数学通报丛书

实数 极限 近似计算

中国数学会数学通报编委会编

科学技术出版社

实数、極限、近似計算

中国数学会数学通报編委会編

科学技术出版社

1960年·北京

中国数学会数学通报编委会编

*

科学技术出版社出版
（北京市西直門外郝家灣）
北京市書刊出版業營業許可証出字第 091 號
北京市印刷一厂印刷
新华書店科技發行所發行　各地新华書店經售

*

开本：850 × 1168 1/32 • 印張：$3\frac{8}{16}$ • 字数：113,000
1960年 4 月第 1 版　1960年 4 月第 1 次印刷
印数：25,090

总号：1441　統一書号：13051·292
定价：（8）4 角 3 分

出版者的話

数学通报自創刊以来，發表了不少对讀者进修数学、扩大数学知識領域有帮助的文章，特別是發表了不少有关中等学校数学教学的文章，受到了讀者欢迎，并經常收到讀者来信要求将这些文章分类編成單行本出版。数学通报編委会为了滿足讀者这一需要，特将該刊自創刊号起至1959年中的文章，选其質量較好的并按性質分成数学知識介紹和中等学校数学两部分分类出書。前一部分已选編成“綫性代数多項式”、“实数、極限、近似計算”、“几何作圖、非欧几何、邏輯初步”、“概率和数理統計”、“关于电子数字計算机的一些問題”、“初等数学史”、“趣味的数学問題”和“中等数学習題解答集”；后一部分已选編成“中学数学教学的一般問題”、“初中数学教材和教法分析”和“高中数学教材和教法分析”。

这十一本書的內容，有适合初等数学的，或适合在初等数学基础上进一步提高的，因此，具有相当高中数学水平的讀者、中等学校数学教师、大、中学生及数学爱好者均可閱讀。

“实数、極限、近似計算”是这套丛書中的一本。

目　次

关于正实数的算术运算

張庆芳　刘士宗

前　言

本文是在以无穷小数作为正实数的定义的基础上来建立正实数的算术运算，并給出满足各种运算規律的証明．其目的在于使之成为中学教材有关实数方面的一些补注．为此，本文不牵涉过多的事物，譬如度量和数直綫等等，而使之独立成篇，所以本文之邏輯叙述只在純"数"間来进行．当然，关于有理数(即有穷小数和循环小数)方面的一些知識和运算，我們認为讀者是知道的．

我們是借助于正实数的不足近似值与过剩近似值为工具来建立正实数的算术运算的，所以首先在Ⅰ中叙述出正实数以及其近似値的定义和关于它們自己或它們間一些必要性質．在Ⅱ中建立了正实数的加乘运算，而在Ⅲ中給出它們满足交換、結合、分配各律的証明，在邏輯上正实数的加乘运算没有什么不同，因此并在一起叙述．最后在Ⅳ中仅給出减法、除法运算的定义，和一些对于定义同值形式有关的几个定理．

Ⅰ．正实数及其近似值

說明的話：本节定义1給出正实数的定义，在未将运算放置于正实数集上之前，应当先定义正实数的"相等"与"大、小"这两个概念：即定义2、3，定理1．更要紧的是：由于不足近似值或过剩近似值都是有穷小数，所以必須化成无穷小数形式，也就是說将它們"嵌入"在正实数集才好——定义1的注i、ii就說明这点．定理2指出正实数与其不足近似值及过剩近似值三者之間的順序关系．值得注意的是：$\alpha_n \leqslant a$ 而不是 $\alpha_n < a$，这是由于此处的 a 是正实数的原故，

实际上确有这种情况發生。譬如，$a=0.2400\cdots$，那么 $\alpha_n=a$ 了。定理 3 最后一个命题和定理 5 与其系对于以后定理 8、定理 9 从而定理 10 对于結合、分配各律之証明是起重要作用的。还有值得注意的是：定理 3 系也指明了"(正)有理数集稠于(正)实数集"这个意思，就是通常所說的"二实数間必有一个有理数"。至于"二实数間必有一个无理数"虽然証明不难，但离題太远，因而始終不曾提及；同样理由，以定理 5 为基础也可以解决一些关于近似計算的問題，这些东西也舍去了。

定义 1 我們把下面的无穷小数(不管循环与否)

$$a=a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots,$$

此处 a_0 为 0 或自然数，而每个 $a_n(n\neq 0)$ 为 0，1，… 9 中之数叫做正实数。

注 i 由循环小数的知識得知：$a_0.a_1\cdots a_n 99\cdots=a_0.a_1\cdots(a_n+1)00\cdots$，本文一律采取后者形式而拒絕前者形式。

注 ii 由循环小数的知識得知：$a_0.a_1\cdots a_n=a_0.a_1\cdots a_n 00\cdots$。

定义 2 設 $a=a_0.a_1\cdots a_n\cdots$，$b=b_0.b_1\cdots b_n\cdots$，当 $a_0=b_0$，及 $a_i=b_i$，$i=1, 2, 3, \cdots$ 时，我們就說 a，b 相等而以 $a=b$ 表之。

定义 3 設 $a=a_0.a_1\cdots a_n\cdots$，$b=b_0.b_1\cdots b_n\cdots$，当 $a_0>b_0$；或当 $a_0=b_0$，$a_i=b_i$，$i=1,2,\cdots,n-1$，$a_n>b_n$，我們就說 a 大于 b(同值地說法 b 小于 a)而以 $a>b(b<a)$表之。

定理 1 正实数集为序集。

証明 依序集定义只須証明：

① 此集中任二不同的数 a 和 b，或者 $a>b$，或者 $a<b$，二者必須成立且只能成立一种；

② 当 $a>b$，$b>c$，則 $a>c$。

証① 設 $a\neq b$，于是或者 $a_0\neq b_0$ 或者 $a_0=b_0$，如果 $a_0\neq b_0$，則由于整数集为序集的原故，必然 $a_0>b_0$ 或 $a_0<b_0$ 二者必須成立且只能成立一种，因而依定义 3 得知 $a>b$ 或 $a<b$ 二者必成立且只成立一种。如果 $a_0=b_0$，但因 $a\neq b$，所以此时必有自然

数 n 值 得 $a_i=b_i$，$i=1,2,\cdots,(n-1)$，$a_n\neq b_n$（由于定义 2 及自然数的良序性），而 a_n,b_n 为整数，所以 $a_n>b_n$ 或 $a_n<b_n$ 二者必成立且只成立一种，从而依定义 3 得知 $a>b$ 或 $a<b$ 二者必成立且只成立一种.

証② 設 $a>b$，依定义或者 $a_0>b_0$ 或者 $a_0=b_0$，$a_i=b_i$，$i=1,2,\cdots(n-1)$，$a_n>b_n$. 如果 $a_0>b_0$，又設 $b>c$，依定义 $b_0\geqslant c_0$，所以 $a_0>b_0\geqslant c_0$，而得 $a_0>c_0$，依定义 $a>c$. 如果 $a_0=b_0$，$a_i=b_i$，$i=1,2,\cdots,(n-1)$，$a_n>b_n$，此时当 $b_0>c_0$ 时，甚易得知 $a>c$；但当 $b_0=c_0$，$b_i=c_i$，$i=1,2,\cdots,(m-1)$，$b_m>c_m$ 时，或者 $m\leqslant n$ 或者 $m>n$. 如果 $m\leqslant n$，则 $c_m<b_m\leqslant a_m$ 而 $c_i=b_i=a_i$，$i=1,2,\cdots,(m-1)$，由此得出 $c<a$；如果 $m>n$，则 $c_n=b_n<a_n$ 而 $c_i=b_i=a_i$，$i=1,2,\cdots,(n-1)$，由此得出 $c<a$ 了.

定义 4 設 $a=a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$，则 $a_0.a_1\cdots a_n$ 叫 a 的前 n 位不足近似值，$a_0.a_1\cdots(a_n+1)$ ❶ 叫 a 的前 n 位过剩近似值；分别以 α_n 和 α'_n 标記之. 为方便起見把 a_0 及 a_0+1 分别看做是 α_0 及 α'_0.

定理 2 設 $a=a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$，$\alpha_n$ 和 α'_n 为其前 n 位不足近似值和过剩近似值，则 $\alpha_n\leqslant a<\alpha'_n$.

証明 依定义 1 注 ii）$\alpha_n=a_0.a_1\cdots a_n=a_0.a_1\cdots a_n00\cdots$，而 $a=a_0.a_1\cdots a_n\cdots$. 当 $a_{n+1}\neq 0$，则 $a_{n+1}>0$，因而依定义 3 得知 $\alpha_n<a$；当 $a_{n+1}=0$，则同样地来考虑 a_{n+2}，假如 $a_{n+1}=a_{n+2}=\cdots=0$，则 $\alpha_n=a$ 了. 因之，$\alpha_n\leqslant a$.

又因 $\alpha'_n=a_0.a_1\cdots(a_n+1)=a_0.a_1\cdots(a_n+1)00\cdots$，当 $a_n+1\leqslant 9$，则显然 $a<\alpha'_n$；当 $a_n+1=10$，则 $\alpha'_n=a_0.a_1\cdots(a_p+1)00\cdots$，$0\leqslant p<n$，此时也易得知 $a<\alpha'_n$.

定理 3 設 α_n 和 α'_n 分别为 $a=a_0.a_1\cdots a_n\cdots$ 的前 n 位不足近似值和过剩近似值，$n=0,1,2,3,\cdots$，则 $\alpha_n\leqslant\alpha_{n+1}$；$\alpha'_n\geqslant\alpha'_{n+1}$；必有自然数 $n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$ 使得 $\alpha'_{n_1}>\alpha'_{n_2}>\cdots\alpha'_{n_k}$

---

❶ 当 $a_n+1=10$ 时，则往前进位.

$>\cdots$.

証明 因 $\alpha_n=a_0.a_1\cdots a_n=a_0.a_1\cdots a_n00\cdots$, $\alpha_{n+1}=a_0.a_1\cdots a_n a_{n+1}=a_0.a_1\cdots a_n a_{n+1}00\cdots$, 而 $a_{n+1}\geqslant 0$, 所以 $\alpha_{n+1}\geqslant\alpha_n$. 另一方面, 因 $\alpha'_{n+1}=a_0.a_1\cdots a_n(a_{n+1}+1)$, 当 $a_{n+1}+1<10$, 則 $\alpha'_{n+1}<\alpha'_n=a_0.a_1\cdots(a_n+1)$ 显然成立; 当 $a_{n+1}+1=10$, 則 $\alpha'_{n+1}=a_0.a_1\cdots(a_n+1)=\alpha'_n$ 了.

假如 $\alpha'_k=\alpha'_{k+1}$, 則 $a_0.a_1\cdots(a_k+1)=a_0.a_1\cdots a_k(a_{k+1}+1)$, 所以此时必然 $a_{k+1}=9$. 因此, 假如 $\alpha'_k=\alpha'_{k+1}=\cdots$, 則 $9=a_{k+1}=a_{k+2}=\cdots$ 了, 因而 $a=a_0.a_1\cdots a_k99\cdots9\cdots$. ——此与定义 1❶ 相違.

系 設 $a<b$, 則必有二有理数 γ_a、γ_b, 使得 $a<\gamma_a<\gamma_b<b$.

証明 因 $a<b$, 所以 $a_0<b_0$ 或者 $a_0=b_0$, $a_i=b_i$, $i=1,2,\cdots,k-1$, $a_k<b_k$. 如果 $a_0<b_0$, 則 $a_0+1\leqslant b_0$, 所以 $a<a_0+1\leqslant b$ 了. 依本定理可找出 α'_{k+p} 及 α'_k 使得 $\alpha'_{k+p}<\alpha'_k<a_0+1$, 因而 $a<\alpha'_{k+p}<\alpha'_k<a_0+1\leqslant b$ 了; 如果 $a_0=b_0$, $a_i=b_i$, $i=1,2,\cdots k-1$, $a_k<b_k$, 所以 $\alpha'_k\leqslant\beta_k$, 此处 β_k 为 b 之前 k 位不足近似值. 再依本定理必有 $\alpha'_{k+p+q}<\alpha'_{k+p}<\alpha'_k$, 因之 $a<\alpha'_{k+p+q}<\alpha'_{k+p}<b$.

定理 4 設 $a=a_0.a_1\cdots a_n\cdots$ 及 $b=b_0.b_1\cdots b_n\cdots$, 如果 a 的每个不足近似值 $\alpha_n\leqslant b$, 則 $a\leqslant b$.

証明 假如 $a>b$, 于是 $a_0>b_0$, 所以 $a_0\geqslant b_0+1>b$, 即 $a_0>b$; 或 $a_0=b_0$, $a_i=b_i$, $i=1,2,\cdots,(m-1)$, $a_m>b_m$, 所以 $\alpha_m=a_0.a_1\cdots a_m\geqslant\beta'_m=b_0.b_1\cdots(b_m+1)>b$ (依定理 2)——都違反所設.

定理 5 設 $d_0.d_1\cdots d_n\leqslant c<d_0.d_1\cdots(d_n+1)$, 則 $d_0.d_1\cdots d_n=c_0.c_1\cdots c_n$, 此处 $c_0.c_1c_2\cdots c_n$ 为 c 之前 n 位不足近似值.

証明 因依定理 2, $c_0.c_1\cdots c_n\leqslant c<c_0.c_1\cdots(c_n+1)$, 所以假

---

❶ 見 С.И.Новоселов: 代数与初等函数 118 頁及 120 頁(中譯本, 張禾瑞、孙永生等譯).

如$d_0.d_1\cdots d_n<c_0.c_1\cdots c_n$，則$d_0.d_1\cdots(d_n+1)\leqslant c_0.c_1\cdots c_n$，是以 $c<d_0.d_1\cdots(d_n+1)\leqslant c_0.c_1\cdots c_n\leqslant c$，即得出来 $c<c$；又若$c_0.c_1\cdots c_n<d_0.d_1\cdots d_n$，則$c_0.c_1\cdots(c_n+1)\leqslant d_0.d_1\cdots d_n$；是以$c<c_0.c_1\cdots(c_n+1)\leqslant d_0.d_1\cdots d_n\leqslant c$，也得出$c<c$了．因此，$d_0.d_1\cdots d_n=c_0.c_1\cdots c_n$。

系　設$d_0.d_1\cdots d_n\leqslant c<d_0.d_1\cdots d_n+\dfrac{p}{10^n}$，則$d_0.d_1\cdots d_n\leqslant r_n\leqslant c<r'_n\leqslant d_0.d_1\cdots d_n+\dfrac{p}{10^n}$，此处$p$为自然数$\geqslant 1$，$r_n$，$r'_n$为$c$之前$n$位不足近似值和过剩近似值．

証明　因依所設，必有自然数k使得$d_0.d_1\cdots d_n+\dfrac{k-1}{10^n}\leqslant c<d_0.d_1\cdots d_n+\dfrac{k}{10^n}$，此处$1\leqslant k\leqslant p$，而因$d_0.d_1\cdots d_n+\dfrac{k-1}{10^n}$及$d_0.d_1\cdots d_n+\dfrac{k}{10^n}$均为$n$位小数且二者相差为$\dfrac{1}{10^n}$，所以依本定理$d_0.d_1\cdots d_n+\dfrac{k-1}{10^n}=r_n$．因此，$d_0.d_1\cdots d_n\leqslant r_n\leqslant c<r'_n\leqslant d_0.d_1\cdots d_n+\dfrac{p}{10^n}$.

Ⅱ．正实数的加乘运算[1]

説明的話：本节主要是建立正实数的加、乘运算．为此，必須給出一般所謂“退縮有理閉区間数列”的定理，即本节定理7，至于它的証明是建立在定理6上．而定理6的証明将本身用归纳法之处特别明显地显露出来，还有确定a之各位a_0a_n的具体做法与通常者也不相同．其次，建立加、乘运算．定理8、9是为定理10服务的，而定理10一方面固然用于节Ⅲ，另一方面也明示了和〔积〕之近似值与近似值和〔积〕之間的关系．

定理6　設有，有上〔下〕界的遞增〔遞減〕正实数列$0\leqslant a^{(1)}\leqslant a^{(2)}\leqslant\cdots\leqslant a^{(m)}\leqslant\cdots\leqslant A=A_0.A_1A_2\cdots A_n\cdots$，〔$a^{(1)}\geqslant a^{(2)}\geqslant\cdots$

[1] 本节为了节省叙述和便于比較乃将类似的命題合并一起，只把必要的术語和有关的証明代之以位于其后的方括号中的語句．

$\geqslant a^{(m)}\geqslant\cdots\geqslant A=A_0.A_1\cdots A_n\cdots\geqslant 0$]，則必有一数 $a=a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$ 滿足以下諸条件：

① 对于每个不負整数 n 必有另个自然数 M_n；当 $m>M_n$ 时，則

$$a_0.a_1a_2\cdots a_n=a_0^{(m)}.a_1^{(m)}\cdots a_n^{(m)};$$

② 当 $m>M_n$ 时，則

$$a_0.a_1a_2\cdots a_n\leqslant a^{(m)}<a_0.a_1\cdots(a_n+1);$$

③ 每个 $a^{(m)}\leqslant a\leqslant A$；[每个 $a^{(m)}\geqslant a\geqslant A$；]

④ 这样的 a 是唯一的．此处 $a_0.a_1\cdots a_n$ 为 a 之前 n 位不足近似值，$a_0^{(m)}.a_1^{(m)}\cdots a_n^{(m)}$ 为 $a^{(m)}$ 之前 n 位不足近似值．

証明 依假設，必然 $a_0^{(1)}\leqslant a_0^{(2)}\leqslant\cdots\leqslant a_0^{(m)}\leqslant\cdots\leqslant A_0$，[$a_0^{(1)}\geqslant a_0^{(2)}\geqslant\cdots a_0^{(m)}\geqslant\cdots\geqslant A_0$]，因而必有一个自然数 M_0：当 $m>M_0$，則 $a_0^{(m)}$ 同为0或某一个自然数；我們令此数为 a_0，即 $a_0=a_0^{(m)}$，当 $m>M_0$。所以对于 0 来說，我們有自然数 M_0 及非負整数 a_0，使得当 $m>M_0$ 时，則① $a_0=a_0^{(m)}$；及② $a_0\leqslant a^{(m)}<a_0+1$（由于①及定理 2）．假設自然数 M_n 及 a_n（此时 a_n 取 0，1，…，9 中之值）均已定义且滿足：

① 当 $m>M_n$，則 $a_0.a_1\cdots a_n=a_0^{(m)}.a_1^{(m)}\cdots a_n^{(m)}$；

② 当 $m>M_n$，則 $a_0.a_1\cdots a_n\leqslant a^{(m)}<a_0.a_1\cdots(a_n+1)$．

于是当 $m>M_n$ 时，$a_0^{(m)}.a_1^{(m)}\cdots a_n^{(m)}a_{n+1}^{(m)}=a_0.a_1\cdots a_na_{n+1}^{(m)}$；由于 $\{a^{(m)}\}$ 遞增[遞减]，所以 $\{a_0^{(m)}.a_1^{(m)}\cdots a_n^{(m)}a_{n+1}^{(m)}\}$ 遞增[遞减]，即 $\{a_0.a_1\cdots a_na_{n+1}^{(m)}\}$ 遞增[遞减]，但 $a_{n+1}^{(m)}$ 須取 0，1，… 9 中之值，所以有自然数 $M_{n+1}(\geqslant M_n)$：当 $m>M_{n+1}$，則 $a_0.a_1\cdots a_na_{n+1}^{(m)}=a_0.a_1\cdots a_na_{n+1}$，此外 a_{n+1} 取 0，1，… 9 中之值，因而对于自然数 $n+1$，我們有自然数 M_{n+1} 及 a_{n+1}（a_{n+1} 取 0，1，…9 中之值）使得当 $m>M_{n+1}$ 时，則① $a_0.a_1\cdots a_na_{n+1}^{(m)}==a_0.a_1\cdots a_na_{n+1}$；及② $a_0.a_1\cdots a_{n+1}\leqslant a^{(m)}<a_0.a_1\cdots(a_{n+1}+1)$（因①及定理 2）．所以我們用归納法定义出来一个自然数列 $\{M_n\}$ 及一个非負整数列 $\{a_0,a_1,\cdots a_n,\cdots\}$，它們滿足①及②，此处 $a_1,a_2\cdots$ 每个取 0，1，… 9 中之值．我們令 $a=a_0.a_1\cdots a_n\cdots$ 即

可．兹証它满足条件①—④．条件①及②都满足的这件事从 $a_0.a_1\cdots a_n\cdots$ 及 $\{M_n\}$ 所满足的①及②即可知道了．

今証它满足条件③．因对于每个 n，$a_0.a_1\cdots a_n\leqslant a^{(m)}\leqslant A$，当 $m>M_n$ 时；依定理4，$a\leqslant A$〔必然 $a\geqslant A$．盖因假若 $a<A$，则或是 $a_0<A_0$，因之，$a_0+1\leqslant A_0\leqslant A$，而 $a^{(m)}<a_0+1$ 当 $m>M_0$，所以当 $m>M_0$，$a^{(m)}<A$；或是 $a_0=A_0$，$a_i=A_i$，$i=1,\cdots,(n-1)$，$a_n<A_n$，所以 $a_0.a_1\cdots a_n<A_0.A_1\cdots A_n$，因之，$a_0.a_1\cdots(a_n+1)\leqslant A_0.A_1\cdots A_n\leqslant A$．而 $a^{(m)}<a_0.a_1\cdots(a_n+1)$，当 $m>M_n$，所以当 $m>M_n$，$a^{(m)}<A$——无論那种情况都与定理之假設相違．所以 $a\geqslant A$〕．假若有 $a^{(m')}>a$，必然或者 $a_0^{(m')}>a_0$，此时 $a_0+1\leqslant a_0^{(m')}$，而 $a_0^{(m')}\leqslant a_0^{(m)}$，当 $m\geqslant m'$，所以 $a_0+1\leqslant a_0^{(m')}\leqslant a_0^{(m)}\leqslant a^{(m)}$ 当 $m\geqslant m'$；或者 $a_0^{(m')}=a_0$，$a_i^{(m')}=a_i$，$i=1,2,\cdots,(n-1)$，$a_i^{(m')}>a_n$，所以 $a_0^{(m')}.a_1^{(m')}\cdots a_{n-1}^{(m')}a_n^{(m')}\geqslant a_0.a_1\cdots(a_n+1)$，当 $m\geqslant m'$，所以 $a_0.a_1\cdots(a_n+1)\leqslant a_0^{(m')}.a_1^{(m')}\cdots a_{n-1}^{(m')}a_n^{(m')}\leqslant a_0^{(m)}.a_1^{(m)}\cdots a_{n-1}^{(m)}a_n^{(m)}\leqslant a^{(m)}$——无論那种情况都是和②相違的．所以 $a^{(m)}\leqslant a$．〔由于对于每个自然数 n，$a_0.a_1\cdots a_n\leqslant a^{(m)}$，当 $m>M_n$，可是 $\{a^{(m)}\}$ 遞減，所以 $a_0\cdot a_1\cdots a_n\leqslant a^{(m)}$，每个 m；所以依定理4，$a\leqslant a^{(m)}$，每个 m．〕

最后証明它满足条件④．設有 $b=b_0.b_1\cdots b_n\cdots>$ 此 $a=a_0.a_1\cdots a_n\cdots$．必然或 $b_0>a_0$，此时 $b_0\geqslant a_0+1>a^{(m)}$ 当 $m>M_0$；或 $b_0=a_0$，$b_i=a_i$，$i=1,2,\cdots,(n-1)$，$b_n>a_n$，此时 $b_0.b_1\cdots b_n\geqslant a_0.a_1\cdots(a_n+1)>a^{(m)}$，当 $m>M_n$；因之，b 就不得满足②了．类似地可証当 $b<a$ 时，b 也不满足②．因之，这样的 a 是唯一的．

定理7 設 $0\leqslant\gamma^{(1)}\leqslant\gamma^{(2)}\leqslant\cdots\leqslant\gamma^{(n)}\leqslant\cdots\leqslant s^{(n)}\leqslant\cdots\leqslant s^{(2)}\leqslant s^{(1)}$；此处 $\gamma^{(n)}$，$s^{(n)}$ 为有理数，又对于每个正有理数 $\varepsilon>0$，必有自然数 N：当 $n>N$，則 $s^{(n)}-\gamma^{(n)}<\varepsilon$；于是必有且只有一数 γ，使得 $\gamma^{(m)}\leqslant\gamma\leqslant s^{(m)}$，每个 m．

証明 因 $0\leqslant\gamma^{(1)}\leqslant\cdots\leqslant\gamma^{(n)}\leqslant\cdots\leqslant s^{(1)}$，所以依定理6必有

一数 γ 使得

① 对于每个非負整数 n 必有另个自然数 M_n：当 $m>M_n$，則

$$\gamma_0.\gamma_1\cdots\gamma_n=\gamma_0^{(m)}.\gamma_1^{(m)}\cdots\gamma_n^{(m)};$$

② 当 $m>M_n$，

$\gamma_0.\gamma_1\cdots\gamma_n\leqslant\gamma^{(m)}<\gamma_0.\gamma_1\cdots(\gamma_n+1)$；

③ 每个 $\gamma^{(m)}\leqslant\gamma\leqslant s^{(1)}$；

④ 这样的 γ 是唯一的. 此处 $\gamma=\gamma_0.\gamma_1\cdots\gamma_n\cdots$，$\gamma^{(m)}=\gamma_0^{(m)}.\gamma_1^{(m)}\cdots\gamma_n^{(m)}\cdots$.

今将 m 固定为 m^*，因 $0\leqslant\gamma^{(1)}\leqslant\cdots\leqslant\gamma^{(m)}\leqslant\cdots\leqslant s^{(m^*)}$，所以依定理 6 必有一数 γ^*，使

1） 对于每个非負整数 n 必有另个自然数 M_n^*：当 $m>M_n^*$，則

$$\gamma_0^*.\gamma_1^*\cdots\gamma_n^*=\gamma_0^{(m)}.\gamma_1^{(m)}\cdots\gamma_n^{(m)};$$

2） 当 $m>M_n^*$，

$$\gamma_0^*.\gamma_1^*\cdots\gamma_1^*\leqslant\gamma^{(m)}<\gamma_0^*.\gamma_1^*\cdots(\gamma_n^*+1);$$

3） 每个 $\gamma^{(m)}\leqslant\gamma^*\leqslant s^{(m^*)}$；

4） 这样 γ^* 是唯一的. 此处 $\gamma^*=\gamma_0^*.\gamma_1^*\cdots\gamma^{(m)}=\gamma_0^{(m)}.\gamma^{(m)}\cdots$. 由于 $s^{(m^*)}\leqslant s^{(1)}$，所以每 $\gamma^{(m)}\leqslant\gamma^*\leqslant s^{(1)}$，因之，$\gamma^*$ 滿足①—④，于是依 ④ $\gamma^*=\gamma$，由此得出 $\gamma^{(m^*)}\leqslant\gamma\leqslant s^{(m^*)}$，但 m^* 可任意，所以 $\gamma^{(m)}\leqslant\gamma\leqslant s^{(m)}$，每个 m.

这样的 γ 只有一个. 盖因另有 s 使得 $\gamma^{(m)}\leqslant s\leqslant s^{(m)}$，每个 m，假如 $\gamma\neq s$，为确定起見，令 $\gamma<s$，于是依定理 3 之系必有二有理数 γ'，s'，使得

$\gamma<\gamma'<s'<s$；因而 $\gamma^{(m)}<\gamma'<s'<s^{(m)}$，每个 m. 所以 $s^{(m)}-\gamma^{(m)}>s'-\gamma'$，每个 m. 此違反本定理之假設.

定义 5 設 $a=a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots\geqslant0$，$b=b_0.b_1b_2\cdots b_n\cdots\geqslant0$，$\alpha_0=a_0$，$\alpha_1=a_0.a_1$，$\cdots$，$\alpha_n=a_0.a_1\cdots a_n$，$\cdots$；$\alpha_n'=a_0+1$，$\alpha_1'=\alpha_1+\dfrac{1}{10}$，$\alpha_2'=\alpha_2+\dfrac{1}{10^2}$，$\cdots$，$\alpha_n'=\alpha_n+\dfrac{1}{10^n}$，$\cdots$；$\beta_0=b_0$，$\beta_1=$

$b_0.b_1, \cdots, \beta_n = b_0.b_1\cdots b_n, \cdots; \beta'_0 = b_0+1, \beta'_1 = \beta_1 + \frac{1}{10}, \cdots \beta'_n = \beta_n + \frac{1}{10^n}, \cdots$.

于是依定理 3 有

$$\alpha_0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \cdots \leqslant \alpha_n \leqslant \cdots \leqslant \alpha'_n \leqslant \cdots \leqslant \alpha'_n \leqslant \alpha'_1 \leqslant \alpha'_0;$$

$$\beta_0 \leqslant \beta_1 \leqslant \cdots \leqslant \beta_n \leqslant \cdots \leqslant \beta'_n \cdots \leqslant \beta'_2 \leqslant \beta'_1 \leqslant \beta'_0;$$

因而有

$\alpha_0+\beta_0 \leqslant \alpha_1+\beta_1 \leqslant \alpha_2+\beta_2 \leqslant \cdots \leqslant \alpha_n+\beta_n \leqslant \cdots \leqslant \alpha'_n+\beta'_n \leqslant \cdots \leqslant \alpha'_2+\beta'_2 \leqslant \alpha'_1+\beta'_1 \leqslant \alpha'_0+\beta'_0$. [$\alpha_0\beta_0 \leqslant \alpha_1\beta_1 \leqslant \alpha_2\beta_2 \leqslant \cdots \leqslant \alpha_n\beta_n \leqslant \cdots \leqslant \alpha'_n\beta'_n \leqslant \cdots \alpha'_2\beta'_2 \leqslant \alpha'_1\beta'_1 \leqslant \alpha'_0\beta'_0$.] 但 $\alpha'_n+\beta'_n-(\alpha_n+\beta_n) = \frac{2}{10^n}$. $\left[\alpha'_n\beta'_n - \alpha_n\beta_n = \frac{\alpha_n+\beta_n}{10^n} + \frac{1}{10^{2n}} \leqslant \frac{\alpha_0+\beta_0+2}{10^n} + \frac{1}{10^{2n}}.\right]$所以得依定理 7 必有数 c 使 $\alpha_n+\beta_n \leqslant c \leqslant \alpha'_n+\beta'_n$ 对每个 n. (1) [$\alpha_n\beta_n \leqslant c \leqslant \alpha'_n\beta'_n$ 对每个 n (2)]. 我們把此 c 叫数 a 及 b 之"和" ["积"] 而以 $a+b=c$ [$ab=c$] 表之.

定理 8 必有自然数列 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ 使 $\alpha'_{n_1}+\beta'_{n_1} > \alpha'_{n_2}+\beta'_{n_2} > \cdots > \alpha'_{n_k}+\beta'_{n_k} > \cdots$, [$\alpha'_{n_1}\beta'_{n_1} > \alpha'_{n_2}\beta'_{n_2} > \cdots > \alpha'_{n_k}\beta'_{n_k} > \cdots$.] 此处 α'_{n_k}, β'_{n_k} 为定义 5 中的.

証明 因依定理 3, 必有自然数列 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ 使 $\alpha'_{n_1} > \alpha'_{n_2} > \cdots > \alpha'_{n_k} > \cdots$ 又 $\beta'_{n_1} \geqslant \beta'_{n_2} \geqslant \cdots \geqslant \beta'_{n_k} \geqslant \cdots$, 所以 $\alpha'_{n_1}+\beta'_{n_1} > \alpha'_{n_2}+\beta'_{n_2} > \cdots > \alpha'_{n_k}+\beta'_{n_k} > \cdots$. [$\alpha'_{n_1}\beta'_{n_1} > \alpha'_{n_2}\beta'_{n_2} > \cdots > \alpha'_{n_k}\beta'_{n_k} > \cdots$.]

定理 9 $\alpha_n+\beta_n \leqslant c < \alpha'_n+\beta'_n$, [$\alpha_n\beta_n \leqslant c < \alpha'_n\beta'_n$] 对每个 n, 此处 c 及 α_n, α'_n, β_n, β'_n 为定义 5 中的.

証明 以上左端不等式不必証, 只証右端的不等式就够了. 假如对于某个 n, $\alpha'_n+\beta'_n = c$, [$\alpha'_n\beta'_n = c$,] 則依定理 8, 必有自然数 $n_k >$ 此 n, 使 $\alpha'_{n_k}+\beta'_{n_k} < \alpha'_n+\beta'_n$, [$\alpha'_{n_k}\beta'_{n_k} < \alpha'_n\beta'_n$,] 因此, $\alpha'_{n_k}+\beta'_{n_k} < c$, [$\alpha'_{n_k}\beta'_{n_k} < c$], 而此与(2)相違.

定理 10 $\alpha_n+\beta_n \leqslant \gamma_n \leqslant c < \gamma'_n \leqslant \alpha'_n+\beta'_n$, [$\alpha_n\beta_n \leqslant \gamma_{2n} \leqslant c < \gamma'_{2n} \leqslant \alpha'_n\beta'_n$,] 对每个 n, 此处 c, α_n, α'_n, β_n, β'_n 为定义 5 中的,

而γ_n，γ_n'为c之前n位不足近似値和过剩近似値。[γ_{2n}，γ_{2n}'为c之前$2n$位不足近似値和过剩近似値。]

証明 因为$\alpha_n+\beta_n$及$\alpha_n'+\beta_n'$均为n位小数[因$\alpha_n\beta_n,\alpha_n'\beta_n'$均为$2n$位小数]，且$\alpha_n'+\beta_n'=\alpha_n+\beta_n+\dfrac{2}{10^n}$，[$\alpha_n'\beta_n'=\alpha_n\beta_n+$

$$+\frac{a_0 10^n+a_1\cdots a_n+b_0 10^n+b_1\cdots b_n+1}{10^{2n}},]$$

所以依定理5之系有

$\alpha_n+\beta_n\leqslant\gamma_n\leqslant c<\gamma_n'\leqslant\alpha_n'+\beta_n'$. [$\alpha_n\beta_n\leqslant\gamma_{2n}\leqslant c<\gamma_{2n}'\leqslant\alpha_n'\beta_n'$.]

Ⅲ. 加乘运算对于各种定律的满足[1]

説明的話：在本文加[乘]法定义下，必須依賴定理10方可进行結合律与分配律的証明——这是应注意的事.

定理11 設a,b为正实数，則$a+b=b+a,ab=ba$.

証明 由于定义5及有理数加乘运算滿足交換律的这件事情就可以得出来.

定理12 設a,b,d为正实数，則$(a+b)+d=a+(b+d)$. [$(ab)d=a(bd)$.]

証明 令a,b,d的前n位不足近似値和过剩近似値各自为α_n,α_n'; β_n,β_n'; δ_n,δ_n'. 再令$a+b=c$，[$ab=c$,] γ_n,γ_n' [γ_{2n},γ_{2n}'] 分别为c之前n[$2n$]位不足近似値和过剩近似値. 于是依定理10 $\alpha_n+\beta_n\leqslant\gamma_n\leqslant c<\gamma_n'\leqslant\alpha_n'+\beta_n'$，[$\alpha_n\beta_n\leqslant\gamma_{2n}\leqslant c<\gamma_{2n}'\leqslant\alpha_n'\beta_n'$,] 又因$\delta_n\leqslant d<\delta_n'$，[$\delta_n\leqslant\delta_{2n}\leqslant d<\delta_{2n}'\leqslant\delta_n'$]对每个$n$，所以依定义5和定理9得出来

$(\alpha_n+\beta_n)+\delta_n\leqslant\gamma_n+\delta_n\leqslant c+d<\gamma_n'+\delta_n'\leqslant(\alpha_n'+\beta_n')+\delta_n'$ 对每个n，[$(\alpha_n\beta_n)\delta_n\leqslant\gamma_{2n}\delta_{2n}\leqslant cd<\gamma_{2n}'\delta_{2n}'\leqslant(\alpha_n'\beta_n')\delta_n'$ 对每个n]，即是

$(\alpha_n+\beta_n)+\delta_n\leqslant(a+b)+d<(\alpha_n'+\beta_n')+\delta_n'$，对每个$n$.

---

[1] 本节为了节省叙述和便于比較，将类似的命題合并在一起，只把必要的术語和有关的証明代之以位于其后的方括号中語句.

$[(\alpha_n\beta_n)\delta_n \leqslant (ab)d < (\alpha'_n\beta'_n)\delta'_n$，对每个 n.]

另一方面，因 $(\alpha_n+\beta_n)+\delta_n \leqslant (\alpha_{n+1}+\beta_{n+1})+\delta_{n+1} < (\alpha'_{n+1}+\beta'_{n+1})+\delta'_{n+1} \leqslant (\alpha'_n+\beta'_n)+\delta'_n$，$[(\alpha_n\beta_n)\delta_n \leqslant (\alpha_{n+1}\beta_{n+1})\delta_{n+1} < (\alpha'_{n+1}\beta'_{n+1})\delta'_{n+1} \leqslant (\alpha'_n\beta'_n)\delta'_n$,]

又因 $(\alpha'_n+\beta'_n)+\delta'_n - \{(\alpha_n+\beta_n)+\delta_n\} = \frac{3}{10^n}$, $\Big[(\alpha'_n\beta'_n)\delta'_n - (\alpha_n\beta_n)\delta_n < \left(\frac{a_0+b_0+2}{10^n}+\frac{1}{10^{2n}}\right)(d_0+1) + \frac{(a_0+1)(b_0+1)}{10^n} + \frac{1}{10^n}\left(\frac{a_0+b_0+2}{10^n}+\frac{1}{10^{2n}}\right)\Big]$. 所以得依定理7，必有且只有一数 t 使得 $(\alpha_n+\beta_n)+\delta_n \leqslant t \leqslant (\alpha'_n+\beta'_n)+\delta'_n$, $[(\alpha_n\beta_n)\delta_n \leqslant t \leqslant (\alpha'_n\beta'_n)\delta'_n$,] 因之，此 t 即 $c+d=(a+b)+d$. $[cd=(ab)d$.]

类似地得出 $\alpha_n+(\beta_n+\delta_n) \leqslant a+(b+d) < \alpha'_n+(\beta'_n+\delta'_n)$ 对每个 n. $[\alpha_n(\beta_n\delta_n) \leqslant a(bd) < \alpha'_n(\beta'_n\delta'_n)$ 对每个 n.]

但 $\alpha_n+(\beta_n+\delta_n)=(\alpha_n+\beta_n)+\delta_n$, $\alpha'_n+(\beta'_n+\delta'_n)=(\alpha'_n+\beta'_n)+\delta'_n$, 所以, $t=a+(b+d)$. $[t=a(bd)$.] 因此, $(a+b)+d=a+(b+d)$. $[(ab)d=a(bd)$.]

定理13 設 a,b,d 为正实数，則 $(a+b)d=ad+bd$.

証明 因依定理 10, $\alpha_n+\beta_n \leqslant \gamma_n \leqslant a+b < \gamma'_n \leqslant \alpha'_n+\beta'_n$, 此处 α_n、α'_n, β_n、β'_n, γ_n、γ'_n, 为 $a, b, a+b$ 之前 n 位不足近似值和过剩近似值，而

$\delta_n \leqslant d < \delta'_n$, 此处 δ_n、δ'_n 为 d 之前 n 位不足近似值和过剩近似值，所以依定义 5 和定理 9,

$$(\alpha_n+\beta_n)\delta_n \leqslant \gamma_n\delta_n \leqslant (a+b)d < \gamma'_n\delta'_n \leqslant (\alpha'_n+\beta'_n)\delta'_n,$$

即 $$(\alpha_n+\beta_n)\delta_n \leqslant (a+b)d < (\alpha'_n+\beta'_n)\delta'_n.$$

又依定理 10,

$$\alpha_n\delta_n \leqslant e_{2n} \leqslant ad < e'_{2n} \leqslant \alpha'_n\delta'_n;$$
$$\beta_n\delta_n \leqslant f_{2n} \leqslant bd < f'_{2n} \leqslant \beta'_n\delta'_n.$$

此处 e_{2n}、e'_{2n}, f_{2n}、f'_{2n} 分别为 ad, bd 之前$2n$位不足近似值和过剩近似值，再依定义 5、定理 9,

$$\alpha_n\delta_n+\beta_n\delta_n\leqslant e_{2n}+f_{2n}\leqslant ad+bd<e'_{2n}+f'_{2n}\leqslant\alpha'_n\delta'_n+\beta'_n\delta'_n,$$

即 $\alpha_n\delta_n+\beta_n\delta_n\leqslant ad+bd<\alpha'_n\delta'_n+\beta'_n\delta'_n$. 但数列 $(\alpha_n+\beta_n)\delta_n=\alpha_n\delta_n+\beta_n\delta_n$, 且遞增；又数列 $(\alpha'_n+\beta'_n)\delta'_n=\alpha'_n\delta'_n+\beta'_n\delta'_n$ 且遞减；及因 $(\alpha'_n+\beta'_n)\delta'_n=\left(\alpha_n+\beta_n+\frac{2}{10^n}\right)\left(\delta_n+\frac{1}{10^n}\right)=(\alpha_n+\beta_n)\delta_n+\frac{2}{10^n}\delta_n+(\alpha_n+\beta_n)\frac{1}{10^n}+\frac{2}{10^{2n}}\leqslant(\alpha_n+\beta_n)\delta_n+\frac{2}{10^n}(d_0+1)+(a_0+b_0+2)\frac{1}{10^n}+\frac{2}{10^{2n}}$, 所以 $(\alpha'_n+\beta'_n)\delta'_n-(\alpha_n+\beta_n)\delta_n\leqslant\frac{2}{10^n}(d_0+1)+(a_0+b_0+2)\frac{1}{10^n}+\frac{2}{10^{2n}}$, 于是依定理7，

$$(a+b)d=ad+bd.$$

Ⅳ．减法及除法运算

說明的話：为了保持确定加、乘定义作法的一貫性，所以我們通过本节定义6将减法定义給出来。为了与普通所謂减法是加法的反运算的这一說法溝通起来，乃有定理15和定理16的系1．除法定义与寻常者一样，定理18、19也是将本文除法定义溝通到“除法为乘法反运算”的这一定义形式．

定义6 設 $a=a_0.a_1\cdots a_n\cdots\geqslant b=b_0.b_1\cdots b_n\cdots\geqslant0$, α_n、β_n 为 a、b 之前 n 位不足近似値；α'_n、β'_n 为 a、b 之前 n 位过剩近似値．由于 $\alpha_n\leqslant a<\alpha'_n$, $\beta_n\leqslant b<\beta'_n$, 所以 $\alpha_n-\beta'_n<\alpha'_n-\beta_n$, 且 $\alpha_0-\beta'_0\leqslant\alpha_1-\beta'_1\leqslant\alpha_2-\beta'_2\leqslant\cdots\leqslant\alpha_n-\beta'_n\leqslant\cdots\leqslant\alpha'_n-\beta_n\leqslant\cdots\leqslant\alpha'_2-\beta_2\leqslant\alpha'_1-\beta_1\leqslant\alpha'_0-\beta_0$. (3)

当 $a>b$ 时，(3) 中数列 $\alpha_n-\beta'_n$ 必然从某一項起都是 $\geqslant0$ 的，而 $(\alpha'_n-\beta_n)-(\alpha_n-\beta'_n)=(\alpha'_n-\alpha_n)+(\beta'_n-\beta_n)=\frac{2}{10^n}$; 因之依定理7必有且只有一正实数 c 使得 $\alpha_n-\beta'_n\leqslant c\leqslant\alpha'_n-\beta_n$, 对每个 n. 至于 $a=b$ 时，显然有且只有 c(即 0)使 $\alpha_n-\beta'_n\leqslant c\leqslant\alpha'_n-\beta_n$. 我們定义此 c 为 a、b 之差而以 $a-b$ 表之，即 $a-b=c$.

定理14 定义6中的 c 满足 $\alpha_n-\beta'_n<c\leqslant\alpha'_n-\beta_n$ 对每个 n.