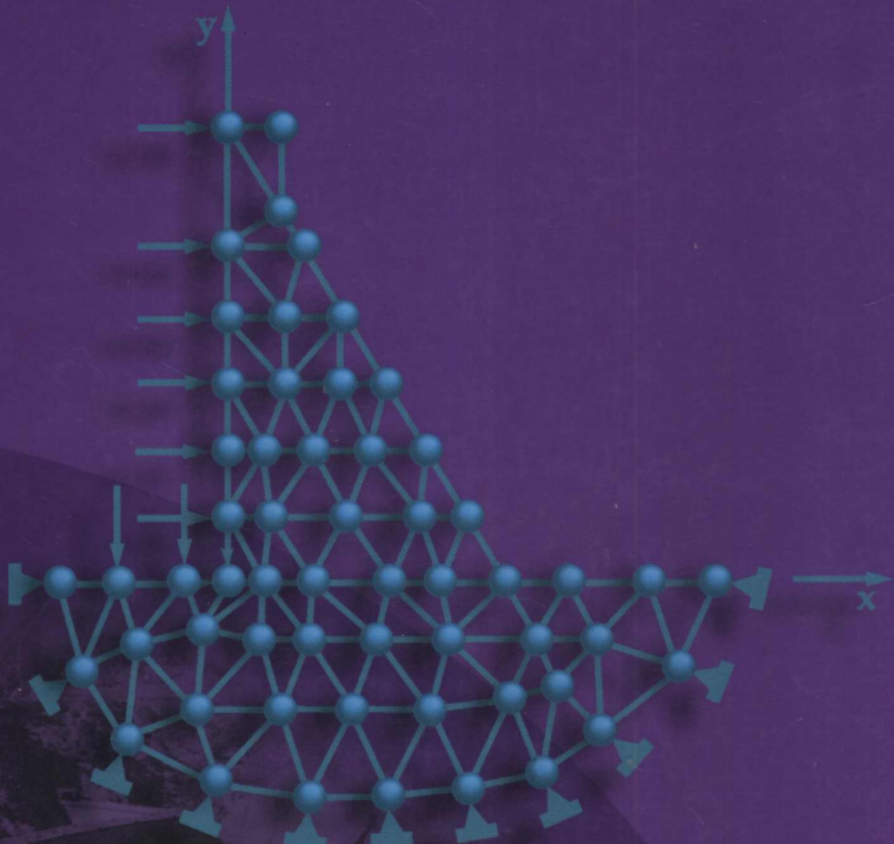
工程力学教程之七

工科力学课程教学基地教材

# 计算力学基础

杨海霞　章　青　邵国建




河海大学出版社

**工科力学课程教学基地教材**

工程力学教程之七

# 计算力学基础

杨海霞　章　青　邵国建



河海大学出版社

## 内 容 提 要

该教材内容分基本内容和附录部分。前者共四章:绪论,平面杆件结构的有限元分析,平面问题的常应变单元,平面问题的较精密单元;后者包括:平面刚架的程序设计,平面四结点等参单元的源程序及使用说明 。

该教材的特点是将结构力学中的矩阵位移法与平面问题的有限元法融为一体,它为高等学校土建、水利、力学类专业本科教材,也可用作研究生、教师和工程技术人员的参考书。

**图书在版编目(C I P)数据**

计算力学基础/杨海霞,章青,邵国建.—南京:河海大学出版社,2001.11

ISBN 7-5630-1674-0

Ⅰ.计... Ⅱ.①杨...②章...③邵... Ⅲ.计算力学—高等学校—教材 Ⅳ.0302

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 055640 号

出　版　河海大学出版社
地　址　南京市西康路 1 号(邮编:210098)
电　话　(025)3737852(总编室)
　　　　(025)3722833(发行部)
经　销　江苏省新华书店
印　刷　丹阳教育印刷厂
开　本　787 毫米×1092 毫米　1/16
印　张　13
字　数　304000
版　次　2001 年 11 月第 1 版
印　次　2002 年 7 月第 2 次
定　价　24.00 元

# 序

本教程是河海大学承担教育部《面向21世纪力学系列课程内容和课程体系改革的研究与实践》教改项目和《国家级力学教学基地》建设项目研究的成果。该教程以优化高校工科土木、水利类专业的固体力学系列课程知识结构为目标，按照“重组基础、反映现代、融入前沿、综合交叉”原则，建立由系列模块组成有机联系的一体化力学课程新体系。原有土木、水利类专业设立的4门力学课程(即理论力学、材料力学、结构力学及弹性力学)，由于自成系统、各自为政，缺乏沟通和整合，存在知识结构中不该有的割裂或不必要的重复现象，现代信息和应用实践也较薄弱，不利于进行完整的力学素质教育和创造性思维的培养。本教程按新组建的课程体系分为7门：静力学基础、动力学基础、材料力学、结构静力学、结构动力学、弹性力学基础、计算力学基础等，依序编为高校工科教材——工程力学教程之一到之七。

由新体系组建的工程力学教程具有以下一些特点：

(1) 本教程体系采用了小型模块化和分层系列化的结构，精化了基础，增加了组合的灵活性，便于适应不同专业、不同层次的要求。

本教程将静力问题和动力问题分别设置模块集中论述，使教材内容紧凑、重点突出，避免不必要的重复；同时又将静定问题和超静定问题以及结构分析的经典理论和现代发展的电算方法分别设置在不同模块，以便循序渐进地安排教学内容，使该教程的层次分明，条理清晰，前后连贯，易为读者掌握。

本教程涵盖了不同性质固体(刚体和变形体)、不同形体结构(杆件、杆系和实体结构)的力学分析问题，加强了不同研究对象的各门课程之间的共性联系，又突出了各自的个性差异，有利于学生整体力学素质的提高和创新能力的培养。

本教程以基础力学为主体内容，这部分内容通过反复精选，力求突出基础力学的精华，可以保持内容的相对稳定性。另一些内容则是根据水利、土木类专业的需求而编写的应用性基础内容。这部分内容着眼于加强力学素质教育和应用能力的培养，力求融入现代信息、扩大视野、余留思维空间。因此，根据不同的教学要求，可由本教程各模块适当组合，得到合适的课程体系教材。

(2) 本教程内容的选取和组织体现了整体力学知识的融会贯通和整合优化，既强化了力学知识的完整性，又达到了精减篇幅、提高效率的目的。

新教程中对于力学中一些重要的概念、原理和方法的论述按照其内涵的完整性和外延的逻辑性进行有机的贯通连接、交叉融会和整合优化。例如书中将考察体的平衡概念、平衡条件以及静定问题的求解等内容统一在本教程之一《静力学基础》中作严密完整的阐述，实现了刚体和变形体平衡问题的连贯以及各类静定问题求解条件和方法的统一。又如结构分析理论的平衡律、协调律和本构律等三大定律的提出、相应方程的建立和应用等始终贯穿于不同形体结构问题的分析求解全过程，既突出了工程力学中这一最重要、最基本的理论工

具,又强化了对工程力学问题的求解能力和正确思维方法的培养与训练。本教程中有关虚位移原理、质量几何与面积几何以及静、动力学等内容也体现了其贯通性和统一化。

(3) 本教程中内容的阐述方法不囿于一种模式。对于基本概念的提出和分析计算模型的建立等一类不易理解的内容,采用从特殊到一般的方法论述;对于有关力学的理论分析和推导公式等一类比较严密的数学性较强的内容,则采用从一般到特殊的方法演示,并留下一些内容给读者练习。这种因问题不同而采用不同的叙述、展开方式既体现了认识论的规律,又有利于培养抽象思维、逻辑推理的能力,还可提高授课的质量和效率。与过去传统教材相比,新教程的起点是提高了。

(4) 本教程刻意加强了工程概念、实验和上机计算等实践性内容,并增添了一些现代知识、实验技术和教学软件(本教程各门课的计算程序集中在"工程力学教程计算软件"光盘内),以便强化学生的工程应用、创造性思维和动手能力,提高学生的综合素质。

本教程的编写工作是由河海大学国家力学教学基地的教师们合作分工完成,并由主编统一协调定稿的。各模块的编者分别为:《静力学基础》为武清玺和陆晓敏;《动力学基础》为武清玺、许庆春和赵引;《材料力学》为徐道远、黄孟生、朱为玄和王向东;《结构静力学》为蔡新和孙文俊;《结构动力学》为张子明、杜成斌和江泉;《弹性力学基础》为陈国荣;《计算力学基础》为杨海霞、章青和邵国建。本教程由卓家寿、孙文俊和张子明任主编。

本教程由教育部基础力学课程指导小组组织专家评审,参加审稿的专家有胡增强教授、王鑫伟教授、赵光恒教授、佘颖禾教授、单建教授等。以上专家们提出的宝贵审稿意见,为本书的修改起了重要的指导作用。特别要提出的是教育部基础力学课程指导小组组长范钦珊教授多次审阅了本书稿,提出了指导性的意见,为本书的定稿起了很大的作用。在此特向他们致以诚挚的谢意。

由于水平所限、时间匆忙,书中肯定存在不少缺陷和差错,敬请读者不吝指正。

**卓家寿　孙文俊　张子明**

**2001 年 8 月**

# 目　　录

本章介绍计算力学的研究内容和应用范围，阐述有限单元法和矩阵位移法（杆件有限单元法）的基本思想、有限单元法和矩阵位移法的关系，简述其分析过程，为了便于读者学习，对《弹性力学》和《结构力学》位移法的基本公式及能量原理作了必要的回顾。建议读者认真地复习这一部分内容。

# 绪　论



## §1-1　引　言

**计算力学**（Computational mechanics）是根据力学理论，利用现代电子计算机和各种数值方法，解决力学中实际问题的一门新兴学科。它横贯力学的各个分支，不断扩大各个领域中力学的研究和应用范围，同时也在逐渐发展自己的理论和方法。

众所周知，在工程技术领域中，存在着许多力学问题，而这些问题最终均可归结为在一定的边界条件下求解微分方程（偏微分方程和常微分方程）、积分方程或代数方程的问题。近代力学的基本理论和基本方程在19世纪末和20世纪初已基本形成，寻求各种具体问题的解，便成为力学家和工程师追求的目标，其手段可分为理论解析方法、实验研究方法（含原型实测和室内模型试验）和数值计算方法。解析方法解决问题的能力和范围是很有限的，因此，在历史上曾出现引用简化假定使描述问题的基本方程和边界条件能够用解析方法求解的例子，但这种方法并不总是可行的，在很多情况下由于过多的简化将会导致不正确甚至错误的结果。实验研究方法可以确定理论上解决不了的问题，但周期太长，代价较高，有时也存在一定的局限性。数值计算方法通常要涉及到庞大的计算工作量，随着电子计算机技术

的突飞猛进和广泛普及，复杂的数字运算不再成为不可逾越的障碍，数值模拟与计算机图形、图像技术和可视化技术相结合以后，使计算机的仿真应用水平不断提高，在计算机上做“实验”，省工省时，还可以模拟几乎不可能的原型重复试验。现在，数值计算方法业已成为解决工程技术领域力学问题最强有力的工具，并形成了现代力学的一个重要分支——计算力学。

用计算力学求解各种力学问题，一般有下列几个步骤：①用工程和力学的概念及理论建立模型；②运用数学知识寻求最恰当的数值计算方法；③编制计算机程序进行数值计算，在计算机上求出解答，绘制成图表；④运用工程和力学的概念判断和解释所得结果和意义，作出科学结论。

计算力学的研究内容和应用范围是极为广泛的，业已渗透至力学的各个分支，在固体力学、岩土力学、水力学、流体力学、生物力学等领域发挥着重要作用，并促进它们进一步发展。

数值计算方法是计算力学的核心内容。数值计算方法有很多种，其中具有代表性的方法有：有限差分法、变分法和本书将要介绍的有限单元法以及加权残量法、边界单元法、无单元法等。这些方法的实质绝大多数是将偏微分方程的边值问题化成代数方程问题，然后用计算机求出有限个点上基本未知量的函数值。

在数值计算方法中，有限单元法是最具有生命力的。由于有限单元法选用的单元形状可以是多种多样的，因此它具有很大的灵活性和通用性，对于各种复杂的因素，如复杂的几何形状，任意的边界条件，不均匀的材料特性，杆件、板、壳、块体等各种类型构件及其组合结构均能灵活地加以考虑，而不会发生处理上的困难。另一方面，有限单元法作为微分方程的数值解法，已成为应用数学的一个新分支，通过数学家们研究解的存在性、收敛性、稳定性和误差估计，为有限单元法奠定了坚实的理论基础。加之，该法物理概念清晰，各种商业软件发达，已成为当前工程结构分析最为有效的方法。

## §1－2 有限元法概述

### 一、矩阵位移法

**结构矩阵分析法**(matrix analysis of structures)是用矩阵数学来描述结构力学基本方法的数值分析方法。矩阵数学表达力强，运算简洁方便，并且适于计算机组织运算，是用计算机进行结构数值分析最强有力的数学工具。

与结构力学的力法和位移法相对应，结构的矩阵分析方法分为**矩阵位移法**(matrix-displacement method)(劲度法或刚度法)、矩阵力法(柔度法)和矩阵混合法。由于矩阵力法中静定基本系的选择无确定性，不便于编制统一的计算机程序，而矩阵位移法具有简单、定型、易于程序化的优点，在工程界得到广泛的应用。

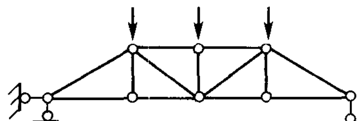
矩阵位移法并不因采用矩阵数学的描述手段，而改变位移法的基本原理。它与位移法的区别仅在于表达形式不同，引入了一些新术语，矩阵位移法的计算模型是将杆件结构离散为杆件单元的组合体如图 1－1(a)、(b)，各单元彼此在结点处连接(如铰接或刚接等)。该方法取结点位移为未知量，首先建立各单元杆端力与单元杆端位移的关系(此过

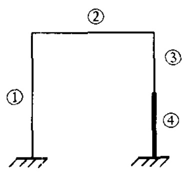
程称单元分析）；然后根据结点处平衡条件建立整体平衡方程（结点处变形协调条件事先予以满足），解这组线性方程求得结点的位移值（该过程称为整体分析）；最后将求出的结点位移代入到单元分析中得到杆端力公式，计算各单元的杆端力，从而获得该杆件结构分析的全部成果。

## 二、有限单元法

**有限单元法**（finite element method）是目前应用最广泛的求解一般连续域问题的数学方法。它起初是求解杆件结构中的矩阵位移法向二维和三维结构的推广，但很快被广泛地应用于求解热传导、电磁场以及流体力学等非结构问题领域中。

例如，要分析图 1－1(c)所示的重力坝二维应力分布，可以采用结构力学中矩阵位移法的思路来近似地计算。即将重力坝离散成有限个小三角形单元的组合体，近似地认为这些单元体之间仅在结点处连接。由于三角形单元区域比起原结构小得多，对这个小三角形近似假设一个位移分布模式，将单元内任意一点的位移用结点处的位移来表示，用弹性力学方法得出该单元任一点的应变、应力以及结点力与结点位移的关系（单元分析），再由整体分析中所有结点的平衡条件，建立以结点位移为基本未知量的整体平衡方程。求出各结点的位移后，再求解各单元的应力，用它们来近似代替原结构的应力分布。显然，随着单元数目的增加，也即单元尺寸的缩小，解的近似程度将不断提高，如果单元划分满足问题的收敛性要求，近似解最终将收敛于精确解。这就是有限元法最初的思路和方法，它源于一个物理直觉：把一个无限自由度的连续系统简化为离散的有限自由度的元件组合体。


(a)



(b)

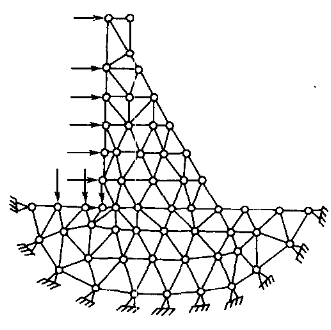

(c)

图 1－1

## 三、矩阵分析法与有限单元法的关系

### 1. 有限单元法起源于矩阵分析法

杆件结构的矩阵分析法可视为一维问题有限单元法，它的结构离散、单元的划分直观且简单。与矩阵分析法相对应，有限单元法也有位移法、力法和混合法三种基本方法，其中有限元位移法在工程中的应用最为广泛。

### 2. 两种方法均是近似的数值计算方法

有限元法的近似性在于在单元内所假设场函数是近似的，用它组成的分区场函数组合来逼近原结构的场函数还是近似的，而其应变和应力计算是按弹性力学精确公式导出的。而矩阵分析法是经典结构力学方法派生而来的，是相对精确的数值分析方法。它的近似性源同于经典结构力学方法的近似性，例如假设它们的弹性性质是杆轴线的一维函数，在弯曲问题中采用的横截面保持为平面的假设等。在单元的离散化、单元分析、整体分析和杆件的变形计算等都是“相对精确”的。

**3. 有限元可以用静力法推导公式，也可以用能量原理（或虚功原理）的方法推导**

类似地结构力学的矩阵位移法，也可以用静力法和能量原理（或虚功原理）的方法推导。

鉴于矩阵分析法与有限元法的上述联系，鉴于矩阵位移法的直观简单、物理概念清晰，从由浅入深、循序渐进和实用的角度出发，本书先介绍平面杆件有限元位移法（矩阵位移法），后介绍平面问题的有限元位移法，其基本思想还可以推广应用于其他问题。

## §1－3 弹性结构分析问题的矩阵表示基本公式

### 一、基本方程的矩阵表示

**1. 弹性力学平面问题的基本公式**

弹性力学的基本方程有平衡方程、几何方程与物理方程，此外，还有边界条件。这里只介绍平面问题基本方程和边界条件的矩阵表示。

（1）平衡方程

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+F_{bx}=0\\ \frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}+F_{by}=0\end{aligned}\right\}$$

用矩阵表示为

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y}\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}F_{bx}\\ F_{by}\end{Bmatrix}=0$$

简写成

$$\boldsymbol{A}^{T}\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{p}=0 \tag{1-1}$$

其中

$$\boldsymbol{\sigma}=\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix},\quad \boldsymbol{p}=\begin{Bmatrix}F_{bx}\\ F_{by}\end{Bmatrix},\quad \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x}\end{bmatrix}$$

分别称 $\boldsymbol{\sigma}$，$\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 为应力列阵、体力列阵和微分算子矩阵。

（2）几何方程

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x},\qquad \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}$$

用矩阵表示为

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x} & 0\\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y}\\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u\\ v\end{Bmatrix}$$

简写成
$$\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{f} \tag{1-2}$$

其中，$\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}$，$\boldsymbol{f}=\begin{Bmatrix}u\\ v\end{Bmatrix}$，分别称为应变列阵和位移列阵。

(3) 物理方程

平面应力问题的物理方程

$$\sigma_x=\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x+\nu\varepsilon_y)$$

$$\sigma_y=\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y+\nu\varepsilon_x)$$

$$\tau_{xy}=G\gamma_{xy}=\frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}$$

用矩阵表示为

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix} \tag{1-3}$$

简写成
$$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon}$$

其中，$\boldsymbol{D}=\dfrac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2}\end{bmatrix}$，称为平面应力问题的弹性矩阵。

对于平面应变问题的物理方程也可以表示成式(1-3)，但须将 $\boldsymbol{D}$ 中的 $E$ 换为$\dfrac{E}{1-\nu^2}$，$\nu$ 换为$\dfrac{\nu}{1-\nu}$。

(4) 边界条件

应力边界条件
$$\begin{cases}l(\sigma_x)_s+m(\tau_{xy})_s=F_{sx}\\ m(\sigma_y)_s+l(\tau_{xy})_s=F_{sy}\end{cases}$$

用矩阵表示为

$$\begin{bmatrix}l & 0 & m\\ 0 & m & l\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}_s=\begin{Bmatrix}F_{sx}\\ F_{sy}\end{Bmatrix}$$

简写成
$$\boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma}_s=\overline{\boldsymbol{p}} \tag{1-4}$$

其中，$\boldsymbol{n}=\begin{bmatrix} l & 0 & m \\ 0 & m & l \end{bmatrix}$，$\bar{\boldsymbol{p}}=\begin{Bmatrix} F_{sx} \\ F_{sy} \end{Bmatrix}$，称为边界外法线方向余弦列阵和给定边界面力列阵。

位移边界条件 $$u_s=\bar{u},\quad v_s=\bar{v}$$

用矩阵表示为
$$\boldsymbol{f}_S=\bar{\boldsymbol{f}} \tag{1-5}$$
其中，$\bar{\boldsymbol{f}}=[\bar{u}\quad \bar{v}]^T$，称为给定边界位移列阵。

(5) 在一定的边界条件下，联立求解方程(1-1)～(1-3)即可求出位移、应变和应力。

**2. 杆件结构位移法的基本公式**

对于具有 $n$ 个可动结点位移的问题，需要加上 $n$ 个附加约束来建立基本系，根据静力协调条件知每个附加约束内的约束力都应等于零，从而得到 $n$ 个平衡方程组成的位移法的基本方程(典型方程)。

$$\begin{aligned}
&F_{R1}=0, && K_{11}Z_1+K_{12}Z_2+\cdots\cdots F_{R1P}=0\\
&F_{R2}=0, && K_{21}Z_1+K_{22}Z_2+\cdots\cdots F_{R2Z}=0\\
&\cdots\cdots && \cdots\cdots\quad \cdots\cdots\quad \cdots\cdots\\
&F_{Rn}=0 && K_{n1}Z_1+K_{n2}Z_2+\cdots\cdots F_{FnP}=0
\end{aligned}$$

简写成
$$\boldsymbol{K}_{\delta\delta}\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{F}_{R\delta p}=0$$

其中，$K_{\delta\delta}=\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix}$，称为结构劲度矩阵

$\boldsymbol{Z}=[Z_1\quad Z_2\quad \cdots\quad Z_n]^T$ 称为未知位移列阵

$\boldsymbol{F}_{R\delta P}=[F_{R1P}\quad F_{R2P}\quad \cdots\quad F_{RnP}]^T$ 称为约束力列阵或自由项列阵

求出 $n$ 个结点位移后，再由叠加公式 $M=\overline{M}_1Z_1+\overline{M}_2Z_2+\cdots+M_P$ 计算杆端弯矩。

## 二、虚位移原理与最小势能原理

从上述弹性力学的基本方程出发，对结构进行力学分析的方法称静力法。弹性力学中另一类分析方法称能量法，也称为变分法。弹性力学中的变分方程、能量原理表达式和虚功原理表达式都是能量方程，是用能量形式表示的弹性力学基本方程。从位移变分方程出发，可以推导出虚位移原理和最小势能原理，它们等价于用位移表示的平衡方程和应力边界条件。从应力变分方程出发，可以推导出虚力原理和最小余能原理，其等价于位移协调条件和位移边界条件。

下面以平面问题为例，介绍作为有限元位移法理论基础的虚位移原理和最小势能原理。

**1. 虚位移原理**

假设弹性体发生了某种虚位移，用 $u^*$，$v^*$ 表示，而引起的虚应变为 $\varepsilon_x^*$，$\varepsilon_y^*$，$\gamma_{xy}^*$，用矩阵表示为

$$\boldsymbol{f}^*=\begin{Bmatrix} u^* \\ v^* \end{Bmatrix}\text{和}\ \boldsymbol{\varepsilon}^*=\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^* \\ \varepsilon_y^* \\ \gamma_{xy}^* \end{Bmatrix}$$

弹性体虚位移原理为弹性体处于平衡状态的必要和充分条件是：对于任意虚位移，弹性体外力所做的总虚功恒等于该弹性体内部应力在虚应变上所做总虚变形功。平面弹性体问题虚位移原理的虚功方程为

$$\iint_{\Omega}(F_{bx}u^{*}+F_{by}v^{*})\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{S_{\sigma}}(F_{sx}u^{*}+F_{sy}v^{*})\mathrm{d}s=\iint_{\Omega}(\sigma_{x}\varepsilon_{x}^{*}+\sigma_{y}\varepsilon_{y}^{*}+\tau_{xy}\gamma_{xy}^{*})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中，$\Omega$ 为弹性体的内部区域，$S_{\sigma}$ 为面力已知的边界。虚功方程可以用矩阵表示为

$$\iint_{\Omega}\boldsymbol{f}^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{p}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{s\sigma}\boldsymbol{f}^{*\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{p}}\mathrm{d}s=\iint_{\Omega}\boldsymbol{\varepsilon}^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1-6}$$

平面杆系结构虚位移原理的虚功方程为

$$W_{ex}=\sum\int_{0}^{l}\left(M\frac{1}{\rho^{*}}+\boldsymbol{F}_{Q}\gamma^{*}+\boldsymbol{F}_{N}\varepsilon^{*}\right)\mathrm{d}x \tag{1-7}$$

其中，$w_{ex}$ 为结构的外力虚功，$\rho^{*}$，$\gamma^{*}$，$\varepsilon^{*}$ 分别为结构的任意截面的虚曲率半径、虚剪切应变和虚轴向应变。

**2. 最小势能原理**

弹性体的最小势能原理为弹性体的某一位移状态为真实位移状态的必要条件和充分条件是：位移状态使弹性体的总势能成为最小值。用方程表示为

$$\delta V=\iint_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial\sigma_{x}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+F_{bx}\right)\delta u+\left(\frac{\partial\sigma_{y}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+F_{by}\right)\delta v\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y-$$

$$\int_{S_{\sigma}}[(l\,\sigma_{x}+m\tau_{xy}-F_{sx})\delta u+(m\,\sigma_{y}+l\,\tau_{xy}-F_{sy})\delta v]\mathrm{d}s=0$$

上式可用矩阵表示

$$\delta V=\iint_{\Omega}[\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{p}]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\delta}\Delta\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{S_{\sigma}}[\overline{\boldsymbol{p}}-\boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma}_{s}]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\delta}\,f\mathrm{d}s=0 \tag{1-8}$$

其中，$\delta f=\begin{Bmatrix}\delta u\\ \delta v\end{Bmatrix}$

平面杆系结构的最小势能原理表达式为

$$\delta V=\sum\int_{0}^{l}\left[\boldsymbol{M}\,\delta\left(\frac{1}{\rho}\right)+F_{Q}\,\delta\,\gamma+F_{N}\,\delta\,\varepsilon\right]\mathrm{d}x-\sum F_{i}\,\delta\,f_{i}=0 \tag{1-9}$$

其中，$\delta\left(\frac{1}{\rho}\right)$，$\delta\gamma$，$\delta\varepsilon$ 分别为曲率变分、剪切应变变分和轴向应变变分。$\delta f_{i}$ 为与荷载对应的位移变分。

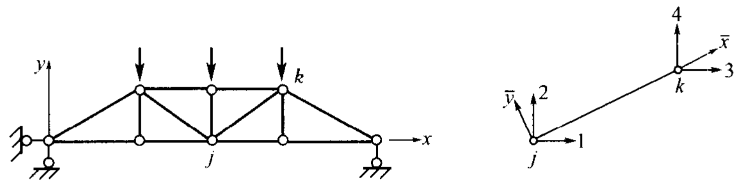
如果将虚位移的变分作为位移的变分，则可以从虚位移原理推导出最小势能原理。

# § 1 — 4　有限元法的分析过程

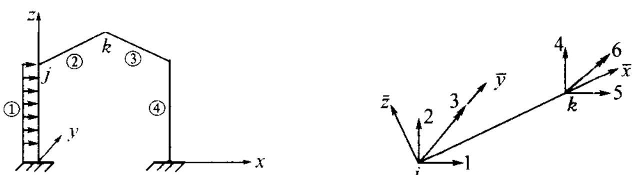
无论是杆件有限元还是弹性连续体的有限元分析都可归纳为三个过程：结构离散化、单元分析以及单元组合体的整体分析。

## 一、结构的离散化

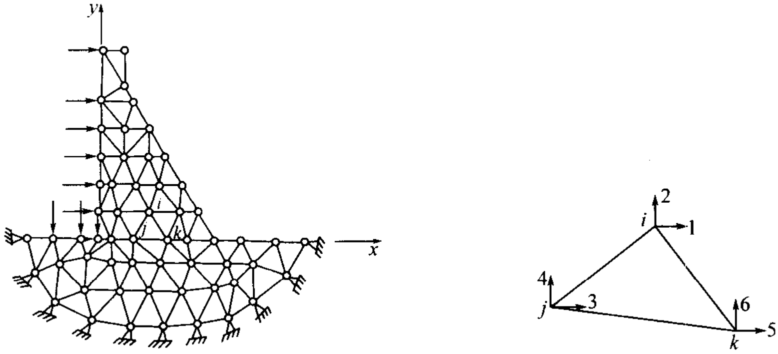
结构离散化就是把原结构划分为离散单元的组合体。因此该过程也称为单元划分，所选定的单元型式应能替代或模拟原结构中相应部分的性态。图 1 - 2 列举了一些结构的单元划分和单元型式的确定。



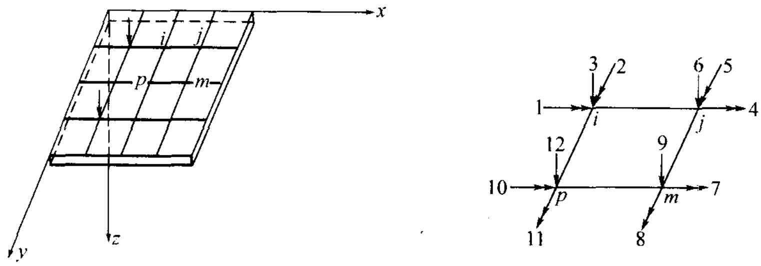

(a)




(b)




(c)




(d)

图 1-2

## 二、单元分析

### 1. 位移模式的确定

单元分析的主要目的是确定反映单元抵抗变形能力的劲度矩阵和反映外载作用的等效结点荷载列阵。在矩阵位移法中，要计算杆件单元的劲度矩阵很容易，分别在杆端给出单位位移，求出杆端力。事实上结构力学中等截面直杆形常数表中的杆端力和转角挠度方程中的系数就是受弯直杆(梁)的劲度矩阵的元素。

然而对于连续体的有限元法却不能如法炮制，因为有限元法是要求解应力的，直接计算任意二维、三维单元中由单位结点位移引起的结点力无现成图表或公式可查，需另作推导。

要使离散后的有限元模型能合理地表示真实的连续体结构，可以通过对各单元中的位移分布的合理假设来实现，而这个假设的合理程度直接关系到有限元最后解的近似程度。所以说单元位移模式的确定，是有限元法的关键。确定位移模式要遵循的重要准则是保证相邻单元的位移协调。

比较常用的假设是取多项式函数作为位移模式，可表示为

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{N}\boldsymbol{\delta}^e \tag{1-10}$$

其中，$\boldsymbol{f}$ 为单元中任一点的位移列阵；$\boldsymbol{N}$ 为形函数矩阵，是单元结点坐标的多项式函数；$\boldsymbol{\delta}^e$ 为单元的结点位移列阵。

### 2. 用结点位移表示单元应变

利用几何方程，可建立如下矩阵方程

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{\delta}^e \tag{1-11}$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{N}$$

其中，$\boldsymbol{\varepsilon}$ 为单元中任一点的应变列阵；$\boldsymbol{B}$ 为形变矩阵，它是以形函数对坐标的偏导数作为元素。

### 3. 用结点位移表示单元应力

利用物理方程，建立如下矩阵方程

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\delta}^e = \boldsymbol{S}\boldsymbol{\delta}^e \tag{1-12}$$

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{B}$$

其中，$\boldsymbol{\sigma}$ 为单元中任一点单元应力列阵；$\boldsymbol{S}$ 为单元应力矩阵；$\boldsymbol{D}$ 为与材料有关的单元弹性

矩阵。

**4. 用虚位移原理或最小势能原理建立单元劲度矩阵**

$$\boldsymbol{F}^e = \boldsymbol{k}\boldsymbol{\delta}^e \tag{1-13}$$

$$\boldsymbol{k} = \iint_{\Omega} \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{D}\boldsymbol{B} t \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1-14}$$

其中，$t$ 为单元厚度；$\boldsymbol{F}^e$ 为由单元结点位移引起的单元结点力列阵；$\boldsymbol{k}$ 为单元劲度矩阵，它是单元结点力和结点位移之间的转换矩阵。

**5. 杆件单元的劲度矩阵**

$$\boldsymbol{F}^e = \boldsymbol{k}\boldsymbol{\delta}^e + \boldsymbol{F}_G^e$$

其中，$\boldsymbol{F}^e$ 为单元杆端力列阵；$\boldsymbol{F}_G^e$ 为单元固端力列阵；$\boldsymbol{k}$ 为单元劲度列阵；$\boldsymbol{\delta}^e$ 为单元杆端位移列阵。

杆件单元的劲度矩阵既可以利用转角挠度方程(静力法)求得，也可以假设单元位移模式，用能量法写出类似式(1-14)的表达式。例如，对于不考虑剪切变形的平面梁单元，用转角挠度方程求得

$$\boldsymbol{k} = \frac{EI}{l}\begin{bmatrix} \frac{12}{l^2} & \frac{-6}{l} & \frac{-12}{l^2} & \frac{-6}{l} \\ \frac{-6}{l} & 4 & \frac{6}{l} & 2 \\ \frac{-12}{l^2} & \frac{6}{l} & \frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} \\ \frac{-6}{l} & 2 & \frac{6}{l} & 4 \end{bmatrix} \tag{1-15}$$

用能量法建立的单元劲度矩阵 $\boldsymbol{k} = \int_l \boldsymbol{B}^T EI \boldsymbol{B} \mathrm{d}s$ (1-16)

其中，$\boldsymbol{B} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\boldsymbol{N}$，$EI$ 为梁单元抗弯刚度，$l$ 为单元杆长。

当位移模式取完整的三次多项式时，由式(1-16)求得的 $\boldsymbol{k}$ 与式(1-15)相同，参见§2-2。

## 三、建立整体平衡方程

在这一步中，有限元法与矩阵位移法一样，对结点 $i$ 建立平衡方程

$$\sum_e \boldsymbol{F}_i^e = \sum_e \boldsymbol{F}_{Ei}^e \tag{1-17}$$

其中，$\sum\limits_e$ 表示对那些环绕结点 $i$ 的所有单元求和，$\boldsymbol{F}_{Ei}^e$ 为单元荷载移置到结点 $i$ 的等效荷载列阵。

对所有结点建立平衡方程，并用矩阵形式表示

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{F}_E \tag{1-18}$$

其中，$\boldsymbol{K}$ 为结构整体劲度矩阵。其元素由各单元 $\boldsymbol{k}$ 组合而成；$\boldsymbol{\delta}$ 为结构整体位移列阵；$\boldsymbol{F}_E$ 为