

52593

高等學校教學用書

# 解析幾何學

第一卷 第一分冊

В. Н. ДЕЛОНЕ, Л. А. РАЙКОВ 著  
北京大學數學力學系幾何教研組譯



商務印書館



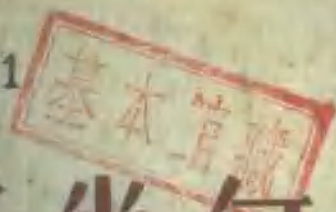
8137號註冊圖



代號 0730

定價 羊9,800

52591



# 學何幾析解

第一卷 第二分冊

В. Н. ДЕЛОНЕ, Д. А. РАЙКОВ 著  
北京大學數學力學系幾何教研組譯



商務印書館



8137號註冊商標



書號 52421 A 2

定價 ¥ 17,500

高等學校教學用書



# 解 析 幾 何 學

第一卷 第一分冊

54  
f

Б. И. 狄隆格, Л. А. 拉伊可夫著  
北京大學數學系幾何教研組譯

商 務 印 書 館

3132

52591

5/4973

中央人民政府高等教育部介紹  
T1544  
高等學校教學參考書



# 解 析 幾 何 學

第一卷 第二分冊

Б. Н. 狄隆涅, И. А. 拉伊可夫著  
北京大學數學力學系幾何教研組譯

商 務 印 書 館

本書係根據蘇聯技術理論書籍出版社(Государственное издательство технико-теоретической литературы)出版的狄隆涅(В. Н. Делоне)和拉伊可夫(Л. А. Райков)合著“解析幾何學”第一卷(Аналитическая Геометрия I)1948年版譯出。在蘇聯高等教育部1952年批准的大學數學力學系教學和力學專業一年級解析幾何學大綱裏，本書是主要參考書之一。

本書(第一卷)中譯本分第一、二分冊出版。第一分冊是全書的緒論，內容包括向量，笛卡爾坐標，仿射映射和交映射等。第二分冊講平面上的解析幾何，內容包括平面上的直線、橢圓、雙曲線、拋物線、二階曲線的一般理論。

本書(第一卷)由北京大學數學力學系幾何教研組諸同志集體翻譯。

## 解 析 幾 何 學

第一卷 第一分冊

北京大學數學力學系幾何教研組譯

★ 出版者 ★

商務印書館出版

上海南京路二一四號

(上海市書刊出版登記證：出證字第四二五號)

新華書店上海發行所總經售

商務印書館印刷廠印刷

上海南京路一九〇號

52121A1

1953年11月初版 1954年10月再版

版面字數 153,000 印數 6,001—8,500

定價 ¥9,800

本書係根據蘇聯技術理論出版社(Государственное издательство технико-теоретической литературы)出版的狄隆涅(В. Н. Делоне)和拉伊可夫(Л. А. Райков)合著“解析幾何學”第一卷(Аналитическая Геометрия I)1948年版譯出。在蘇聯高等教育部1952年批准的大學數學力學系數學和力學專業一年級解析幾何學大綱裏，本書是主要參考書之一。

本書(第一卷)中譯本分第一、二分冊出版。第一分冊是全書的緒論，內容包括向量，笛卡兒坐標，仿射映射和交映射等。第二分冊講平面上的解析幾何，內容包括平面上的直線，橢圓、雙曲線、拋物線，二階曲線的一般理論。

本書(第一卷)由北京大學數學力學系幾何教研室諸同志集體翻譯。

## 解 析 幾 何 學

第一卷 第二分冊

北京大學數學力學系幾何教研室譯

★ 版權所有 ★

商 務 印 書 館 出 版

上海馬路中弄二一一號

中國圖書發行公司 總經理

商 務 印 書 館 上 海 廠 印 刷

(52421A2)

1953年11月初版 版面字數272,000

印數1—6,000 定價¥17,500

上海市書刊出版營業許可證出〇二五號

## 序 言

這本解析幾何學教科書所依據的是本書作者之一 B. H. 狄隆涅在國立莫斯科大学數學力學系多次講授過的教程的見解，而且與莫斯科大学所採用的新的解析幾何學教學大綱相適應。

解析幾何學教程的構成可以有三種不同的原則。可以完全不運用變換的理論來編作教程。也可以在預備知識性質的前幾章以後，立刻引向射影幾何，而仿射幾何和量度幾何則作為射影幾何依次的特殊形式來研究。最後，也可以先作仿射幾何和量度幾何完全的敘述，直到最後才提出射影幾何。最後這一種構成有兩點有利之處：一是容易被接受，二是可以廣泛地發揮具有獨立特性的仿射幾何的觀點，而不僅把它當作射影幾何的特殊形式來處理。這一點特別重要，因為解析幾何與數學的那些主要部分例如分析（特別是泛函數分析）和代數的所有關係，主要是通過仿射和度量理論，而不是通過射影理論來實現的。在這本教程裏就採用這第三種構成原則。

本書的這一卷（第一卷）分成兩部分。第一部分有緒論的性質，它包含着平面和空間的情形裏所用到的關於坐標、向量和線性（仿射和正交）變換的一般的知識。第二部分講授平面上的度量的和仿射的解析幾何。第二卷（即將付印）將包含：第三部分，這是講授空間中的度量的和仿射的解析幾何，和第四部分，在那兒將敘述射影平面上和射影空間中的解析幾何。

大學的教科書不應該限制在必要的最小份量和過分束縛教員的能动性。所以除掉用大號字排印的包含教學大綱裏所採用的全部材料以外，還給了充分多的用小號字排印的材料。這些材料的一部分是關於基本問題的（例如，關於對偶的坐標系統、也就是關於反變和共變坐標的一節，關於非直角坐標情形的不變量的一節，等等）。別的部分講授

各種的補充知識，有時甚至是非常專門的（例如，平面面積計的理論，雙曲函數的理論，等等）。除此以外，在用大號字排印但是加上星號的各節裏，發揮了正交和仿射變換的純幾何的理論，並講述它在得出橢圓、雙曲線和拋物線的仿射和度量性質上的應用。同時，這本解析幾何學教程有充分長的篇幅充滿的不是解析幾何的而是綜合幾何的見解。然而，學過了這些東西的讀者，對正交和仿射變換的幾何本質以及二階曲線的仿射性質就會有更深入的認識。當然，敘述是這樣進行的，用大號字排印的材料完全不依賴用小號字排印的，而沒有星號的各節則完全不依賴有星號的各節。

解析幾何學教程材料進行的順序可以有各種的變化。我們所採用的各章排列的順序是有系統的，但是並不與國定教學大綱所採用的順序完全相符。例如，講述線性變換的第二章，它的幾何部分最早也得到第四章加星號的各節裏才是必要的，而它的解析部分甚至直到第五章裏才需要。所以第三章可以（和被建議）直接在第一章後面就讀。爲了讀者閱讀的方便，在好多地方都指出了所敘述的材料在那兒用到。

狄隆涅(В. Н. Делоне)

拉伊可夫(Л. А. Райков)

1917年6月27日於莫斯科

# 第一分冊目次\*

## 序言

## 第一部分 笛卡兒坐標、向量、線性變換 ..... 1

### 第一章 平面上和空間中的笛卡兒坐標和向量、二階和三階矩陣的幾何 ..... 1

#### 第一篇 笛卡兒坐標和向量：仿射關係 ..... 1

##### §1 坐標軸、平面上和空間中的笛卡兒坐標 ..... 1

1. 坐標軸 (1) 2. 平面上的笛卡兒坐標 (2) 3. 平面上的右和左坐標系統 (3) 4. 空間中的笛卡兒坐標 (4) 5. 空間中的右和左坐標系統 (6) 6. 一般的笛卡兒坐標、斜角坐標和直角坐標 (6)

##### §2 向量，它們的加法、減法和乘上數量的乘法 ..... 7

1. 向量，作為有順序的點偶或者有方向的線段 (7) 2. 向量的相等 (7) 3. 自由向量 (8) 4. 共線和共面向量 (9) 5. 向量乘上數量的乘法 (9) 6. 向量的加法和減法 (10) 7. 向量的線性組合 (11)

##### §3 笛卡兒坐標的向量引進法 ..... 11

1. 直線上向量的坐標和笛卡兒坐標的向量引進法 (12) 2. 平面上向量的坐標和笛卡兒坐標的向量引進法 (12) 3. 空間中向量的坐標和笛卡兒坐標的向量引進法 (14) 4. 一般的笛卡兒坐標，斜角坐標和直角坐標。基本的坐標平行四邊形和基本的坐標平行六面體 (15)

##### §4 直線上的向量 ..... 16

1. 直線上向量乘上數量的乘積的坐標 (16) 2. 直線上向量的和以及差的坐標 (16) 3. 直線上向量的任意線性組合的坐標 (17) 4. 直線上向量的代數系統和實數的代數系統的同構 (18)

##### §5 平面上和空間中的射影，向量的線性組合的射影 ..... 18

1. 到直線上的正射影 (18) 2. 到直線上平行於任意直線或者平面的射影 (18) 3. 到平面上的射影 (19) 4. 關於向量射影的引理 (19) 5. 向量的任意線性組合的射影 (20)

##### §6 向量的線性組合的坐標，向量加法和向量乘上數量的乘法的基本法則 ..... 21

1. 向量在坐標軸上射影的數值 (21) 2. 向量的線性組合的坐標 (21) 3. 平面上或者空間中向量的代數系統和有順序的實數偶或者實數三位的代數系統的同構 (22) 4. 向量加法和向量乘上數量的乘法的基本法則 (22) 5.

\*加兩個星號的各節各段是用小號字排印的，至於加一個星號的各節，請看序言。

|        |                                       |    |
|--------|---------------------------------------|----|
| 附言(23) | 6. 兩個向量共線和三個點共線的檢驗法(23)               |    |
| § 7    | 變成新的笛卡兒坐標的變換                          | 24 |
| 1.     | 任意笛卡兒坐標的變換公式(25)                      |    |
| 2.     | 平面上直角坐標的變換公式(26)                      |    |
| 第二篇    | 笛卡兒坐標和向量: 度量關係                        | 27 |
| § 8    | 向量在軸線上的正射影                            | 28 |
| 1.     | 兩個方向中間的角(23)                          |    |
| 2.     | 向量在軸線上的正射影的數值(28)                     |    |
| § 9    | 數量乘積                                  | 29 |
| 1.     | 數量乘積的定義和基本的幾何性質(29)                   |    |
| 2.     | 數量乘積和向量在軸線上的正射影(30)                   |    |
| 3.     | 數量乘積的基本的代數性質(31)                      |    |
| § 10   | 標架的度量規定法                              | 32 |
| 1.     | 參數(32)                                |    |
| 2.     | 在結晶學裏所採用的標架的度量參數(32)                  |    |
| 3.     | 標架的基本的度量參數(33)                        |    |
| 4.     | 標架的度量矩陣(34)                           |    |
| **5.   | 標架參數的必要和充分的條件(35)                     |    |
| § 11   | 基本的度量公式                               | 36 |
| 1.     | 平面上標架的雙線性度量形式(36)                     |    |
| 2.     | 空間中標架的雙線性度量形式(37)                     |    |
| 3.     | 標架的二次度量形式(38)                         |    |
| 4.     | 向量長度和兩個向量中間的角利用標架的二次形式和雙線性形式表示的式子(39) |    |
| 5.     | 在直角坐標裏關於數量乘積, 向量長度和兩個向量中間的角的公式(40)    |    |
| 6.     | 方向餘弦(41)                              |    |
| **§ 12 | 對偶標架、反變和共變坐標                          | 41 |
| 1.     | 平面上和空間中的對偶標架(42)                      |    |
| 2.     | 給了兩個向量對於對偶的兩個標架的坐標, 求它們的數量乘積的公式(43)   |    |
| 3.     | 反變和共變坐標(44)                           |    |
| 第三篇    | 關於坐標的基本問題                             | 45 |
| § 13   | 兩個點中間的距離                              | 45 |
| 1.     | 坐標軸上兩個點中間的距離(45)                      |    |
| 2.     | 在直角坐標裏, 平面或者空間的兩個點中間的距離(45)           |    |
| 3.     | 在一般的笛卡兒坐標裏, 平面或者空間的兩個點中間的距離(46)       |    |
| § 14   | 分線段成已知比值                              | 47 |
| 1.     | 分線段成內分和外分比值(47)                       |    |
| 2.     | 分線段成已知比值的點, 關於它的坐標的公式(48)             |    |
| 3.     | 線段中點的坐標(50)                           |    |
| 4.     | 附言(50)                                |    |
| **§ 15 | 重心                                    | 51 |
| 1.     | 平行力組的合力所作用的點(51)                      |    |
| 2.     | 質點組的重心(53)                            |    |
| § 16   | 三角形和多邊形的面積                            | 53 |
| 1.     | 在直角坐標裏三角形的面積(53)                      |    |
| 2.     | 平面上有向多邊形的概念(55)                       |    |
| 3.     | 關於面積遮蓋的引理(55)                         |    |
| 4.     | 在直角坐標裏多邊形的面積(58)                      |    |
| 5.     | 在一般的笛卡兒坐標裏多邊形的面積(59)                  |    |
| **§ 17 | 平面面積計                                 | 60 |
| 第四篇    | 二階和三階矩陣的幾何                            | 61 |
| § 18   | 二階和三階行列式的幾何意義                         | 61 |

|                                                                        |                                        |
|------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------|
| 1. 平面上作在有序向量偶上的平行四邊形的面積和空間中作在有序向量三位上的平行六面體的體積(61)                      | 2. 記號 $(a, b)$ 和 $(a, b, c)$ 的主要性質(62) |
| 3. 二階行列式, 作為平面上作在有序向量偶上的平行四邊形面積的比值(64)                                 |                                        |
| 4. 三階行列式, 作為作在有序向量三位上的平行六面體體積的比值(65)                                   |                                        |
| **5. 在直角坐標系中三角形的面積和四面體的體積(68)    **6. 三個點在一條直線上和四個點在一個平面上的必要和充分的條件(68) |                                        |
| § 19 行列式運算的法則                                                          | 69                                     |
| 1. 矩陣, 按行和列作為向量組(69)                                                   | 2. 行列式的基本性質(69)                        |
| 3. 行列式元素的代數補餘式, 按一排的元素展開行列式(71)                                        |                                        |
| **§ 20 張在向量上的空間, 向量的線性相關, 矩陣的秩數                                        | 72                                     |
| 1. 張在向量上的空間(72)                                                        | 2. 向量的線性相關(73)                         |
| 3. 空間的維數和線性無關向量的個數(73)                                                 | 4. 張在向量上的空間的維數和向量矩陣的秩數(74)             |
| § 21 線性方程組                                                             | 76                                     |
| 1. 有三個未知數的一組三個一次方程, 作為沿著二個向量去分解向量的問題(76)                               | 2. 克拉磨公式(78)                           |
| 3. 有三個未知數的一組三個齊次一次方程, 作為求與三個已知向量正交的向量的問題(80)                           | 4. 有三個未知數的一組兩個齊次一次方程(80)               |
| § 22 向量乘積                                                              | 81                                     |
| 1. 空間中的有向平面段, 二重向量(81)                                                 | 2. 自由二重向量(89)                          |
| 3. 向量乘積(83)                                                            | 4. 三個向量的混合乘積(83)                       |
| 5. 向量乘積的直角坐標(85)                                                       | 6. 向量乘積的基本性質(86)                       |
| **7. 空間中三角形的面積(87)    **8. 關於對偶標架的向量的公式(88)                            |                                        |
| 第二章 正交映射和仿射映射                                                          | 89                                     |
| § 23 引言                                                                | 89                                     |
| 1. 變換在幾何學中的意義(89)                                                      | 2. 映射(90)                              |
| 3. 變換的乘法(91)                                                           | 4. 變換的乘積對於因子次序的依賴性(91)                 |
| 5. 羣的概念(92)                                                            | 6. 關於變換羣(93)                           |
| *第一篇 正交映射的幾何理論                                                         | 93                                     |
| *§ 24 正交映射的定義和最簡單的性質                                                   | 98                                     |
| 1. 運動(93)                                                              | 2. 反射(94)                              |
| 3. 正交映射(94)                                                            | 4. 關於正交映射的基本引理(95)                     |
| *§ 25 關於正交映射的第一基本定理                                                    | 98                                     |
| **§ 26 關於正交變換的第二基本定理                                                   | 99                                     |
| 1. 第一種和第二種正交變換(99)                                                     | 2. 關於正交變換的第二基本定理(101)                  |
| 3. 正交變換幾何的若干進一步的結果(102)                                                |                                        |
| *第二篇 仿射映射的幾何理論                                                         | 103                                    |
| *§ 27 仿射映射的定義和最簡單的性質                                                   | 103                                    |
| 1. 仿射映射(103)                                                           | 2. 壓縮(104)                             |
| 3. 關於仿射映射的引理(106)                                                      |                                        |

|                                                                                                                                                                                                                |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| *§ 28 a 簡單比值作為仿射映射的不變量(第一種講法).....                                                                                                                                                                             | 107 |
| 1. 關於線段中點的引理(107) 2. 達布引理(108) 3. 簡單比值的不變性(110)                                                                                                                                                                |     |
| **§ 28 b 簡單比值作為仿射映射的不變量(第二種講法).....                                                                                                                                                                            | 111 |
| 1. 函數方程 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ (111) 2. 實數域的一個代數性質(113)                                                                                                                                                            |     |
| 3. 簡單比值的不變性(115)                                                                                                                                                                                               |     |
| *§ 29 關於仿射映射的第一基本定理.....                                                                                                                                                                                       | 117 |
| *§ 30 關於仿射映射的第二基本定理.....                                                                                                                                                                                       | 119 |
| 1. 關於仿射映射的第二基本定理(119) 2. 在平面仿射映射下面積的改變和在空間仿射變換下體積的改變(122) **3. 在仿射映射下長度的改變(122)                                                                                                                                |     |
| *§ 31 若干特殊的仿射映射.....                                                                                                                                                                                           | 123 |
| 1. 同位相似(123) 2. 相似(124) 3. 帶角(125)                                                                                                                                                                             |     |
| 第三篇 線性變換 .....                                                                                                                                                                                                 | 126 |
| § 32 仿射映射.....                                                                                                                                                                                                 | 126 |
| 1. 仿射映射的定義(126) 2. 仿射映射的基本性質(128) 3. 變積係數,第一種和第二種的仿射變換(129) **4. 在仿射映射下,任意平面圖形的面積和任意空間體的體積的改變(131) 5. 仿射變換乘積的變積係數(132)                                                                                         |     |
| 6. 正交映射(132) 7. 仿射變換羣和它的若干子羣(133)                                                                                                                                                                              |     |
| § 33 仿射變換,作為行列式不等於零的線性變換 .....                                                                                                                                                                                 | 135 |
| 1. 仿射變換的公式(135) 2. 仿射變換作為行列式不等於零的線性變換(136) 3. 退化的線性變換(138) 4. 非退化的線性變換的兩重解釋(139)                                                                                                                               |     |
| § 34 齊次線性變換,行列式不等於零的正方矩陣的羣 .....                                                                                                                                                                               | 140 |
| 1. 齊次線性變換(140) 2. 行列式不等於零的正方矩陣的幾何意義(141)                                                                                                                                                                       |     |
| 3. 齊次線性變換的乘法和正方矩陣的乘法(141) 4. 行列式不等於零的正方矩陣的羣(143) 5. 矩陣乘積的行列式(144) 6. 矩陣的轉置和它與矩陣相乘的關係(145) **7. 對於原標架基次的像而言,仿射變換乘積的矩陣(146) **8. 在變到新的坐標標架時,仿射變換矩陣的改變(147) **9. 帶三個未知數的三個線性方程的組,作為求在有已知矩陣的仿射變換下變成已知向量的向量的問題(149) |     |
| § 35 正交矩陣 .....                                                                                                                                                                                                | 149 |
| 1. 正交矩陣的定義(149) 2. 正交關係(150) **3. 正交矩陣,作為保留變數的平方和不變的齊次線性變換的矩陣(152)                                                                                                                                             |     |
| **§ 36 歐拉角.....                                                                                                                                                                                                | 154 |
| 索引.....                                                                                                                                                                                                        | 157 |

## 第二分冊目次

### 第二部分 平面解析幾何 ..... 165

#### 引言 ..... 165

##### § 37 關於在笛卡兒坐標中用有兩個變數的方程表示的曲線。曲線的參數方程 ..... 165

1. 解析幾何的基本觀念(165) 2. 在笛卡兒坐標中用方程表示的曲線。例子(166) 3. 曲線的參數方程(169) 4. 曲線的交點(170) 5. 在笛卡兒坐標變換下曲線方程的變換(170)

##### § 38 代數曲線和超越曲線 ..... 171

1. 代數曲線和超越曲線(171) 2. 代數曲線的方程的次數(172)

### 第三章 平面上的直線 ..... 173

#### 第一篇 平面上直線的方程 ..... 173

##### § 39 直線, 作為一階曲線 ..... 173

##### § 40 表示同一條直線的一次方程 ..... 175

##### § 41 直線按它的方程的作圖 ..... 177

##### § 42 按各種已知條件求直線的方程 ..... 178

1. 已知斜率和縱軸上的截距。線性函數(179) 2. 已知一個點和方向向量。直線的參數方程(179) 3. 已知一個點和斜率(180) \* 4. 已知兩個點。三個點共線的條件(180) 5. 已知兩條坐標軸上的截距(182)

##### § 43 把點的坐標代入直線方程左邊的結果 ..... 182

1. 三項式  $Ax + By + C$  的正負號的幾何意義(183) 2. 線性不等式的幾何意義(184) 3. 三項式  $Ax + By + C$  的絕對值的幾何意義(185) 4. 線段被直線所分成的比值。已知新笛卡兒坐標軸的方程求坐標變換(185) 5. 直線方程法化的問題(187)

##### § 44a 直線的法化方程。從點到直線的距離(第一種講法) ..... 187

1. 法化因子(187) 2. 直線的法化方程。從點到直線的距離(188) \*\*3. 向量  $(A, B)$ , 作為線性函數  $Ax + By + C$  的梯度(189) \*\*4. 在一般笛卡兒坐標系統的情形中, 直線方程的法化(189) 5. 直線方程的海色法線式(189)

##### § 44b 直線的法化方程。從點到直線的距離(第二種講法) ..... 191

1. 直線方程的度量解釋(191) 2. 法化因子。直線的法化方程。直線方程的

海色法線式(192) 3. 從點到直線的距離(193) \*\*4. 在一般的笛卡兒坐標系統的情形中,直線方程的法化(194)

## 第二篇 平面上兩條直線的相互位置..... 194

§ 45 平面上兩條直線相互位置的三種可能情形。平行的條件。兩條直線的交點.....194

1. 兩條直線重合的條件(194) 2. 兩條直線平行的條件(195) 3. 平面上區別兩條直線相互位置的三種可能情形的普遍規則(195) 4. 兩條直線的交點(196)

§ 46 平面上有順序的一對方向中間的角.....196

1. 平面上兩個方向中間的角和有順序的一對方向中間的角(196) 2. 有順序的一對由向量規定的方向中間的角;它的公式(197) 3. 兩個方向的垂直條件(198)

§ 47 平面上有順序的一對直線中間的角。兩條直線的垂直條件..... 198

1. 平面上有順序的一對直線中間的角;它用正切的規定法(198) 2. 有順序的一對直線中間角的正切,用這些直線在直角坐標裏的斜率表達的公式(199) 3. 兩條直線的垂直條件,用這兩條直線在直角坐標裏的斜率來表達的式子(199) 4. 有順序的一對由普遍方程規定的直線中間的角,它的正切的公式和這樣兩條直線的垂直條件(200)

## 第三篇 直線束。縮短記號的方法..... 202

§ 48 直線束的方程.....202

1. 直線束(202) 2. 包含着兩條已知直線的直線束的方程(202) 3. 直線束方程的研究(203)

\*\*§ 49 平面上三條直線相互位置的七種可能情形.....204

\*\*§ 50 平面上的直線和空間中的向量的對比.....205

§ 51 關於平面上的直線的縮短記號的方法。平面上任意直線的方程,作為組成三角形的三條直線方程的線性組合.....206

## 第四篇 凸集合。線性不等式..... 207

§ 52 凸集合。線性不等式組.....207

1. 凸集合的定義和例子(207) 2. 關於凸集合的交的定理(209) 3. 凸外蓋(209) \*\*4. 有限的點集合的凸外蓋(210) 5. 線性不等式組的幾何意義(211)

\*\*§ 53 三個線性不等式規定三角形的必要和充分的條件.....213

## 第四章 橢圓,雙曲線,拋物線..... 217

|                                                               |     |
|---------------------------------------------------------------|-----|
| 第一篇 橢圓 .....                                                  | 219 |
| *§ 54 橢圓的仿射性質 .....                                           | 219 |
| 1. 圖形的仿射和度量性質(219) 2. 任意的圓周, 作為橢圓的特別情形(220)                   |     |
| 3. 圖形的對稱中心(221) 4. 橢圓的中心(221) 5. 橢圓與直線的相交(222)                |     |
| 6. 橢圓的直徑(222) 7. 共軛直徑(223)                                    |     |
| *§ 55 橢圓的對稱軸. 橢圓, 作為圓周壓縮的結果和作為圓周的正射影 .....                    | 223 |
| 1. 圖形的對稱軸(225) 2. 橢圓的兩條對稱軸的存在(225) 3. 橢圓作為圓周壓縮的結果(225)        |     |
| 4. 在不是圓周的橢圓中具有兩條對稱軸(226) 5. 橢圓的半軸(227)                        |     |
| **6. 平面仿射變換的立方向(227) 7. 橢圓作為圓周的正射影(228)                       |     |
| *§ 56 關於橢圓的阿坡隆尼亞定理 .....                                      | 229 |
| 1. 關於橢圓的第一個阿坡隆尼亞定理(229) 2. 關於橢圓的第二個阿坡隆尼亞定理(229)               |     |
| **§ 57 橢圓旋轉、變換的誘發 .....                                       | 230 |
| 1. 平面上把橢圓變成自己的仿射變換用平面上把圓周變成自己的仿射變換來誘發(230)                    |     |
| 2. 橢圓旋轉(230) 3. 橢圓旋轉的角(231) 4. 平面上把橢圓變成自己的所有仿射變換的決定(231)      |     |
| 5. 變換誘發的普遍方法(232) 6. 橢圓旋轉的公式(233)                             |     |
| § 58 橢圓的標準方程和普遍形狀 .....                                       | 234 |
| 1. 橢圓的標準方程(234) 2. 橢圓作為圓周壓縮的結果(234) 3. 橢圓的中心、軸線和頂點(235)       |     |
| **4. 橢圓的面積(236)                                               |     |
| § 59 橢圓的直徑(解析法) .....                                         | 236 |
| 1. 橢圓與直線的相交(236) 2. 橢圓的直徑(238) 3. 共軛直徑(239)                   |     |
| § 60 橢圓的焦點、離心率、準線和焦參數 .....                                   | 240 |
| 1. 橢圓的焦點和離心率(240) 2. 橢圓的準線(241) 3. 橢圓的焦參數(241)                |     |
| § 61 橢圓的焦點性質 .....                                            | 242 |
| § 62 橢圓的準線性質 .....                                            | 244 |
| § 63 橢圓的可綫 .....                                              | 245 |
| 1. 曲線的可綫(245) 2. 標準坐標裏橢圓切線的方程(246) 3. 橢圓切線作為角的平分線的性質(248)     |     |
| § 64 橢圓的主要作圖 .....                                            | 251 |
| *1. 仿射作圖(251) **2. 用仿射方法來完成仿射作圖(251) *3. 橢圓按着兩個共軛半徑的仿射作圖(252) |     |
| 4. 橢圓按着軸線的作圖(253) 5. 橢圓按着軸線的第二種作圖(254)                        |     |
| 6. 橢圓規(255) **7. 雷翁那陀·達·芬奇的                                   |     |