

352
全国高等教育自学考试辅导丛书

《高等数学(一)微积分》 自学考试指导与题解

主 编 张文建 魏爱枝



A1008470

知识出版社

图书在版编目(CIP)数据

《高等数学(一)微积分》自学考试指导与题解/张文建,魏爱枝
主编. —北京:知识出版社,2001. 6

(全国高等教育自学考试辅导丛书)

ISBN 7-5015-2956-6

I. 高… II. 张… III. IV.

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1998)第 0000 号

知识出版社出版发行

(北京阜成门北大街 17 号 邮编 100037)

河南长城印刷厂印刷

新华书店经销

开本:850×1168 1/32 印张:12.375 字数:310 千字

2001 年 6 月第 1 版 2001 年 6 月第 1 次印刷

印数:1~5000 册

定价:19.00 元

前 言

为满足广大自学应考者的复习要求,我们编写了这本《〈高等数学(一)微积分〉自学考试指导与题解》。

本书是根据全国高等教育自学考试指导委员会审定的《高等数学(一)自学考试大纲》和指定教材武汉大学出版社出版的《高等数学(一)微积分》(高汝熹)编写的。全书分四部分:第一部分自学指导意见;第二部分综合练习;第三部分模拟自测题;第四部分近两年部分省、市考试试卷选编。其中综合练习包括选择题、填空题、计算题、应用题、证明题等题型,基本涵盖了本课程的考试内容。各章附有参考答案,供学员复习时参考。

由于编写时间仓促,书中疏漏之处在所难免,望考生在使用时阅读《高等数学(一)微积分》教材,并给我们提出宝贵意见,以便修订时参考。

编 者

2001年4月

目 录

第一部分 自学指导意见

一、怎样学习《高等数学(一)微积分》	(1)
二、自学和应考中应注意的几个问题	(3)
三、试卷结构	(6)
四、试卷题型示例与答题方法	(7)

第二部分 综合练习

第一章 函数及其图形	(15)
复习提要	(15)
一、学习目的和要求	(15)
二、重点和难点	(15)
三、内容提要	(16)
综合练习	(27)
一、选择题	(27)
二、填空题	(32)
三、计算题	(35)
四、应用题	(37)
五、证明题	(40)
六、教材习题提示或解答	(41)
参考答案	(45)
第二章 极限与连续	(50)
复习提要	(50)
一、学习目的和要求	(50)
二、重点和难点	(50)

三、内容提要·····	(51)
综合练习·····	(69)
一、选择题·····	(69)
二、填空题·····	(73)
三、计算题·····	(75)
四、应用题·····	(78)
五、证明题·····	(80)
六、教材习题提示或解答·····	(81)
参考答案·····	(95)
第三章 导数与微分 ·····	(97)
复习提要·····	(97)
一、学习目的和要求·····	(97)
二、重点和难点·····	(97)
三、内容提要·····	(98)
综合练习·····	(109)
一、选择题·····	(109)
二、填空题·····	(113)
三、计算题·····	(116)
四、应用题·····	(120)
五、证明题·····	(122)
六、教材习题提示或解答·····	(123)
参考答案·····	(134)
第四章 中值定理与导数的应用 ·····	(138)
复习提要·····	(138)
一、学习目的和要求·····	(138)
二、重点和难点·····	(138)
三、内容提要·····	(138)
综合练习·····	(145)

· · ·

一、选择题	(145)
二、填空题	(149)
三、计算题	(151)
四、应用题	(156)
五、证明题	(159)
六、教材习题提示或解答	(160)
参考答案	(181)
第五章 积 分	(186)
复习提要	(186)
一、学习目的和要求	(186)
二、重点和难点	(186)
三、内容提要	(187)
综合练习	(201)
一、选择题	(201)
二、填空题	(206)
三、计算题	(208)
四、应用题	(216)
五、证明题	(218)
六、教材习题提示或解答	(220)
参考答案	(239)
第六章 无穷级数	(244)
复习提要	(244)
一、学习目的和要求	(244)
二、重点和难点	(244)
三、内容提要	(245)
综合练习	(255)
一、选择题	(255)
二、填空题	(259)

三、计算题	(261)
四、应用题	(266)
五、证明题	(267)
六、教材习题提示或解答	(268)
参考答案	(283)
第七章 多元函数微积分	(288)
复习提要	(288)
一、学习目的和要求	(288)
二、重点和难点	(288)
三、内容提要	(289)
综合练习	(302)
一、选择题	(302)
二、填空题	(307)
三、计算题	(310)
四、应用题	(313)
五、证明题	(315)
六、教材习题提示或解答	(315)
参考答案	(328)
第八章 微分方程初步	(332)
复习提要	(332)
一、学习目的和要求	(332)
二、重点和难点	(332)
三、内容提要	(333)
综合练习	(335)
一、选择题	(335)
二、填空题	(337)
三、计算题	(338)
四、应用题	(339)

五、证明题	(340)
六、教材习题提示或解答	(341)
参考答案	(357)

第三部分 《高等数学(一)微积分》模拟自测题及参考答案

模拟自测题(一)	(359)
模拟自测题(一) 参考答案	(368)
模拟自测题(二)	(370)
模拟自测题(二) 参考答案	(377)

第四部分 高等教育自学考试《高等数学(一)微积分》试题及答案

二〇〇一年上半年全国高等教育自学考试《高等数学(一)微积分》 试题	(378)
二〇〇一年上半年全国高等教育自学考试《高等数学(一)微积分》 试题答案	(384)

第一部分 自学指导意见

《高等数学(一)微积分》是全国高等教育自学考试经济管理类专业基础科的公共课,全书以微积分学为核心内容,在极限理论的基础上讲述了一元与多元函数微积分学、无穷级数、微分方程初步等内容.书中所介绍的理论、思想、方法和技能,不仅对于考生学习后继课程是必不可少的,也是考生掌握现代经济管理理论,并有效地解决实践问题所必不可缺的.比如著名的边际分析和弹性分析,就是经济管理者提高经济管理效益,达到成功管理的有力工具.该门课程是经济管理类专业所有自考课程中较难通过的一门公共课.因此,考生要有积极的投入、恰当的学习方法、充分的过关心理准备、必胜的过关信心.为了帮助广大考生提高学习效率,现提出以下自学指导综合建议,供参考.

一、怎样学习《高等数学(一)微积分》

自学考生大多是利用业余时间,主要依靠自己的力量,独立地完成学业的.学习本来就是艰苦的脑力劳动,怎样使这项劳动成为低投入高效益的劳动呢?这里建议考生做到以下五个方面.

(一)要有正确的学习态度

自学高等数学,除了要有明确的学习目的、坚定的学习志向外,还应当有正确的学习态度.所谓正确的学习态度,最重要的是勤奋刻苦,严格认真,踏踏实实.

(二)选择科学的适合自身特点的学习方法

无论想做好什么事情,都要选择好的方法,方法得当,事半功倍;方法不当,事倍功半.自学高等数学,更要选择科学的学习方

法.

每个考生可根据自身的条件,在学习过程中,博采众长,不断总结,创造出适合自身学习特点的行之有效的好方法.这里将作者的“六十四字学习法”推荐给各位学员供参考.“六十四字学习法”的内容是:

周密计划,循序渐进;
熟读教材,做好笔记;
独立思考,手脑并用;
精心领会,细心验算;
认真解题,严格训练;
知难而进,锲而不舍;
注重记忆,熟能生巧;
把握时间,检查复习.

(三) 周密制定自学计划

有了正确的学习态度,好的学习方法和自学用书,还必须周密制定自学计划.制订自学计划,要从自身的实际情况出发,做到分先后,分层次,周目标,月目标,长计划,短安排.这里介绍一种制订一周自学计划的方法,供参考:每周按七天划一表格,再把每天分成六个时区(上、下午各分两个时区,早晨,晚上各算一个时区);把这一周内必要的生活和社会等活动时间选填进去,剩下的时区统筹安排自学内容,并提出相应的任务指标和具体要求;每周末检查本周自学计划的执行情况和目标实现情况,在此基础上再订下周计划.

(四) 自学高等数学的基本要求

1. 深刻理解,牢固掌握基本概念

深刻理解,牢固掌握基本概念是学好高等数学的基础.理解概念,就是理解概念的内涵,掌握概念的外延,联系实际,了解概念之间的内在联系,对于言简意赅,寓意深刻之概念,要真正正确理解

它的全部含义;对于易混概念,要认真进行比较,领会它们的异同点;对于叙述较长,涉及知识点多的概念,要抓住它的本质特征;对于用抽象式子表述的概念,要知道它的具体内容及特殊情形;对每个定义能举出与之相符的实例,且对给出的实例,能作出它是否合乎定义的正确判断.

2. 对定理、公式、法则等做到立体领会

所谓立体领会公式、法则等,是指对它们的条件和结论要分清,条件与结论之间的逻辑联系要了解,其证明思路,步骤要掌握,对证明方法的由来要加以探讨,并归纳证明的思想方法;对它们的适用范围,应用时的注意事项,条件放宽或加强后适用范围的变化都要弄清楚,对于它们所能解决的问题的基本类型要进行总结分类.总之,对它们的掌握能达到如数家珍,像了解你手中的钢笔那样的状态,就达到了对它们立体领会的境界.

3. 真正搞懂每道例题

读者在没有老师的情况下学习,教材上每道例题就是“老师”.因此,对每道例题除要记它的解答方法,还要领会解题的思考方法,学会解题的技能、技巧,掌握规范的解题书写格式.在此基础上,看能否用别的方法来解答.学会直接和间接、从正面下手和从反面下手等多种解题方法,力求开拓思路,灵活运用学得的知识.还可以适当变更题目的条件或结论后,再行解答,以探求解题规律.

二、自学和应考中应注意的几个问题

(一) 自学高等数学中应注意的四个问题

1. 通读与精读相结合

通读就是了解教材梗概,大致了解每一章每一节的主要内容,为制订计划作准备,也对整个教材体系有个初步了解;精读就是反复研读、推敲、深刻理解内容的本质,获取基础知识(即教材中的定

义、定理、公式、性质、法则,解题步骤,证题思想、方法等),掌握基本技能(即实际运算能力,抽象概括能力,空间想象能力,逻辑思维能力等)。

2. 多做习题,狠抓解题基本功训练

著名数学家华罗庚说过:学数学不做练习,好比入宝山而空返。这是因为学习定义、定理、法则等理论必须用于解题,才能保证所学内容得以被牢固掌握,通过解题才能明确与熟悉定义、定理、法则等理论的用途和用法;并且反过来通过解题才能对定义、定理、法则等理论加深理解。而应用上述理论知识的技能更得通过解题实践才能得到培养。所以,独立地多做习题,多加思考,在理解上狠下功夫,是学好高等数学的关键。切不可认为教材读懂了,例题领会了,就认为高等数学已经学好了,没问题了。一定要尽可能地多做一些练习题。

3. 作好笔记

“不动笔墨不看书”,这是毛泽东的老师徐特立先生的治学经验。其意是说,为了提高学习效果,在看书学习时要勤作自学笔记,事实上,勤作自学笔记,有助于我们深入思考问题,加深对自学内容的理解,有助于巩固记忆,训练综合、概括能力。

做自学笔记可以有多种形式,不必拘泥于固定的体例,长短都可以。如在教材中作眉批或旁论,或在专用本上写专题总结或思考所得等。读者可根据具体情况采用某种形式或者同时采用几种形式作笔记。

4. 经常复习检查

复习是学好高等数学的重要环节,其意义不仅表现在重现学习内容,及时预防遗忘,增强记忆;而且,还在于通过对所学知识的复习,作出更加深刻的联想,以新的更加全面的观点阐明所学知识,使之条理化、系统化,从而温故知新,更上一层楼。

复习按时间可分别安排为周、月、学期复习;按内容可分为课

后复习,单元复习,总复习等.前者是巩固知识预防遗忘的经常性的复习,后者是系统复习,旨在弄清知识的内在联系,全面把握所学的基础理论,熟悉理论的应用,总结解题的思想方法,丰富解题技能和技巧.注意总结解题规律,在加强综合训练上多下功夫.

在复习之后,要对自己掌握知识和解题技能的程度进行检查,检查主要是通过解题来完成.每次检查都可划定题目数量,限定完成时间,而后对照教材与已给答案检查做对的比例,发现不足,及时补习,这样的检查,实际上是考试的临界状态,用这样的办法检查,对于学好高等数学,效果是很好的.

(二) 应考中应注意的三个问题

高等数学虽然难度较大,不易过关,但是,自学考试不同于高考或求职选拔录用考试,是一种水平考试.这个特点又决定了考出好成绩并非高不可攀的,希望考生对高等数学考试注意以下三点.

1. 考试目的要明确

自学考试虽说是一种学历水平考试,达到 60 分即可过关.但是,我们学习的目的不仅是为了及格,而是为了学到解决实践问题的理论、方法和技能,以及为后续课程的学习作好准备.所以有端正的学习目的是必不可少的.一般地说,一个人追求的目标愈高,他取得的成就就愈大.故而,考生自学应考的目标不应是“60 分万岁”,而应是更高更优异.

2. 注意考试命题的范围

《高等数学(一)微积分》考试命题的依据有二:

(1) 经全国高等教育自学考试指导委员会审定,国家教委批准试行的《高等数学(一)考试大纲》.

(2) 根据上述大纲编写的全国高等教育自学考试教材《高等数学(一)微积分》(高汝熹主编,武汉大学出版社出版)和有关的自学辅导书.

3. 答题程序及策略、技巧

试卷到手,本应自前至后一一解答的,但无数的实践及心理学理论都证明,按照不同的答题程序解答,结果会不同,有时成绩会相差很大,按以下程序答题为好.

(1) 浏览试卷全部试题,把握试题的题型,难易程度,占分比例,试题总量等,以便统筹答题时间和检查校对时间.

(2) 先易后难,旗开得胜,使自己的应试情绪尽快进入最佳境界,先做小题、易作题,既可增强自信,又易得分,且使自己迅速从考前的紧张情绪中解脱,进入最佳“竞技状态”.若不然,先做大题、难题,耗费时间,做不出来,极易使自信心受挫,最后可能连小题、易作题也未能做好,或是没来得及做,考试时间没有了,留下遗憾在心头.

(3) 考试是有时间限制的,要在既定时限内完成大量考题的解答,速度慢了会出现时间不够,连本来会做的也未做,但只注意速度,不能准确、规范地解答也不出成绩.

(4) 卷面整洁,字迹清晰,答题要准确、规范,条理清楚.考试时,为了争取时间,有的字迹潦草,勾勾画画、涂涂抹抹,卷面搞得很脏很乱,不易辨识.这就会影响评卷老师的观感,影响成绩.对于计算题和证明题,一定要计算有步骤,证明有过程,一步一步解证,使评卷老师看得清楚,逐步给分,从而得高分.

(5) 答题要完整,不要空题不做,特别是单项选择题,一般都是给三个或四个答案,让选出一个正确答案,选对得分,不选、选错不得分,从概率的角度讲,随机选取一个答案,选对的概率也占 33% 或 25%,所以一定不要不选.选择时,若拿不准,你要沿着创造性思维的轨迹,勇敢地跟着感觉走,切忌优柔寡断,涂过来又改过去,决断难出.一般地,可以最初脑子里的答案为准来选择.

三、试卷结构

(一)《高等数学(一)微积分》试卷的全部题目覆盖各章内容,

并适当突出重点章节,体现《高等数学(一)微积分》的重点内容.

(二) 各试题中对能力层次的要求分为识记、领会、简单应用、和综合应用四个层次,每份试卷中各层次所占的分数比例一般为:识记、领会占 25% 左右,简单应用占 40% 左右,综合运用占 35% 左右.

(三) 各试题的难易程度可分为易、较易、较难、难四个等级.每份试卷中,不同难易程度的试题所占分数一般为:易占 20% 左右,较易占 30% 左右,较难占 30% 左右,难占 20%.需要注意的是,试题的难易程度与能力层次不是同一个概念,在各能力层次中都会存在不同难度的问题,切勿混淆.

(四) 本课程考试试卷采用的题型一般有:单项选择题、填空题、计算题、证明题、应用题等,它们将从不同的角度和层次,用不同的方式,全面、客观、科学地测试考生的知识领会程度和运用能力高低.试卷中客观题与主观题的分值比例一般 1:4 左右(工科、本科的比例一般为 3:2 左右).前者题量大,每题分值小;后者各类题型中题量较小,但分值较大,所有试题在各章均有分布,分布数目较多的依次是积分、多元微积分、导数及应用等章,各章题目的分值占有比例大体上是前五章占 60 分多一点,后三章占近 40 分,其中仍以积分、多元微积分、导数的应用占分比重较大,约占到 60 多分.这里需要强调说明的是,以上分析只是据往年的考试试卷的分析结论,并不肯定以后每年都会按如此比例.因为每年的试卷都有新的变化,因此,以上分析仅供考生参考.要考出好成绩,还应踏实认真地学懂学会,全面掌握.

四、试卷题型示例与答题方法

一般地说,对于不同的题型,要采用不同的答题方法与技巧.

(一) 单项选择题

单项选择题,是目前各种考试试卷中最受重视、应用最广的一

种题型.它一般是提出一些问题或写出一个经补充才是完整真实的命题,然后给出 3 ~ 4 个备选答案或是这个命题的几种补充说法,其中有一个是正确的,要求考生把正确的答案选择出来,把正确答案的代码填在指定的括号内.这种试题容量大,测量面广,它不但能考查考生的记忆、理解能力,还可考查考生的判断、推理、分析、综合、计算和运用能力.评分标准统一、客观、准确,不受评卷人的主观、偏爱等因素的影响,有利于对考生的公平评价.解答单项选择题,常用的方法有两个,即直接法和间接法,或叫肯定法和否定法.

所谓肯定法,就是根据题目条件,通过判断、推理、分析、综合、计算等手段,直接得出题目的正确答案,而后从备选答案中找出要选的答案这样一种方法.

例题 1. 设某产品的总利润函数为 $l(x)$, 则生产 x_0 个单位时的边际利润是_____.

- A. $\frac{l(x_0)}{x_0}$ B. $\frac{dl(x)}{dx}$
 C. $\left. \frac{dl(x)}{dx} \right|_{x=x_0}$ D. $\frac{d}{dx} \left(\frac{l(x)}{x} \right)$

(注:此题为 1995 年下半年全国高等教育自学考试高等数学(一)试题).

因为,总利润函数为 $l(x)$, 所以,边际利润函数为 $l'(x) = \frac{dl(x)}{dx}$, 当生产 x_0 个单位时,其边际利润是 $l'(x_0) = \left. \frac{dl(x)}{dx} \right|_{x=x_0}$, 因此应选代号为 C 的答案.

例题 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} \right)$ 的值是().

- A. ∞ B. 0 C. $\frac{1}{2}$

(注:此题为 1995 年上半年湖北省高等教育自学考试高等数学(一)试题).

$$\begin{aligned}
 & \text{因为, } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} (1 + 2 + 3 + \cdots + n) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

所以,应选代号为 C 的答案.

例题 3. $\int \frac{x}{1+x^4} dx = (\quad)$

- A. $\frac{1}{2} \arctan x^2 + x$ B. $\frac{1}{2} \arctan x^2 + c$
 C. $\arctan x^2 + c$ D. $\ln(1+x^2) + c$

(注:此题为 1996 年下半年湖北省高等教育自学考试高等数学(一)试题).

$$\text{因为, } \int \frac{x}{1+x^4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dx^2}{1+(x^2)^2} = \frac{1}{2} \arctan x^2 + c$$

所以,应选代号为 B 的答案.

所谓否定法,就是把明显错误的答案一一排除,留下接近正确的答案,再从中排除似是而非的答案,最后选择一个正确答案的方法.

例题 4. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 内一定_____.

- A. 单调 B. 有界 C. 可导 D. 可微

首先,排除 A, 因为函数 $f(x) = x^2$ 在闭区间 $[-2, 3]$ 内连续, 但 $f(x)$ 在该区间内非单调.