经济数学基础II

JINGJISHUXUEJICHU

线性代数

XIANXINGDAISHU

主编　刘舒强

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

线性代数

经济数学基础 II
线性代数

主　编　刘舒强
副主编　宋益兰

天 津 大 学 出 版 社

内 容 提 要

本书按照高等院校财经类专业的数学教学大纲和工学、经济学硕士研究生的数学考试大纲编写，在基本内容和习题的编排上都力争与这两个大纲相适应．这些内容包括行列式、矩阵运算、线性方程组、向量空间、特征值与特征向量及二次型等知识．

本书可作为高等院校财经类专业本科生的线性代数教材，也可作为学时相近的工科类专业本科生的教材或参考书．

图书在版编目(C I P)数据

经济数学基础．2，线性代数/刘舒强主编．—天津：天津大学出版社，2002

ISBN 7-5618-1642-1

Ⅰ．经…　Ⅱ．刘…　Ⅲ．①经济数学－高等学校－教材②线性代数－高等学校－教材　Ⅳ．F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 057607 号

出版发行　天津大学出版社
出 版 人　杨风和
地　　址　天津市卫津路 92 号天津大学内(邮编：300072)
网　　址　www.tdcbs.com
电　　话　营销部：022-27403647　邮购部：022-27402742
印　　刷　河北省昌黎县人民胶印厂
经　　销　全国各地新华书店
开　　本　148mm×210mm
印　　张　9
字　　数　278 千
版　　次　2002 年 8 月第 1 版
印　　次　2002 年 8 月第 1 次
印　　数　1—4 000
定　　价　15.00 元

前　言

《线性代数》是教育部在高等学校财经类专业所设置的核心课程《经济数学基础》的一个重要部分，它同时也是高等院校许多其他类专业的必修学科.

1989年原国家教委审定通过了《经济数学基础》教学大纲，此后又颁布了全国工学、经济学硕士研究生入学考试的《数学考试大纲》，这两个大纲乃是我们编写本书的主要依据.其目的是为相应专业的在校本科生学习这门课程提供必要和适当的有关基础知识；同时也充分考虑了部分学生继续深造的要求.所以在编写本书的过程中对内容和习题都做了精心的筛选，使本书在整体上显得充实但又不失简洁，每一章的内容都有明确的代表性与针对性，希望这些工作将对本书的读者有所裨益.

参加本书编写工作的同志，均是长期从事数学研究和在教学上有丰富经验的教师，他们在各自完成的章节中都融进了自己许多深刻的理解与体会，这使得本书不仅内容全面，论证严谨，而且深入浅出，易学好教，稍做增删就可以成为非财经类专业的本科生的教材或参考书.

本书第一章由运怀立老师编写；第二、六两章由宋益兰老师编写；第三、四两章由刘舒强老师编写；第五章由吴晓韵老师编写.

书中可能尚有许多不妥之处，还望读者不吝斧正.

编者

2002年4月

目　录

第1章 行 列 式

行列式是一个重要的概念,它在数学的许多分支中都有着非常广泛的应用,是很多内容都要使用的一种计算工具.特别是在本门课程中,对后面线性方程组与矩阵理论的研究,显得尤为重要.

1.1 二阶、三阶行列式

行列式的概念是由解线性方程组的问题引出来的,譬如给出二元一次方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1.1.1}$$

当 $a_{11}a_{22} \neq a_{12}a_{21}$ 时,这个方程组之解为

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, x_2 = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.1.2}$$

为了表述方便,引入记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \triangleq a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{1.1.3}$$

称它为二阶行列式.依此规定,二元一次方程组(1.1.1)的解就可以表示成

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{1.1.4}$$

可以类似地引入三阶行列式记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \triangleq a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}. \tag{1.1.5}$$

在行列式中,横排叫做行,纵排叫做列.组成行列式的数可用 a_{ij} 表示,称为行列式的元素,其下标 i 表示这个元素所处行的位置,j 表示这个元素所处列的位置.

1.2　n 元排列

定义 1.2.1　由自然数 1,2,3,…,n 所组成的一个有次序的数组,称为一个 n 元排列.

例如由自然数 1,2,3 所组成的有次序数组共有以下 6 个:123,132,213,231,312,321.这就是全部 3 元排列.因此,不难理解,n 元排列总共有 $n!$ 个.

定义 1.2.2　在一个 n 元排列中,如果一个较大的数排在了一个较小的数之前,就称这两个数构成了一个逆序.一个 n 元排列包含的逆序总数,称为该 n 元排列的逆序数.

今后将用字母 N 来表示一个 n 元排列的逆序数,如 6 元排列 314652 的逆序数是 6,就记作 $N(314652)=6$.

例 1.2.1　求 n 元排列 $n(n-1)\cdots 321$ 的逆序数.

解　n 与后面任何一个数均构成逆序,共有 $n-1$ 个;$n-1$ 与其后各个数构成 $n-2$ 个逆序;…;直到 2 与 1 构成一个逆序.这样,该排列的逆序总数就是 $(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}$,即

$$N(n(n-1)\cdots 21)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

例 1.2.2　求 7 元排列 3657214 的逆序数.

解　1 与前面比 1 大的数均构成逆序,共有 5 个;2 与前面比 2 大的数构成 4 个逆序;…;直到 6 与排在其前面且比 6 大的数构成 0 个逆

序.这样,该排列的逆序总数就是 $5+4+0+3+1+0=13$,即

$$N(3657214)=13.$$

已经看到,有的排列的逆序数是奇数,有的排列的逆序数是偶数,这就将 n 元排列分成了两类.

定义 1.2.3 若一个 n 元排列的逆序数是奇数,则称该 n 元排列为奇排列;若一个 n 元排列的逆序数是偶数,则称该 n 元排列为偶排列.

有时,需要将一个 n 元排列中的两个数码互换位置,这种互换称为对换.关于对换,有下面的定理.

定理 1.2.1 每一个对换都改变排列的奇偶性.

证明 (1)首先看一个特殊情形,即对换的两个数码处于相邻位置.设给定的排列为

$$\cdots\cdots ij\cdots\cdots \qquad (\mathrm{I})$$

经 i 与 j 的对换后变成

$$\cdots\cdots ji\cdots\cdots \qquad (\mathrm{II})$$

显然,i 和 j 以外的数码之间的逆序状况在(Ⅰ)和(Ⅱ)中是一样的;i,j 以外的数码与 i(或 j)的逆序状况在(Ⅰ)和(Ⅱ)中也是一样的.若 i 与 j 在(Ⅰ)中构成逆序,则它们在(Ⅱ)中就构成顺序,这样使(Ⅱ)的逆序比(Ⅰ)的逆序数少了一个;若 i 与 j 在(Ⅰ)中是顺序,则它们在(Ⅱ)中就构成逆序,这就使(Ⅱ)的逆序数比(Ⅰ)多了一个.总之无论如何,(Ⅰ)和(Ⅱ)的奇偶性总是相反的,即相邻两数的对换改变了 n 元排列的奇偶性.

(2)一般情形,i 与 j 之间还有 s 个数码,记之为 $k_1,k_2,\cdots,k_s$,此时给定的排列为

$$\cdots ik_1k_2\cdots k_sj\cdots \qquad (\mathrm{III})$$

交换 i 与 j 的位置后,(Ⅲ)变成了

$$\cdots jk_1k_2\cdots k_si\cdots \qquad (\mathrm{IV})$$

由于(Ⅲ)与(Ⅳ)可以通过一系列相邻两数间的对换实现,故可先让 i 向右移动,依次与 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 交换位置,经过 s 次相邻两个数码的对换后,(Ⅲ)变为

$$\cdots k_1, k_2, \cdots, k_s ij \cdots \tag{Ⅴ}$$

再让 j 向左依次与 $i, k_s, \cdots, k_2, k_1$ 互换位置，经过 $s+1$ 次相邻两个数的对换后，(Ⅴ)就变成了(Ⅳ)，整个过程共进行了 $2s+1$ 次相邻两数的对换. 即由(Ⅲ)到(Ⅳ)奇偶性共改变了 $2s+1$ 次，当然(Ⅲ)与(Ⅳ)的奇偶性正好相反.

由上述定理还可以得出以下结论.

定理 1.2.2 在全部 n 元排列中($n \geqslant 2$)，奇排列与偶排列的个数相等，各为$\frac{n!}{2}$个.

证明 设 n 元奇排列共有 p 个，偶排列共有 q 个. 对这 p 个奇排列都做 1 与 2 的对换，则会得到各不相同的 p 个偶排列，所以 $p \leqslant q$. 同理可知 $q \leqslant p$，从而必有 $p = q = \frac{n!}{2}$.

1.3 n 阶行列式的定义

4 阶以上的行列式已很难像 2 阶、3 阶行列式那样将展开式中的每一项都具体写出来. 为此给出 n 阶行列式的定义.

定义 1.3.1 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.3.1}$$

是所有取自不同行、不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \tag{1.3.2}$$

的代数和，这个代数和共有 $n!$ 项. 每项符号规定：当该项各元素的第一个下标(行标)按自然顺序排好后，第二个下标(列标)所成排列若为偶排列则前面加正号；若为奇排列则前面加负号. 即

$$D \triangleq \sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n)} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}, \tag{1.3.3}$$

其中 $\sum\limits_{(j_1j_2\cdots j_n)}$ 表示对所有 n 元排列$(j_1j_2\cdots j_n)$求和.

称$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$为行列式的一般项.

当 $n=2,3$ 时,就是2阶和3阶行列式.特别地,当 $n=1$ 时,1阶行列式$|a_{11}|=a_{11}$.

行列式有时简记为$|a_{ij}|$.

由定理1.2.2可知:n 阶行列式共有 $n!$ 项,且冠以正号的项和冠以负号的项(不算元素本身所带的符号)各占一半.

例1.3.1 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 $D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

这种行列式称为上三角行列式.

同理可得下三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

特殊情况:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

这种行列式称为对角行列式.

例1.3.2 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & -1 & 0\\0 & 0 & 1 & 0 & 0\\0 & -1 & 0 & 0 & 0\\1 & 0 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}.$$

解 这个行列式只有一项不为零,这一项等于

$$(-1)^{N(54321)}1\times(-1)\times1\times(-1)\times1=(-1)^{10}\times1=1,$$

故 $D=1$.

n 阶行列式定义中决定各项符号的规则还可由下面的结论来代替.

定理 1.3.1 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 的一般项可以记为

$$(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)+N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}, \tag{1.3.4}$$

其中 $i_1i_2\cdots i_n$ 与 $j_1j_2\cdots j_n$ 均为 n 元排列(证明从略).

由此定理,行列式的定义又可叙述为

$$D\triangleq\sum_{(i_1i_2\cdots i_n)}(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}, \tag{1.3.5}$$

其中 $\sum\limits_{(i_1i_2\cdots i_n)}$ 表示对所有的 n 元排列 $(i_1i_2\cdots i_n)$ 求和.

1.4 行列式的性质

定义 1.4.1 行列式 D 的行列互换(即第 i 行和第 i 列位置互换,$i=1,2,\cdots,n$)后所得的行列式称为 D 的转置行列式,记为 D' 或 D^{T},即

$$D^{\mathrm{T}}\triangleq\begin{vmatrix}a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1}\\a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}.$$

性质 1 $D=D^{\mathrm{T}}$,即行列式与其转置行列式的值相等.

证明 设 D 的一般项为

$$(-1)^{N(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n},$$

它的元素在 D 中位于不同的行不同的列，因而在 D^{T} 中位于不同的列不同的行，所以这 n 个元素的乘积在 D^{T} 中应为

$$a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n},$$

由式(1.3.5)可知其符号也是 $(-1)^{N(i_1 i_2 \cdots i_n)}$.

因此，D 与 D^{T} 是具有相同项的行列式，所以 $D = D^{\mathrm{T}}$.

该性质表明这样一个事实：行列式凡是对行成立的性质对列也同样成立，反之亦真. 因此，下列性质如果证明的话，仅针对行施行即可.

性质 2 行列式的两行(列)交换位置，行列式改变符号，但绝对值保持不变.

注 性质 2 至性质 4 均可仿前面从一般项入手得到证明，读者可自己练习，这里不再细述.

推论 若行列式有两行(列)元素完全相同，则这个行列式等于零.

性质 3 行列式任意一行(列)的公因子都可以提到行列式外面去.

推论 1 若行列式中有一行(列)元素全为零，则这个行列式等于零.

推论 2 若行列式有两行(列)对应元素成比例，则这个行列式等于零.

性质 4 行列式的某一行(列)若是两组元素之和，则此行列式等于两个行列式的和，这两个行列式的这一行(列)分别是这两组元素，而其余各行(列)与原行列式各行(列)相同.

例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

性质 5 将行列式某一行(列)的元素乘以同一数后加到另一行(列)的对应元素上,行列式的值不变.

证明 将行列式 D 的第 i 行的 k 倍加到第 j 行上去,则得

$$\begin{array}{l}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & a_{j2}+ka_{i2} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ (i) \\ \\ (j) \\ \\ \\ \end{array} \\ = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ = D+0=D. \end{array}$$

例 1.4.1 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & -6 & 3 \\ -5 & 10 & 4 \end{vmatrix}.$$

解 因为第一列与第二列对应元素成比例,根据性质 3 的推论 2 得 $D=0$.

例 1.4.2 设

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=1,\text{求}\begin{vmatrix} 6a_{11} & -2a_{12} & -10a_{13} \\ -3a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ -3a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix}.$$

解 $$\begin{vmatrix} 6a_{11} & -2a_{12} & -10a_{13} \\ -3a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ -3a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} -3a_{11} & a_{12} & 5a_{13} \\ -3a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ -3a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= -2\times(-3)\times 5\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -2\times(-3)\times 5\times 1 = 30.$$

例 1.4.3 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 32153 & 32053 \\ 44498 & 44398 \end{vmatrix}.$$

解 将 D 的第 2 列乘以 (-1) 加到第 1 列上去，得

$$D = \begin{vmatrix} 100 & 32053 \\ 100 & 44398 \end{vmatrix}$$

$$= 100\begin{vmatrix} 1 & 32053 \\ 1 & 44398 \end{vmatrix} = 1234500.$$

1.5 行列式按行(列)展开

1.5.1 行列式按一行(列)展开

定义 1.5.1 在 n 阶行列式中，划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行、第 j 列，剩下的元素按原来的次序组成的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}. 令

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij},$$

称为元素 a_{ij} 的代数余子式.

例 1.5.1 写出 3 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 8 & 5 \\ 6 & 1 & 9 \end{vmatrix}$$

中 a_{11}, a_{12}, a_{13} 的代数余子式 A_{11}, A_{12}, A_{13}.

解 $A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}8 & 5\\ 1 & 9\end{vmatrix}=67$;

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-3 & 5\\ 6 & 9\end{vmatrix}=57;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-3 & 8\\ 6 & 1\end{vmatrix}=-51.$$

定理 1.5.1 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

等于其任意一行(列)的元素与它对应的代数余子式的乘积之和,即

$$D=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\ (i=1,2,\cdots,n);$$

或 $$D=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\ (j=1,2,\cdots,n).$$

(证明略)

例 1.5.2 写出下面 4 阶行列式按第 3 行的展开式,并计算该行列式的值,其中

$$D=\begin{vmatrix}6 & 0 & 8 & 0\\ 5 & -1 & 3 & -2\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 4 & -3\end{vmatrix}.$$

解 D 按第 3 行的展开式为

$$D=0\cdot A_{31}+2\cdot A_{32}+0\cdot A_{33}+0\cdot A_{34}$$

$$=2\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}6 & 8 & 0\\ 5 & 3 & -2\\ 1 & 4 & -3\end{vmatrix}=-2\times 98=-196.$$

定理 1.5.2 n 阶行列式