SPT 21世纪高等院校教材

高等几何

周兴和 编

科学出版社
www.sciencep.com

21 世纪高等院校教材

高 等 几 何

周兴和 编

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书是作者从事高等几何教学 20 余年经验的结晶，主要内容包括射影平面、射影变换、变换群观点、二次曲线理论、几何学简史等．本书科学体系严谨，内容精炼，深入浅出、语言生动，图文并茂，易教易学．同时，本书还配备了作者授课时用的电子教案，以供广大教师、学生参考．

本书可作为高等院校数学专业本科生和专科生的教材，亦可供有关人员参考．

图书在版编目（CIP）数据

高等几何 / 周兴和编．— 北京：科学出版社，2003.9
21 世纪高等院校教材
ISBN 7-03-011617-8

Ⅰ．高… Ⅱ．周… Ⅲ．高等几何－高等学校－教材 Ⅳ．O18

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 051897 号

责任编辑：林 鹏 杨 波 / 责任校对：宋玲玲
责任印制：安春生 / 封面设计：黄华斌

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
西源印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2003 年 9 月第 一 版 开本：B5（720×1000）
2003 年 9 月第一次印刷 印张：11 1/2
印数：1—5 000 字数：214 000

定价：20.00 元（含光盘）

前　言

高等几何是高等院校数学类专业的重要基础课之一，与数学分析、高等代数一起，被称为“前三高”．本课程的主旨在于拓展读者的几何空间知识，学习了解变换群观点，进而达到训练理性思维的能力，增强数学审美意识，提高数学修养的目的，为读者进一步的数学学习和未来的几何学教学与研究打下良好的基础．

编者有着为高校全日制和成人教育数学专业讲授高等几何 20 余年的经历，在教学中积累了不少收获和体会．本教材的编写动力主要来自两个方面：一是高等学校教育教学改革的需要，多年来，学时越胀越多，教材越写越厚，不同课程之间联系淡薄，这已经成为培养创新人才的一大障碍，必须要精简学时，更新教学内容，让学生有更多的自我学习时间和更大的自我思考空间．学时减下来之后，就必须认真研究教什么和如何教，本教材力图在这方面做些尝试．第二个动力是，在编者多年的教学中，尽管从不少教材中吸取了很多教益，但是对各教材也都有不满足感，因此想对教学内容改革做一些尝试．为此，我重新阅读了每一次的讲稿，从中搜寻闪光点，对内容、材料、例题、习题尤其是科学体系进行重新审视，力求做到理论系统严格而又简洁明快，浅显易懂．

本教材的前四章为课堂教学内容，以平面射影几何为主，同时介绍 Klein 变换群观点．当然，作为高等几何课程，除了系统介绍射影几何知识、变换群思想而外，还应该对非欧几何以及几何基础等作一些介绍．作为这方面的改革尝试，我们增加第五章“几何学寻踪”，既讲述历史、介绍著名数学家，也介绍一些几何学知识，作为学生的课外阅读材料．本教材是南京师范大学“十五”重点建设的教材之一，已在南京师范大学等校经过全日制教学和成人教育教学中多次试用，这次出版前又根据试用情况作了一些必要的修订，编者授课用的电子教案也随同教材一并出版发行，希望能够对使用本教材的教师和学生起一定的帮助作用．

任何教材都会不同程度地限制教师和学生的创造力，因此教材只能是一个教学蓝本，是提供教师和学生进行再创造的一个平台．此外，本教材也必然存在一些错误和疏漏之处，恳请读者和使用本教材的教师给予批评指正，以便进一步修改、完善．

编者首先要感谢南京师范大学教学委员会“十五”重点教材评审委员会的专家们，谢谢他们评审中提出的宝贵意见；在本教材编写思想的形成初期，上饶师范学院的熊华平教授、南京师范大学的卞桂云、管义桂教授等曾与编者进行过许多建设性的讨论；在本教材编写过程中，编者曾获得南京师范大学数学与计算机科学学院

的陈怀惠、杨润生、李君华、高洪俊、叶惟寅、涂荣豹教授等给予的帮助，杨明升副教授使用本教材授课并对编写工作提出了修改建议；南京师范大学数学与应用数学专业 1999 级、 2000 级不少本科生对本教材提出过一些好的意见，在教材出版之际编者对他们一并表示感谢．科学出版社的林鹏、杨波等先生对本教材的编写出版给予了热情的关心，尤其是杨波先生为本教材的出版付出了大量辛勤的劳动并提出了不少有益的建议，编者谨向他们表示衷心的感谢．

编 者

2003 年 5 月

于南京师范大学随园

目　　录

第一章 射影平面

本章从欧氏平面的拓广开始，定义射影平面，引进齐次坐标、对偶原则等概念，并给出 Desargues 透视定理，是学习平面射影几何的基础.

§1.1 拓广平面

关于平面上两直线的位置关系，在我们以前所学习的几何学中，最熟知的两个概念是“相交”与“平行”. 所谓“平行”乃是“不相交”. 但是，在实际生活中，我们几乎从来没有看到过所谓的平行直线. 比如，在我们的眼中，两条笔直的铁路钢轨看上去好像是在非常远的地方相交. 又如，谁都会认为一张照片与它所反映的实物非常地“像”，但是仔细比较就可以看出，实物中所有的平行直线在照片上都表现为有规则的相交. 显然，实物中平行于地面的直线在照片中都相交于“地平线”，而地平线则是假设出来的. 事实上，上述这些在几何中都属于中心射影.

一、中心射影

中心射影又叫做透视对应，是射影几何的基本方法. 我们来尝试在欧氏空间进行中心射影.

1. 直线到直线的中心射影

定义 1.1 设 l, l' 为两条相异的共面直线，O 为平面上不属于直线 l, l' 的一个定点. 则由此确定了直线 l 到 l' 的一个 **中心射影**. 若 O 与 l 上一点 P 的连线 OP 与 l' 有交点 P', 则称 P' 为 P 在 l' 上的以 O 为 **投射中心** 的 **中心射影**(如图 1.1). 直线 OP 称为 **投射线**.

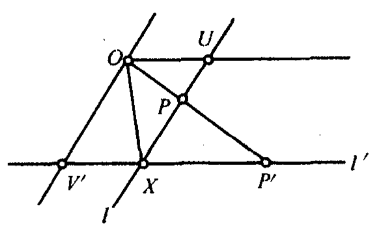

图 1.1

我们称 P' 为直线 l 上的点 P 在 l' 上的 **像点**, 而称 P 为 P' 的 **原像**. 显然，中心射影是相互的，P 也是点 P' 在直线 l 上的像点. 若 l 与 l' 有交点 X, 本书常用

记号 $X = l \times l'$ 表示 l 与 l' 的交点为 X. 显然 X 为中心射影下的 **自对应点**, 自对应点也称为 **不变点**. 易见, 中心射影与投射中心的选取有关.

显然, 在直线 l 上存在一点 U, 使得直线 $OU//l'$, 这样, OU 与 l' 没有交点, 即点 U 在 l' 上没有像, 称 U 为 l 上的 **影消点**. 同样, 在 l' 上也存在影消点 V'. 由于影消点的存在, 直线到直线的中心射影不是双射 1) .

2. 平面到平面的中心射影

定义 1.2 设 π, π' 为两个相异的平面, O 为不在此二平面上的取定的一点. 则由此确定了平面 π 到 π' 的一个 **中心射影**. 对于 π 上的一点 P, 若直线 OP 与平面 π' 有交点 P', 则称 P' 为 P 在 π' 上的以 O 为 **投射中心** 的 **中心射影**. 直线 OP 称为 **投射线**(如图 1.2).

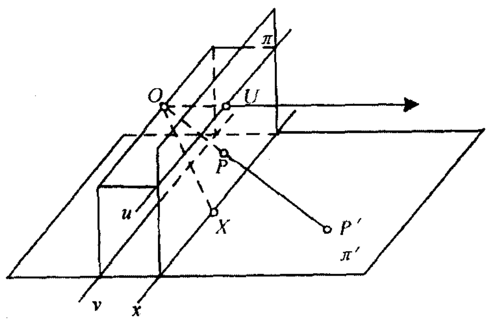

图 1.2

我们称 P' 为 P 的 **像点**, P 为 P' 的 **原像**. 同样, 平面到平面的中心射影也是相互的. 设 $\pi \times \pi' = x$(表示 x 为平面 π 与平面 π' 的交线), 则直线 x 上的任一点 X 都是此中心射影的 **不变点**, 进而, 直线 x 为此中心射影下的 **不变直线**. 平面之间的中心射影也与投射中心 O 的选取有关.

显然, 在平面 π 上存在一条直线 u, 其上任一点 U 与 O 的连线 OU 平行于 π', 于是, U 在此中心射影下没有像, 是影消点, 直线 u 在 π' 上没有像, 称为 **影消线**. 同样, 在平面 π' 上也存在一条影消线 v'. 由于影消线的存在, 平面之间的中心射影不是双射.

二、无穷远元素

影消点、影消线存在的根本原因是, 在欧氏空间中, 相互平行的直线没有交点. 使得中心射影成为一一对应的一个自然的途径是给平行直线添加交点, 即要对欧氏空间进行改造, 通过添加一些新的元素对欧氏空间加以拓广. 添加新元素的基

1) 既是单射 (injection) 又是满射 (surjection) 的映射称为双射 (bijection), 也称为一一对应.

本约束是不破坏点和直线的关联关系以及下列两个基本的几何事实:

(i) 两相异直线相交,有且只有一个交点;

(ii) 通过两相异点有而且只有一条直线.

约定 1.1 (1) 在每一条直线上添加惟一一个点,此点不是该直线上原有的点,称为 **无穷远点** 或 **理想点**.

(2) 相互平行的直线上所添加的无穷远点相同,不平行的直线上添加的无穷远点不同.

(3) 平面上添加的全体无穷远点的集合为一条直线,称为 **无穷远直线** 或 **理想直线**.

区别起见,将平面上原有的点称为 **有穷远点** 或 **通常点**. 常用记号 P_∞ 等表示无穷远点. 把平面上原有的直线称为 **有穷远直线** 或 **通常直线**. 常用记号 l_∞ 等表示无穷远直线.

无穷远点和无穷远直线统称为 **无穷远元素**. 显然,无穷远直线上的点的个数等于平面上经过一个通常点的直线数. 容易看出,添加无穷远元素之后,上述两个中心射影都是双射.

三、拓广平面

显然,添加无穷远点之后的直线不再是欧氏直线,添加无穷远直线之后的平面也不再是欧氏平面,我们有

定义 1.3 通常点和无穷远点统称为 **拓广点**; 添加无穷远点之后的直线和无穷远直线统称为 **拓广直线** 或 **射影仿射直线**; 添加无穷远直线之后的平面称为 **拓广平面** 或 **射影仿射平面**.

定理 1.1 在拓广平面上,

(1) 两个相异的拓广点确定惟一一条拓广直线 (其连线);

(2) 两条相异的拓广直线确定惟一一个拓广点 (其交点).

于是,在拓广平面上任意两条相异直线总是相交的,平行与相交的差别被统一为相交. 可以说,美术家们都是在拓广平面上进行创作的,所有的照片也都被洗印在拓广平面上.

定理 1.1 说明,在拓广平面上,拓广点之间、拓广直线之间有着平等的地位,而且本定理对于拓广点和拓广直线而言是对称的. 这与通常欧氏平面相比,发生了质的变化,暗示了射影几何的一个本质思想.

四、拓广直线、拓广平面的基本性质与拓扑模型

与欧氏直线、欧氏平面相对比,我们来研究拓广直线、拓广平面的一些基本性质.

1. 拓广直线

与欧氏直线相比，拓广直线的内在性质产生了质的变化.

(1) 拓广直线的封闭性. 图 1.3 示意了圆周与拓广直线之间的一个双射，因此可以将欧氏平面上的圆周取作为射影直线的一种拓扑模型.

由此，添加无穷远点之后的通常直线上点的个数也等于平面上经过一个通常点的直线数. 从而，每一条拓广直线都有同样多的点.

事实上，由上述双射不难看出，欧氏平面上的任何椭圆进而任何凸闭曲线都可以作为拓广直线的拓扑模型.

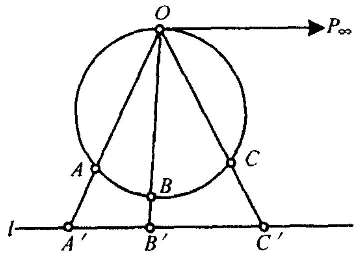

图 1.3

(2) 拓广直线上的点之间的 **分离关系**. 欧氏直线上点之间通常的顺序关系在拓广直线上显然不再成立. 比如，欧氏直线上一点将直线划分为两个部分，但拓广直线上任一点不可能划分直线为两个部分. 又如，欧氏直线上相异二点可以区分出一个线段，这样的事实在拓广直线上显然不再成立. 换句话说，“介于”一词在拓广直线上不再有用武之地. 为描述拓广直线上点之间的关系，我们引入“分离”概念. 如图 1.4, 点偶 C,D 分离点偶 A,B. 又如图 1.5, C,D 不分离点偶 A,B.

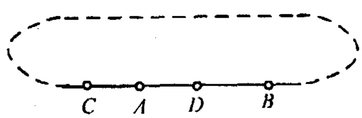

图 1.4

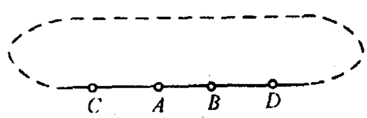

图 1.5

由拓广直线的封闭性，不难想像，相异两点 A,B 将拓广直线划分成两个不同的部分，而分离与不分离即描述了下述现象：

分离：当 C,D 分别处于被 A,B 所划分的不同部分上时；

不分离：当 C,D 处于被 A,B 所划分的同一部分上时.

由上述，线段概念在拓广直线上不再存在，因此在拓广直线上没有距离概念.

2. 拓广平面

由于添加了无穷远直线，拓广平面与欧氏平面相比，空间的内在性质产生了质

的变化.

(1) 拓广平面的封闭性.

在欧氏平面上，任一直线划分平面为两个不同的区域 (即对于不同区域的两个点，不可能找到一条连接这二点的连续曲线，使之与边界不相交)；在拓广平面上，任一直线不可能划分平面成两个不同的区域 (如图 1.6).

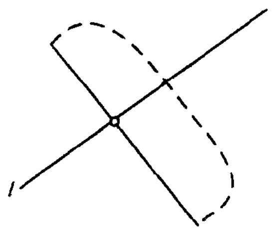

图 1.6

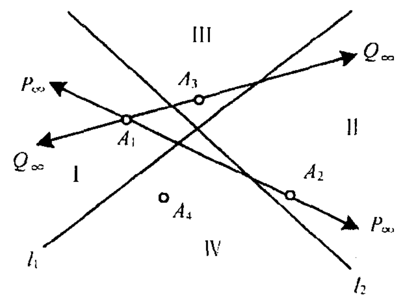

图 1.7

在欧氏平面上任二相交直线划分平面成四个不同的区域；在拓广平面上，任二相交直线划分平面成两个不同的区域. 为体会这一点，如图 1.7, 直线 l_1, l_2 将平面划分为 I，II，III，IV四个部分. 利用拓广直线的封闭性不难说明，对于拓广平面，I 与 II；III与IV分别为同一区域.

由于上述的原因，在拓广平面上共点的四条直线，也有“分离”概念.

(2) 拓广平面的拓扑模型

模型一，叠合对径点的球面. 如图 1.8, 将一个球面放在一张拓广平面 π 上，使得北极向上，南极与平面相切. 以球心 O 为投射中心，则显然球面上一条直径的对径点 (直径的两个端点) 对应于平面上惟一一个点，赤道上的对径点对应着无

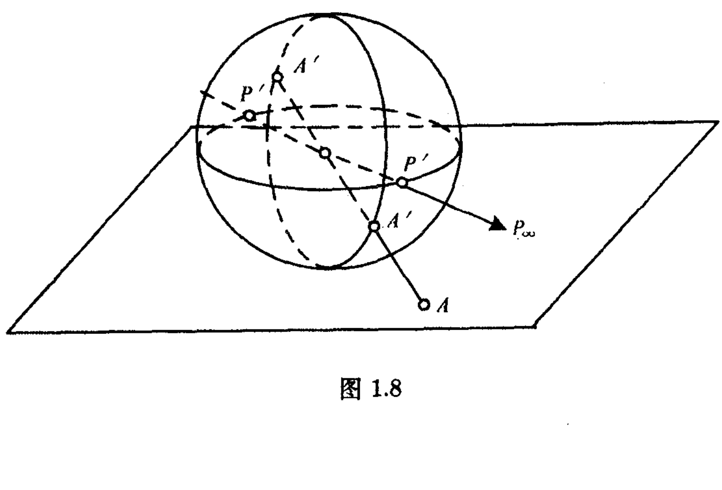

图 1.8

穷远直线上的点，球面上的大圆对应为平面上的直线. 这种对应是球面上对径点的集合到拓广平面的一个双射. 于是可以把叠合对径点的球面作为拓广平面的一个拓扑模型.

模型二，三维欧氏空间过原点的直线的集合 (原点除外). 由模型一，可以把三维欧氏空间过原点的每一条直线上的点去掉原点之后看成一个等价类，作为拓广平面上的一个点，构成拓广平面的一个模型.

模型三，叠合赤道上对径点的下半球面. 由模型一出发 (图 1.9)，将上半球面去掉，则除赤道上的对径点对应于无穷远直线上的点而外，下半球面的点与拓广平面除无穷远直线外的点一一对应，这是拓广平面的又一个拓扑模型.

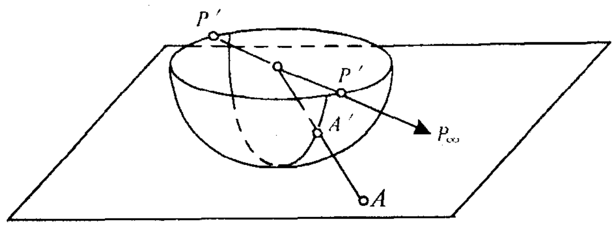

图 1.9

模型四，叠合周界上对径点的圆盘. 由模型三，我们把半球面看成由橡皮膜制成，将之拉伸、压平，则变成一个实心的圆盘，叠合其周界上的对径点，则得到拓广平面的圆盘模型.

观察图 1.10 的圆盘模型，其中的 $A, A; B, B$ 分别是对径点，因此是拓广平面上的同一个点. 将其上 $ABAB$ 的一块剪下，因为它是橡皮膜，又可以将其拉伸使其变成一个矩形 (图 1.11)，当我们将两端相同的点粘起来后，就得到了著名的 Möbius 带，这是一个不可定向的曲面，只有一个面. 因为它是拓广平面上的一块，从而拓广平面也是不可定向的.

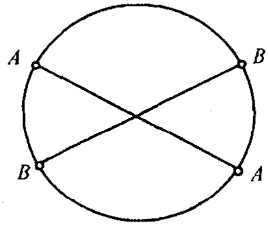

图 1.10

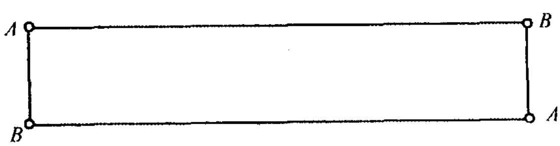

图 1.11

五、射影基本形

平面射影几何涉及到如下两对射影基本形，他们分别是关于点和直线的.

(1) **点列**. 同一直线上的点的集合. 此直线称为点列的**底**, 点列中的点称为点列的 **元素**.

以直线 l 为底的点列常记作 $l(A, B, C, \cdots)$ 或 $l(P)$.

(1)′ **线束**. 平面上过同一点的直线的集合. 此点称为线束的 **束心**, 线束中的直线称为线束的 **元素**.

以点 L 为束心的线束常记作 $L(a, b, c, \cdots)$ 或 $L(p)$.

由前述，每一条拓广直线上都有同样多的点，都等于平面上过一通常点的直线数. 此外，不难想像拓广平面上过一个通常点的直线数与过一个无穷远点的直线数也相同. 因此，上述一维基本形作为集合其基数是相同的.

注意，点列的着眼点为同一直线上的点，而不是直线本身. 因而，点列 (共线点的集合) 与直线 (点的轨迹) 是截然不同的两个概念，点列是作为几何元素的点的集合，而直线仅仅是一个几何元素. 同样，线束也是作为几何元素的共面直线的集合，条件是这些直线经过同一个点.

(2) **点场**. 同一平面上所有点的集合, 这平面称为点场的 **底**, 其上的点称为点场的 **元素**.

(2)′ **线场**. 同一平面上所有直线的集合. 这平面称为线场的 **底**, 其上直线称为线场的 **元素**.

我们常以平面的记号来记点场或线场，如点场 π 或线场 π 等等.

这四个射影基本形中，前一对为 **一维基本形**, 后一对为 **二维基本形**. 今后将会常常用到.

在平面射影几何中，点和直线是两类基本几何元素，故我们分别关于点和直线定义了射影基本形. 容易看出，在中心射影之下，这些射影基本形的像都还是同类射影基本形.

下面给出平面射影几何中最常使用的一对基本图形.

(3) **三点形**. 不共线三点及其两两连线所构成的图形. 这三个点称为三点形的顶点, 其两两连线称为三点形的边.

常以其顶点来记三点形, 如三点形 ABC 等等.

(3)′ **三线形**. 平面内不共点三直线及其两两相交的交点所构成的图形. 这三直线称为三线形的边，其交点称为顶点.

常以其边来记三线形，如三线形 abc 等等.

注意，上述图形与初等几何里的三角形是不同的概念.

习 题 1.1

1. 设 φ 为平面 π 到平面 π' 的中心射影，直线 f 为平面 π 上的影消线. π 上两直线 p, q 与 f 共点于 V, p, q 在 π' 上的像分别为 p', q'. 求证: $p' /\!/ q'$.

2. 求一个中心射影，将平面 π 上的任一四边形投射为平面 π' 上的一个平行四边形.

3. 设 φ 为平面 π 到平面 π' 的中心射影，直线 f 为平面 π 上的影消线，P, Q 为直线 f 上的两个定点，R 为平面 π 内不在 f 上的任一点. 求证：$\angle PRQ$ 在 π' 上的像为定值.

4. 如果将平面 π 上的一条定直线 p 以 O 为投射中心投射到平面 π' 上得直线 p'. 求证：当 O 变动时，直线 p' 经过一个定点.

5. 问下列图形经过中心射影之后的对应图形分别是什么？

(1) 等腰三角形；　(2) 直角三角形；
(3) 梯形；　(4) 四边形；
(5) 圆；　(6) 二次曲线；
(7) 正六边形；　(8) 两条平行直线；
(9) 两条垂直直线；　(10) 点列或线束.

6. 第 5 题中哪些图形在中心射影下是不变的 (指变为同名图形)？

§1.2　拓广平面上的齐次坐标

显然，由于理想元素的引入，拓广直线与拓广平面上的点已不能用通常的笛氏坐标来刻画. 为此，本节引入一种全新的坐标 —— 齐次坐标. 引入的宗旨是从笛氏坐标出发，使得通常点和无穷远点都可以用齐次坐标来刻画，但是对于通常点，齐次坐标与笛氏坐标又不发生矛盾. 我们把将要引入的这种齐次坐标称为笛氏齐次坐标.

一、 n维实向量类

设 R 表示实数集. 记 R^n 表示全体 n 维实向量的集合，即

$$R^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) | x_i \in R\},$$

并记 $0 \in R^n$ 为 n 维零向量. 在 $R^n \setminus \{0\}$ 中的向量之间建立一种关系 $\sim$: 设 $x, y \in R^n \setminus \{0\}$. 则 x 与 y 之间具有关系 $\sim$ 当且仅当存在 $\rho \in R (\rho \neq 0)$ 使得 $x = \rho y$. 容易看出 $\sim$ 为 $R^n \setminus \{0\}$ 上的一个等价关系. 令

$$RP^{n-1} = (R^n \setminus \{0\}) / \sim \quad (n \geqslant 2).$$

则 RP^{n-1} 是全体 n 维非零实向量类的集合. 为方便计，我们常取向量类中的任一个向量来记这个类. 比如，$x \in RP^{n-1}$ 既表示 RP^{n-1} 中的一个类即 R^n 中所有与 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 成比例的向量，也表示该类的一个代表元即一个特定的 n 维实向量 x. 我们对将 x 写成行向量和列向量不作区分，视应用场合需要，可以将一个向量写为行向量，也可以写为列向量.

RP^{n-1} 中的向量习惯上都用圆括号表示，如果我们将其中所有向量都改为方括号表示，即 $x=[x_1,x_2,\cdots,x_n]$. 我们将这样表示的 n 维实向量类记作

$$(RP^{n-1})^* = (R^n \setminus \{0\})/\sim \quad (n \geqslant 2),$$

这里 R^n 中的向量都以方括号记. 尽管从代数上说，RP^{n-1} 与 $(RP^{n-1})^*$ 实际上是完全相同的集合，但是它们将被赋以不同的几何意义.

二、齐次点坐标

1. 一维齐次点坐标 (拓广直线上点的齐次坐标)

定义 1.4 对于拓广直线上的通常点 P, 设其笛氏坐标为 x, 则定义满足 $x_1/x_2=x$(其中 $x_2\neq 0$) 的有序数组 (x_1,x_2) 为点 P 的 **齐次坐标**; 对于无穷远点 P_∞, 定义 $(x_1,0)(x_1\neq 0)$ 为其齐次坐标.

我们将原欧氏直线上的点的笛氏坐标称为 **非齐次坐标**.

根据定义 1.4, 拓广直线上的任一点，都有无穷多组齐次坐标，即若 (x_1,x_2) 是点 P 的齐次坐标，则对任意的 $\rho\neq 0$, $(\rho x_1,\rho x_2)$ 也是点 P 的齐次坐标. 于是，原点有一组齐次坐标为 $(0,1)$, 无穷远点有一组齐次坐标为 $(1,0)$. 定义 1.4 也刻画了通常点的齐次与非齐次坐标之间的关系.

容易看出，定义 1.4 实际上定义了拓广直线上的点的集合与 RP^1 之间的一个双射 φ, 我们称 φ 为拓广直线上的齐次点坐标映射.

2. 二维齐次点坐标 (拓广平面上点的齐次坐标)

容易看出，拓广平面上任一点 P 都可视为两条直线 l_1,l_2 的交点 (这里，l_1,l_2 均为有穷远直线), 若 P 为有穷远点，则 $l_1 \nparallel l_2$; 若为无穷远点 P_∞, 则 $l_1/\!/l_2$. 我们借助于这种方法来描述平面上的点，进而引入二维齐次点坐标. 设

$$l_i:\ A_ix+B_iy+C_i=0, \qquad i=1,2.$$

情形一. 若 $l_1\nparallel l_2$, 则交点 P 为有穷远点，设 P 的笛氏坐标为 $P(x,y)$, 则

$$x=\frac{\begin{vmatrix} B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}},\quad y=\frac{\begin{vmatrix} C_1 & A_1\\ C_2 & A_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}}.\qquad \text{其中}\begin{vmatrix} A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}\neq 0\ (\text{因为 } l_1\nparallel l_2).$$

令

$$x_1=\begin{vmatrix} B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{vmatrix},\qquad x_2=\begin{vmatrix} C_1 & A_1\\ C_2 & A_2\end{vmatrix},\qquad x_3=\begin{vmatrix} A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix},$$

则有 $x = x_1/x_3, y = x_2/x_3$, 即 $x : y : 1 = x_1 : x_2 : x_3$. 从而，我们可以把任何与 $(x, y, 1)$ 成比例的有序三数组 (x_1, x_2, x_3) 定义为点 P 的齐次坐标.

情形二. 若 $l_1 // l_2$, 则其交点为无穷远点 P_∞, 且此时 P_∞ 为 l_1, l_2 方向上的无穷远点. 显然 $x_3 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$. 故可考虑用与 $(x_1, x_2, 0)$ 成比例的有序三数组来定义此 P_∞ 的齐次坐标. 显然由 $l_1 \neq l_2$ 可知 x_1, x_2 不全为零. 为说明此定义的合理性，假定 $x_1 \neq 0$, 我们来考察 x_2/x_1 的几何意义. 因为

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} = \text{常数}, \qquad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \text{常数}.$$

又 $A_1A_2 \neq 0(l_i \nparallel x$ 轴) 或 $B_1B_2 \neq 0(l_i \nparallel y$ 轴), 不妨假设 $B_1B_2 \neq 0$, 则

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{A_2C_1 - A_1C_2}{B_1C_2 - B_2C_1} = \frac{\dfrac{A_2C_1}{B_1B_2} - \dfrac{A_1C_2}{B_1B_2}}{\dfrac{B_1C_2}{B_1B_2} - \dfrac{B_2C_1}{B_1B_2}} = -\frac{\dfrac{A_2}{B_2}\left(\dfrac{C_1}{B_1} - \dfrac{C_2}{B_2}\right)}{\dfrac{C_1}{B_1} - \dfrac{C_2}{B_2}} = -\frac{A_2}{B_2} = -\frac{A_1}{B_1}.$$

于是， x_2/x_1 为 l_i 的斜率. 从而， $(x_1, x_2, 0)$ 表示方向为 $\lambda = x_2/x_1$ 上的无穷远点. $(x_1, x_2, 0)$ 亦可表为 $(1, \lambda, 0)$. 显然，当 $\lambda = 0$(即 $x_2 = 0$) 时，表示 x 轴上的无穷远点. 而对于 y 轴上的无穷远点，可定义其坐标为 $(0, x_2, 0)$, $(x_2 \neq 0)$.

从上述讨论我们可以自然地引入二维齐次点坐标的定义.

定义 1.5 对于拓广平面上的通常点 P, 若其笛氏直角坐标为 (x, y), 则定义有序三数组 (x_1, x_2, x_3) 为其 **齐次坐标**, 其中 $x_3 \neq 0$ 且 $x_1/x_3 = x, x_2/x_3 = y$. 对于不在 y 轴上的无穷远点，定义其齐次坐标为 $(x_1, x_2, 0)$, 其中 $x_1 \neq 0$ 且 x_2/x_1 等于该点所在通常直线的斜率. 定义 y 轴上的无穷远点的齐次坐标为 $(0, x_2, 0)$, 其中 $x_2 \neq 0$.

我们将平面上的通常点的原笛氏坐标称为 **非齐次坐标**.

由定义 1.5, 拓广平面上任一点都有无穷多组齐次坐标，这无穷多组齐次坐标之间相互成比例，即若 (x_1, x_2, x_3) 是点 P 的一个齐次坐标，则对任意的 $\rho \neq 0$, $(\rho x_1, \rho x_2, \rho x_3)$ 也是点 P 的齐次坐标，因此在书写点 P 的齐次坐标时，可以写 $P(\rho x_1, \rho x_2, \rho x_3)(\rho \neq 0)$, 也可以直接写 $P(x_1, x_2, x_3)$. 由定义又知 $(0,0,0)$ 不是任何点的齐次坐标.

基于上述理解，原点的齐次坐标可以写为 $(0,0,1)$, x 轴上的无穷远点和 y 轴上的无穷远点则分别可以写为 $(1,0,0)$ 和 $(0,1,0)$.

对于通常点，定义 1.5 也刻画了其齐次与非齐次坐标之间的关系；对于无穷远点，定义 1.5 还刻画了其前两个坐标分量与其所在通常直线的斜率之间的关系.

容易看出，定义 1.5 实际上定义了拓广平面上点的集合与 RP^2 之间的一个双