物線點彼此間的距離是一圖比一圖的逐漸減小。每二相鄰點的連接直線都是割線的一段，在上節各圖中即以這些割線為出發點。在 $x=0$ 與 $x=1$ 之間算出和畫出的拋物線點愈多，則由割線各段所組成之折線，必愈接近於拋物線的形態，而拋物線却是一條連續彎曲的線。

這種使折線逐漸趨向連續彎曲線的變形，在我們的**想像中**（即在理論上）可以不受限制的，毫無止境的繼續下去；但就該三圖而言，我們却不能說眞會有這種情形發生，也就是說，折線是不會眞正變爲連續彎曲的拋物線的。

無窮性之成立亦可用另外一種說法，卽當無窮多的這些圖中每一個圖都可能是無窮大之時，此圖必須顯示全部拋物線才行。（以上各圖只不過顯示了其中一小部分而已。）

假如我們要從**切線**着手逐漸畫成平方拋物線的話，必須考慮上述的各種步驟。各位可能會表示驚異，如果我們現在要求各位畫拋物線的切線，而不先把拋物線本身畫出來的話。其實那是輕而易舉的，因爲我們只要知道切線所經過的接觸點及其斜率之大小就行了。



73 d　　73 e　　73 f

在〔73 d〕圖中，假定須先畫出經過 $P\begin{cases}x=0.5\\y=0.5^2=0.25\end{cases}$ 的切線。其斜率乃取決於微分係數 $y'=2x=2\times0.5=1=1:1$。這一切我們都可依照第八册〔759〕節所講的方法去進行描繪。

其次要畫的是經過 $P\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$ 的切線，其斜率爲 $y'=2x=2\times0=0$（這就等於橫坐標軸），最後是經過 $P\begin{cases}y=1\\x=1\end{cases}$ 畫切線，其斜率爲 $y'=2x=2\times1=2=2:1$。由此便形成了〔73 d〕的圖形；但在此圖中還很難看出接近拋物線的跡象。在〔73 e〕圖中，因爲我們畫了較多的切線，所以拋物線所屬各點已比較接近些。在〔73 f〕圖中則更爲接近了。奉勸各位，最好把這一連串的圖再加幾

條切線繼續畫下去，並且要用較大的比例尺。這樣一來，各位就可更清楚地看出，這些切線如何愈圍愈緊，愈益接近拋物線的形狀，雖然歸根結蒂不能變爲理想的拋物線。這種作圖法也暗示雙重的無窮性（卽一面使折線無止境的趨向於連續彎曲線，一面使無數之圖形中每一圖形都可變成無窮大。）但嚴格說來，它是永遠無法克服的。縱令熟練的繪圖人員對此折線的逐漸接近於拋物線，很快就會或應該感到滿足，但著重理論的數學家却胸有成竹，知道這種接近程度固可將其任意提高，但眞正的拋物線這樣是永遠畫不出來的。

由此可見，畫法幾何學（卽投影幾何）對此雙重無窮性的支配乃受有限制，故須以接近描繪法爲滿足；但算術方面（卽計算法）却能運用下面的算式以濟其窮：

$$y=x^2 \text{ 及 } y'=\frac{dy}{dx}=2x$$

附註：像這種現在又令我們前進了一步的算術，在數學上稱爲**無窮小解析學**或高等分析學。

74 函數 $y=a\cdot x^2$ 及其微分係數

在第十二册〔972〕……等節中，我們曾將函數 $s=0.45\cdot t^2$ 及其微分係數 $\frac{ds}{dt}=0.9t$ 提出討論。在此 t 是代表自變數（代替 x）以及 s 是代表因變數（代替 y）。當時我們是從物理學的錯綜關係中，把微分係數導引出來；現在，我們要根據第十四册〔59〕節所述的規則，祇用計算法來從事導引了。

首先在原始公式 $s=0.45\,t^2$ 中對於 t 添加一個增量 Δt；因此 s 也就獲得了一個增量，我們稱之爲 Δs；常數 0.45 則保持不變：

$$s+\Delta s=0.45\cdot(t+\Delta t)^2$$

$$=0.45\cdot t^2+2\cdot 0.45t\cdot\Delta t+0.45\cdot(\Delta t)^2\text{；我們用減法：}$$

$$s \quad =0.45\cdot t^2$$

$$\Delta s= \qquad 2\cdot 0.45t\cdot\Delta t+0.45\cdot(\Delta t)^2\text{；再以 }\Delta t\text{ 除之：}$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}= \qquad 2\cdot 0.45\cdot t+0.45\cdot \Delta t$$

現在，我們倘在一個級數中（其各項爲剛才所列形式之差比者），令差數 Δt 逐漸變小，則我們必愈益接近於早經在第十二册中所學過的極限值

$$\frac{ds}{dt}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=2\cdot 0.45t=0.9\,t$$

我們也可使 x^2 前面的一般因子作同樣的展開，好比對於函數方程式 $y=a\cdot x^2$：

$$\begin{aligned}
y+\Delta y &= a\cdot(x+\Delta x)^2=a\cdot[x^2+2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2]\\
&= a\cdot x^2+2ax\cdot\Delta x+a\cdot(\Delta x)^2\\
y &= a\cdot x^2\\
\hline
\Delta y &= \qquad 2ax\cdot\Delta x+a\cdot(\Delta x)^2\\
\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \qquad 2ax+a\cdot\Delta x
\end{aligned}$$

被加數 $a\cdot\Delta x$ 的本身是一個乘積，如果 Δx 逐漸變小，則 $a\cdot\Delta x$ 必愈來愈接近於 0，到了極限情形，更將歸於消失：

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}=\frac{d(a\cdot x^2)}{dx}=2ax$$

第十四册〔59〕節中所作之導引，可將其視作上式的特殊情形：$a=1$，於是我們祇要把下式作爲以上所述微分法中唯一的公式記住就行了：

$$\boxed{\frac{d\,(ax^2)}{dx}=\,2ax}$$

在第十六册中，我們將用圖解說明函數 $y=3x^2$ 的微分係數。也許各位現在就能獨立的把這函數展開試一試？

習　題：

1）試將函數 $y=0.5\,x^2$ 予以微分（意即：求此函數之微分係數）！

2） 試將函數 $y=0.5x^2$ 近似的畫於直角坐標系之內，並令二軸有相等的分割，且在理想的曲線 $y=0.5x^2$ 上引作許多切線！參閱〔73 f〕圖！

到了第十六册，我們將繼續講解微分學的計算方法，其中將首先對函數 $y=x^3$ 加以微分。各位暫且不用我們幫忙試試看！

下 册 體

任意角之三角函數

A） 正弦函數

I. $-\infty<\varphi<+\infty$ 正弦的週期 2π 75

在第十一及第十二兩册中，我們曾經學會了四種最重要的三角函數，卽：正弦、餘弦、正切及餘切；但當時祇使它們與直角三角形發生了連繫，因此所討論者只限於 $0°$ 與 $90°$ 之間的那些情形。甚至這兩種極限情形，因爲無法達到之故，亦未加以討論。

現在我們要問：如將三角學的範圍擴展到這些極限情形，以及擴展到大於 $90°$，甚至大於 $180°$ 的那些角（卽大於三角形三個內角之總和），再則擴展及於負角時，究竟有無意義？數學對於這個問題的答案是肯定的。因此，我們對於以上所講三角函數與三角形之間的連繫必須予以放寬，必須爲這些函數另外下一定義，使其適用於所有之角(卽所有介於 $-\infty$ 與 $+\infty$ 之間的角）才行。至於除了舊度與新度之外，同時還要用第十三册〔34〕節所講的“弧度”（以逕爲單位），則是我們要在此向各位預先說明的。

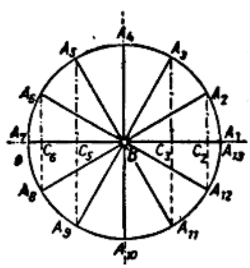
關於三角函數不受三角形之束縛，我們在第十一册〔934〕節以及第十二册〔954〕節中早已有所準備了，因爲我們已在各該節中，使那些函數和**單位圓**的第一象限發生了關係了。請各位先把以上關于這種定義所講過的一切，再詳細的溫習一遍（參閱第六册中之〔639〕節及第十三册中之〔34〕節）。

單位圓第一象限內之正弦函數

如前所述，正弦函數之定義爲：$sin\ \beta=\dfrac{\text{投影垂線}}{\text{半徑}}$。

又根據第十一册中之〔934 a〕圖：假定 β 角的固定零射線（卽始邊）爲水平射線 BC ；另外一邊繞着 B 旋轉，並且與圓周相交於 A 點；這個交點 A 則利用投影垂線 AC 投影於水平線上。（在任何情況下，我們只要考慮圓周與水平線之間的**一段**卽可。）於是 $\frac{\text{投影垂線}}{\text{半徑}}$ 之商就是 β 角的正弦。我們對此早已熟習的正弦定義，還要加以保留與運用。但我們過去僅將 β 角的活動邊由 $0°$ 轉到 $90°$ 就停止了，現在却擬不加限制，要使它在 $0°$ 與 $+\infty$ 之間，甚至在 $0°$ 與 $-\infty$ 之間旋轉。這樣一來，我們便可達到 $-\infty$ 與 $+\infty$ 之間任何一個角了。

對於每一個這樣的角，我們可在圓周上求得一個交點 A 之位置，而此交點可在第一及第二象限內從上向下投影於水平線上（往例如此），或在第三及第四象限內從下向上投影於水平線上（這是新法！）。因此，對於每一個 β 角我們遂得到一條垂直線段 AC ，又因半徑 r 是一個常數，故所得每個角的正弦比 $\frac{\text{投影垂線}}{\text{半徑}}$ 亦易於決定而且毫不含混。假如我們想決定這些正弦比的大小，就非先決定投影垂線的長短及其方向不可，並且還得注意所有要作比較的分數，其分母 r 必須是一個常數才行。此外還有一點頗爲重要：半徑在單位圓內當作量度單位是沒有正負號的，故以之代入算式之內時，應把它作爲正值看待。關於投影垂線之前號問題，一般公認：就正常位置而言，凡在水平線 BC 以上之投影垂線必爲**正號**；在水平線 BC 之下者，則爲**負號**。



75 a

在〔75 a〕圖中，是用半支點線（－・－・－・－）代表正號正弦線，又用短虛線（－－－－－）代表負號正弦線。由此可見，我們已將第十一册〔934a〕圖所示之表現方法擴展及於單位圓之四個象限。在〔75 a〕圖中，我們是把轉