

北京朗曼教学与研究中心资料

中学数学 1 + 1

——高一数学同步讲解与测试
(上 册)

主编 张志朝

天津人民出版社

敬告读者

原由中国青年出版社出版的,由宋伯涛总主编的《中学1+1》系列丛书,在经过较大程度的修订、改版或重新编写以后,现改由天津人民出版社出版,特此声明。

《中学1+1》系列丛书为作者精心之作,值此重新出版之际北京朗曼教学与研究中心向全国千百万热心读者深表谢意。

本书读者如有疑难问题,可来信与我们联系,朗曼中心将本着为读者服务及负责的精神,及时帮助您排忧解难,与您共同切磋,共同研究,携手共勉,建立友谊。

作者声明:《中学1+1》和《非常讲解》系列丛书为北京朗曼教学与研究中心专项研究成果,请读者认准封面上“北京朗曼教学与研究中心教研成果”,“宋伯涛总主编”等字样,以防假冒。凡以《中学1+1》或“宋伯涛总主编”名义出版的任何其它版本均为侵权行为。

近年来,已发现个别出版物和非出版物公然冒用《中学1+1》品牌,大量盗用《中学1+1》系列丛书内容及其它著作内容。作者声明:凡冒用“1+1”品牌,盗用本书内容或与本书内容雷同的任何其它版本,均为侵犯知识产权行为。保护正版是每个真正尊重知识的忠诚读者的义务,如发现侵权及盗版行为,请及时来信告诉我们,我们将根据有关法律及规定对侵权及盗版者和非法买卖盗版书的个人及单位作出严肃处理。

本书在全国各地均有销售,读者可来信邮购。

来信请寄:北京市朝阳区亚运村邮局89号信箱,北京朗曼教学与研究中心蒋雯丽收,邮编:100101。联系电话:010-64925886, 010-64925887。本中心网址:<http://www.lmedu.com.cn>

《高一数学同步讲解与测试》编委会

主 编 张志朝
编 者 李震亚
陈丽琴
张 岭

再版前言

国家基础教育课程改革启动至今已近两年,义务教育《课程标准》的实施范围正在逐步扩大,新的教育理念被越来越多的教育工作者和社会人士所接受,我国基础教育事业正经历着一次深刻的变革。这个变革的核心,对于教师来说,就是改变角色定位;对于学生来说,就是变革学习方式。本着这样的精神,同时为了适应课程改革深入发展的需要,今年再版时,我们在广泛征求专家、教师、学生和家長意见的基础上,作了较大程度的修改。

本书以新数学大纲为指导,按照新教材的体系分章编写。其特点在于结合教材对各章节重点、难点、疑点及考点等逐一进行讲解,内容详尽,条理清晰,分析透彻,所选例题题型系统全面。所涉及内容主要是各单元应掌握的基础知识、知识运用、思维方法、解题方法等,其中对例题的分析处理十分到位,不仅有恰到好处思路点拨与规范解答,更重要的是解题后的说明,它是作者解题的体会和感受,是解题经验的总结。因此也可以说它是作者从解题实践中具体概括出来的精髓。在说明中,作者言简意赅地揭示巧思的思维过程;如何灵活地选用数学方法;对于可转化或引申的题目,给出其转化或引申的形式及其解法;对题中可能出现的错解予以指出等等。它将给学生以启示,帮助学生领悟作者选题的意图,使学生做到立足基础,抓住关键,突破难点,研究方法,以一类题代一类,真正使学生做到举一反三,触类旁通,从而达到跳出题海、启迪思维的效果。同步测试部分根据各章节特点对基础知识、重点难点、知识应用进行针对性的巩固训练。其中选用了目前各地较为常用的题型,增加了一些体现近几年高考命题方向的新题,并补充了一些与生产生活密切相关的应用题,可以说题型十分丰富,且综合性强,旨在帮助学生巩固知识,提高综合运用知识的能力。

学生在使用本书过程中,应结合教科书,努力掌握知识点的各种用法及注意事项,对某些重点难点要进行仔细的分析、研究,结合例题,做到深刻理解与牢固掌握。做同步练习时,要结合教科书及讲解内容进行独立思考,首先考虑应选择何种解题思路与策略,然后实施解题,并注意解题的规范性,解题结束后可与题解对照,弄懂弄通为什么是这个答案而不是那个答案?为什么这样解而不是那样解?还可以怎样解?怎样才对?从一个点进行散发性联想思维。课后还应对一些重点题目进行反复的再思考、再分析、再总结。有问题主动询问,及时解决。

学习《课程标准》,更新教育观念,有一个不断深入的过程;课程改革的实施,也需要不断地探索和积累。本书此次修订正是学习《课程标准》,改革教学内容和方法的一个具体的落实。希望我们的努力能给老师和同学们的教学活动带来切实而有效的帮助,虽然我们兢兢业业,勉力为之,但因水平有限,难免有错漏之处,诚望批评指正,以利再版时修改和完善。

凡需要本书以及本系列其他图书的读者可与本中心联系,联系电话:010-64925886,64925887,通信地址:北京市朝阳区亚运村邮局 89 号信箱。

宋伯涛

2003 年 6 月于北师大

CONTENTS

目录

第1章 集合与简易逻辑

本章教材分析

一、集合

1.1 集合

学习目标

高考要求

知识点精讲

典例剖析

疑难问题举例

错解点击

本节小结

同步测试

同步测试解答

1.2 子集、全集、补集

学习目标

高考要求

知识点精讲

典例剖析

疑难问题举例

错解点击

本节小结

同步测试

同步测试解答

1.3 交集、并集

学习目标

高考要求

知识点精讲

典例剖析

疑难问题举例

错解点击

本节小结

同步测试

同步测试解答

习题课 集合

学习目标

知识点精讲

典例剖析

疑难问题举例

错解点击

本节小结

同步测试

同步测试解答

1.4 含绝对值的不等式解法

学习目标

高考要求

知识点精讲

典例剖析

疑难问题举例

错解点击

本节小结

同步测试

21

22

24

24

25

28

28

28

29

32

33

36

36

38

41

41

41

41

42

46

46

47

47

同步测试解答	48
1.5 一元二次不等式的解法	50
学习目标	50
高考要求	50
知识点精讲	50
典例剖析	52
疑难问题举例	57
错解点击	58
本节小结	60
同步测试	60
同步测试解答	61
阶段测试(一)	64
阶段测试(一)答案	65
阶段测试(二)	68
阶段测试(二)答案	70
二、简易逻辑	74
1.6 逻辑联结词	74
学习目标	74
高考要求	74
知识点精讲	74
典例剖析	75
疑难问题举例	77
错解点击	77
本节小结	78
同步测试	78
同步测试解答	80
1.7 四种命题	81
学习目标	81
高考要求	81
知识点精讲	81
典例剖析	82
疑难问题举例	86
错解点击	87
本节小结	88

同步测试	88
同步测试解答	89
1.8 充分条件和必要条件	91
学习目标	91
高考要求	91
知识点精讲	91
典例剖析	91
疑难问题举例	94
错解点击	95
本节小结	96
同步测试	96
同步测试解答	97
阶段测试(三)	98
阶段测试(三)答案	100
本章总结	101
基本概念	101
基本性质	102
基本规律	103
基本方法与思想	104
学习要求和需要注意的	
问题	105
基本题型	106
本章测试题	107
本章测试题解答	109

第2章 函 数

本章教材分析	111
2.1 映射	113
学习目标	113
高考要求	113
知识点精讲	113
典例剖析	114
疑难问题举例	117
错解点击	119

本节小结	120
同步测试	120
同步测试解答	122
2.2 函数	125
学习目标	125
高考要求	125
知识点精讲	126
典例剖析	127
疑难问题举例	135
错解点击	137
本节小结	138
同步测试	139
同步测试解答	140
习题课 映射与函数	142
学习目标	142
知识点精讲	142
典例剖析	145
疑难问题举例	148
错解点击	151
本节小结	153
同步测试	154
同步测试解答	156
2.3 函数的单调性和奇偶性	160
学习目标	160
高考要求	160
知识点精讲	160
典例剖析	161
疑难问题举例	164
错解点击	167
本节小结	169
同步测试	169
同步测试解答	170
2.4 反函数	173
学习目标	173

高考要求	173
知识点精讲	173
典例剖析	174
疑难问题举例	176
错解点击	177
本节小结	178
同步测试	179
同步测试解答	180
习题课 函数的单调性、奇偶性和反函数	182
学习目标	182
知识点精讲	182
典例剖析	182
疑难问题举例	185
错解点击	190
本节小结	192
同步测试	192
同步测试解答	194
阶段测试(一)	198
阶段测试(一)答案	200
2.5 指数	205
学习目标	205
高考要求	205
知识点精讲	205
典例剖析	206
疑难问题举例	208
错解点击	208
本节小结	209
同步测试	209
同步测试解答	210
2.6 指数函数	212
学习目标	212
高考要求	212
知识点精讲	213

典例剖析	213	本节小结	252
疑难问题举例	216	阶段测试(二)	252
错解点击	219	阶段测试(二)答案	254
本节小结	220	2.9 函数的应用举例	259
同步测试	220	学习目标	259
同步测试解答	221	高考要求	259
2.7 对数	223	知识点精讲	259
学习目标	223	典例剖析	259
高考要求	224	本节小结	264
知识点精讲	224	同步测试	264
典例剖析	225	同步测试解答	268
疑难问题举例	227	本章总结	272
错解点击	229	主要内容	272
本节小结	230	学习要求和需要注意的	
同步测试	231	问题	275
同步测试解答	232	本章测试题	284
2.8 对数函数	234	本章测试题解答	286
学习目标	234		
高考要求	234	第3章 数 列	
知识点精讲	234	本章教材分析	291
典例剖析	236	3.1 数列	292
疑难问题举例	238	学习目标	292
错解点击	241	高考要求	292
本节小结	242	知识点精讲	292
同步测试	242	典例剖析	293
同步测试解答	243	疑难问题举例	294
习题课 指数、指数函数与对数、		错解点击	295
对数函数	246	本节小结	295
学习目标	246	同步测试	295
高考要求	246	同步测试解答	297
知识点精讲	246	3.2 等差数列	297
典例剖析	247	学习目标	297
疑难问题举例	249	高考要求	298
错解点击	251	知识点精讲	298

典例剖析	299	高考要求	331
疑难问题举例	300	知识点精讲	331
错解点击	300	典例剖析	332
本节小结	301	本节小结	336
同步测试	301	同步测试	336
同步测试解答	303	同步测试解答	338
3.3 等差数列的前 n 项和	304	习题课 数列	340
学习目标	304	学习目标	340
高考要求	305	知识点精讲	340
知识点精讲	305	典例剖析	349
典例剖析	305	本章总结	364
疑难问题举例	307	基本概念	365
错解点击	308	基本公式	366
本节小结	309	基本性质	366
同步测试	309	基本联系	366
同步测试解答	312	基本思想与方法	367
3.4 等比数列	314	学习要求和需要注意的	
学习目标	314	问题	367
高考要求	314	主要题型	367
知识点精讲	315	易错题分析	371
典例剖析	316	高考试题选录	373
本节小结	319	高考试题选录答案	375
同步测试	319	本章测试题	382
同步测试解答	321	本章测试题解答	384
3.5 等比数列的前 n 项和	323		
学习目标	323		
高考要求	323		
知识点精讲	323		
典例剖析	323		
本节小结	327		
同步测试	327		
同步测试解答	329		
3.6 数列的求和	331		
学习目标	331		



第1章 集合与简易逻辑

本章教材分析

一、内容分析

本章主要讲述集合的初步知识与简易逻辑知识两部分内容,集合的初步知识包括集合的有关概念、集合的表示及集合与集合之间的关系.简易逻辑主要介绍命题的基本知识(其中包括逻辑联结词“或”、“且”、“非”)、四种命题及其相互关系和充要条件的有关知识.

本章共分两大节.

第一大节是“集合”.学生在小学和初中数学的学习中,已经接触过集合,对于诸如数集(整数的集合、有理数的集合)、点集(直线、圆)等,都有了一定的感性认识.在此基础上,这一大节首先结合实例引出集合与集合的元素等概念,并介绍了集合的表示方法.然后,从讨论集合与集合之间的包含与相等的关系入手,给出子集的概念,此外,还给出了与子集相联系的全集与补集的概念.接着,又讲述了属于集合运算的交集、并集的初步知识.鉴于不等式的内容目前初中数学只讲述一元一次不等式与一元一次不等式组,考虑到集合知识的运用与巩固,又考虑到下一章讨论函数的定义域与值域的需要,第一大节最后安排的是含绝对值的不等式与一元二次不等式的解法.

第二大节是“简易逻辑”.学生在初中数学中,学习过简单的命题(包括原命题与逆命题)知识,掌握了简单的推理方法(包括对反证法的了解).由此,这一大节首先给出命题和含有“或”、“且”、“非”的复合命题的意义,介绍判断含有“或”、“且”、“非”的复合命题的真假的方法.接下来,讲述四种命题及其相互关系,并且在初中数学的基础上,结合四种命题的知识,进一步讲解反证法,然后,通过若干实例,讲述充分条件、必要条件和充要条件的有关知识.

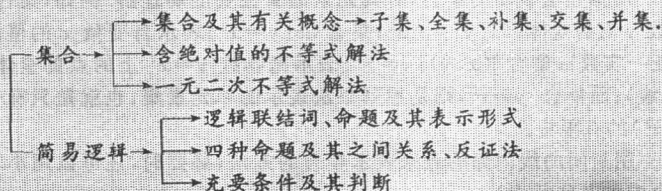
二、教材重点、难点、关键

1.本章第一大节的重点是有关集合的基本概念,集合之间的关系及集合运算.第二大节的重点是逻辑联结词“或”、“且”、“非”与充要条件.

2.难点:①有关集合的各个概念的涵义及这些概念相互之间的区别与联系;②对“简易逻辑”中“或”字的理解;③充要条件的判断及对一些代数命题真假的判断.

3.关键是分清元素与集合,集合与集合之间的关系;分清命题的条件和结论;理解“或”、“且”、“非”的意义.

三、本章的知识结构





一、集 合

1.1 集 合



学习目标

1. 理解集合的概念,了解有限集、无限集、空集的含义.
2. 掌握集合的两种表示方法.
3. 会正确使用符号“ $\in$ ”与“ $\notin$ ”.



高考要求

高考中这部分内容往往与 1.2 节及 1.3 节内容结合起来考查,很少单独出题,这节课只是为 1.2 节及 1.3 节打基础的预备知识,为此只要完成上述三个目标即可.



知识点精讲

1. 集合概念

集合在数学中是一个不加定义的概念.一般地,符合某种条件(或具有某种性质)的对象的全体就构成了一个集合.集合的元素具有:

(1)确定性 对于集合 A 和某一对象 x ,有一个明确的判断标准是 $x \in A$,还是 $x \notin A$,二者必居其一,不能模棱两可.

例如,“著名的科学家”,“漂亮的人”这类对象,不能构成数学意义上的集合,因为“著名”“漂亮”均是模糊语言,不能作为判别每一具体对象是否属于集合的明确标准.

(2)互异性 若 $a \in A, b \in A$,则 $a \neq b$.

(3)无序性 集合中的元素是不排序的,如集合 $\{1, 2\}$ 与 $\{2, 1\}$ 是同一个集合,但实际上在书写时还是按一定顺序书写的,如 $\{-1, 0, 1, 2\}$ 而不写成 $\{0, 1, -1, 2\}$,这样写不方便,其更深刻的含义是揭示了集合元素的“平等地位”.

思考: $\{(1, 2)\}$ 与 $\{(2, 1)\}$ 表示同一集合吗?

2. 集合表示法

(1)列举法 将集合中的所有元素一一列举出来,写在大括号内.

(2)描述法 用描述法表示的集合,对其元素的属性要准确理解.例如,集合 $\{y | y = x^2\}$ 表示函数 y 值的全体,即 $\{y | y \geq 0\}$;集合 $\{x | y = x^2\}$ 表示自变量 x 的值的全体,即 $\{x | x \text{ 为任一实数}\}$;集合 $\{(x, y) | y = x^2\}$ 表示抛物线 $y = x^2$ 上的点的全体,是点集(一条抛物线);而集合 $\{y = x^2\}$ 则是用列举法表示的单元元素集,也就是只有一个元素(方程 $y = x^2$)的有限集.

(3)韦恩图 用封闭曲线内部的点来表示集合的方法(必要时,还可以用小写字母分别定出集合中的某些元素).



3. 符号 $\in$ 、 $\notin$ 的用法

符号“ $\in$ ”、“ $\notin$ ”是表示元素与集合之间的关系的,不能用来表示集合之间的关系.例如, $\{1\} \in \{1, 3, 5\}$ 的写法就是错误的,但 $\{1\} \in \{\{1\}, \{3\}, \{5\}\}$ 的表述是正确的.

4. 空集:不含任何元素的集合.如 $\{(x, y) | \begin{cases} x+y=2 \\ 2x+2y=1 \end{cases}\}$ 是空集,它反映该方程组无解,空集通常记为 $\emptyset$.

5. 集合的分类:含有有限个元素的集合叫有限集,含有无限个元素的集合叫无限集.所以,根据集合元素的有无及元素个数的有限与无限分类有:有限集、无限集.



典例剖析

1. 概念题

例1 考察下列每组对象能否构成一个集合?

- (1)所有的好人;
- (2)不超过20的非负数;
- (3)某一班级16岁以下的学生;
- (4)直角坐标平面内横坐标与纵坐标相等的点;
- (5)高个子的人;
- (6)充分接近 $\sqrt{3}$ 的实数.

分析:(1)“所有的好人”无明确的标准,对于某个人是否是“好人”无法客观地判断.因此(1)不能构成集合;类似的(5)、(6)也不能构成集合.

(2)任给一个实数 x ,可以明确地判断是不是“不超过20的非负数”,即“ $0 \leq x \leq 20$ ”与“ $x > 20$ 或 $x < 0$ ”,两者必居其一,且仅居其一,故“不超过20的非负数”能构成集合;类似地(3)(4)也能构成集合.

解:能构成集合的有:(2)、(3)、(4);不能构成集合的有:(1)、(5)、(6).

说明:充分理解集合的概念,在此题的判断中,注重的是集合元素的确定性.

例2 已知集合 $M = \{a, b, c\}$ 中的三个元素可构成某一个三角形的三边长,那么此三角形一定不是 ()

- A. 直角三角形 B. 锐角三角形 C. 钝角三角形 D. 等腰三角形

分析:集合中元素的互异性是本例解题的关键,由于 a, b, c 三个元素互不相同,故由它们组成的三角形一定不是等腰三角形.

解:应选择D.

说明:集合元素的三特性:确定性、互异性及无序性在解题中的作用不能忽视.

2. 元素与集合的关系

例3 用符号 $\in$ 或 $\notin$ 填空

(1) $3.14 \in \mathbb{Q}$, $0 \in \mathbb{N}$, $\sqrt{2} \in \mathbb{Z}$, $(-1)^0 \in \mathbb{N}$, $0 \in \emptyset$;

(2) $2\sqrt{3} \in \{x | x < \sqrt{11}\}$, $\sqrt{2} + \sqrt{5} \in \{x | x \leq 2 + \sqrt{3}\}$;

(3) $3 \in \{x | x = n^2 + 1, n \in \mathbb{N}\}$, $(-1, 1) \in \{y | y = x^2\}$;

(4) 设 $x = \frac{1}{3-5\sqrt{2}}$, $y = 3 + \sqrt{2}\pi$, 集合 $M = \{m | m = a + b\sqrt{2}, a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}\}$, 即 $4x$



$M, y \quad M.$

分析:看所要判断的元素是否能化成集合中元素的形式.

解:(1) $\in, \in, \notin, \in, \notin$;

$$(2) 2\sqrt{3} = \sqrt{12} > \sqrt{11};$$

$$\begin{aligned}\sqrt{2} + \sqrt{5} &= \sqrt{(\sqrt{2} + \sqrt{5})^2} = \sqrt{7 + 2\sqrt{10}} < \sqrt{7 + 2\sqrt{12}} \\ &= \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2} \\ &= 2 + \sqrt{3}, \text{故填 } \notin, \in;\end{aligned}$$

(3) 令 $n^2 + 1 = 3, n = \pm\sqrt{2} \notin \mathbf{N}$, 故填 $\notin, \notin$;

$$(4) x = \frac{1}{3-5\sqrt{2}} = -\frac{3}{41} - \frac{5\sqrt{2}}{41}, \text{ 而 } -\frac{3}{41} \in \mathbf{Q}, -\frac{5}{41} \in \mathbf{Q},$$

$\therefore x \in M.$

$\therefore \pi \notin \mathbf{Q}, \therefore y \notin M$, 故填 $\in, \notin$.

说明:此题是判断元素与集合的隶属关系,要明确集合中元素的特点,准确理解集合是关键.

3. 集合的表示方法

例4 用列举法表示下列集合

$$(1) A = \{x | x = |x|, x \in \mathbf{Z} \text{ 且 } x < 5\};$$

$$(2) B = \{(x, y) | x + y = 6, x \in \mathbf{N}_+, y \in \mathbf{N}_+\};$$

$$(3) C = \{x | x = \frac{|a|}{a} + \frac{|b|}{b}, a, b \text{ 为非零实数}\};$$

$$(4) D = \{x | \frac{6}{3-x} \in \mathbf{Z}, x \in \mathbf{N}_+\}.$$

分析:(1)根据 x 的范围解方程;(2)求不定方程 $x + y = 6$ 的正整数解;(3)根据绝对值的意义化简;(4)所求的 x 要满足两个条件:① x 是正整数;② x 使 $\frac{6}{3-x}$ 是整数.

解:(1) $\because x = |x|, \therefore x \geq 0$, 又 $\because x \in \mathbf{Z} \text{ 且 } x < 5$,

$\therefore \{x | x = |x|, x \in \mathbf{Z} \text{ 且 } x < 5\}$ 用列举法表示: $\{0, 1, 2, 3, 4\}$;

$$(2) B = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\};$$

(3) 当 $a > 0, b > 0$ 时, $x = 2$; 当 $a < 0, b < 0$ 时, $x = -2$; 当 a, b 异号时, $x = 0$,

$$\therefore C = \{-2, 0, 2\};$$

(4) 由题意知 $3 - x = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$, 所以 $x = 0, -3, 1, 2, 4, 5, 6, 9$, 又 $x \in \mathbf{N}_+$, $\therefore D = \{1, 2, 4, 5, 6, 9\}$.

说明:使用列举法时,应注意以下四点:①元素间用分隔号“,”;②元素不重复;③不考虑元素顺序;④对于含较多元素的集合,如果构成该集合的元素有明显规律,可用列举法,但是必须把元素间的规律显示清楚后方能用删节号.

例5 用描述法表示下列集合

(1) 所有被3整除的数;

(2) 函数 $y = \frac{\sqrt{2-x}}{x}$ 的定义域;



(3)图 1.1-1 中阴影部分的点(含边界)的坐标的集合.

分析:(1)中被 3 整除的数可表示 $3n, n \in \mathbb{Z}$; (2)中的元素是 x ; (3)中的元素是坐标 (x, y) .

解:(1) $\{x|x=3n, n \in \mathbb{Z}\}$;

(2) $\{x|y=\frac{\sqrt{2-x}}{x}\}$;

(3) $\{(x, y)|-1 \leq x \leq \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \leq y \leq 1 \text{ 且 } xy \geq 0\}$.

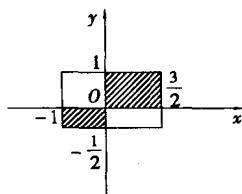


图 1.1-1

说明:使用描述法时,应注意六点:①写清楚集合中元素的代号;②说明该集合中元素的性质;③不能出现未被说明的字母;④多层描述时,应当准确使用“且”,“或”;⑤所有描述的内容都要写在集合符号内;⑥用于描述的语句力求简明、确切.

4. 集合的应用

例 6 已知 $f(x) = x^2 - ax + b (a, b \in \mathbb{R})$, $A = \{x|f(x) - x = 0, x \in \mathbb{R}\}$, $B = \{x|f(x) - ax = 0, x \in \mathbb{R}\}$, 若 $A = \{1, -3\}$, 试用列举法表示集合 B .

分析: $\because$ 集合 B 是方程 $f(x) - ax = 0$ 的解集, $\therefore$ 要求集合 B , 需设法求出 a, b 的值, 于是可通过集合 $A = \{1, -3\}$ 为突破口来寻找本例的解题途径.

解: $f(x) - x = 0$, 即 $x^2 - (a+1)x + b = 0$. $\because A = \{1, -3\}$.

$\therefore$ 由韦达定理得 $\begin{cases} 1 + (-3) = a + 1, \\ 1 \times (-3) = b. \end{cases} \therefore \begin{cases} a = -3, \\ b = -3. \end{cases}$

$\therefore f(x) = x^2 + 3x - 3$.

$f(x) - ax = 0$, 亦即 $x^2 + 6x - 3 = 0$,

$\therefore B = \{x|x^2 + 6x - 3 = 0\} = \{-3 - 2\sqrt{3}, -3 + 2\sqrt{3}\}$.

说明:集合 $A = \{x|f(x) - x = 0, x \in \mathbb{R}\}$ 即为方程 $f(x) - x = 0$ 的解集.



疑难问题举例

例 7 选择题

已知 $A = \{x|x=5n+1, n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{x|x=5n+2, n \in \mathbb{N}\}$

$C = \{x|x=5n+3, n \in \mathbb{N}\}$, $D = \{x|x=5n+4, n \in \mathbb{N}\}$

若 $\alpha \in A, \beta \in B, \theta \in C, r \in D$, 则

()

A. $\alpha^2 \in A, \beta^2 \in D, \theta^2 \in D, r^2 \in A$ B. $\alpha^2 \in A, \beta^2 \in B, \theta^2 \in C, r^2 \in D$

C. $\alpha^2 \in A, \beta^2 \in C, \theta^2 \in B, r^2 \in A$ D. $\alpha^2 \in B, \beta^2 \in D, \theta^2 \in D, r^2 \in B$

分析:已知的四个不同集合分别是被 5 整除后余数是 1, 2, 3, 4 的四类自然数, 可通过变换进行判断.

解:设 $\alpha = 5n+1 (n \in \mathbb{N})$, 则 $\alpha^2 = (5n+1)^2 = 5(5n^2+2n)+1$,

$\therefore 5n^2+2n \in \mathbb{N}$, $\therefore \alpha^2 = (5n+1)^2 \in A$,

同理可得: $\beta^2 = (5n+2)^2 = 5(5n^2+4n)+4 \in D$,

$r^2 = (5n+4)^2 = 5(5n^2+8n+3)+1 \in A$,

$\theta^2 = (5n+3)^2 = 5(5n^2+6n+1)+1 \in D$. $\therefore$ 选 A.

说明:本例还可用特殊值法进行判断(如 $n=0$ 时).



例8 数集 A 满足条件:若 $a \in A, a \neq 1$, 则 $\frac{1}{1-a} \in A$, 证明:(1)若 $2 \in A$, 则集合中还有另外两个元素;(2)若 $a \in \mathbf{R}$, 则集合 A 不可能是单元素集.

分析:反复利用题设:若 $a \in A, a \neq 1$, 则 $\frac{1}{1-a} \in A$, 注意角色转换, 单元素集指集合中只有一个元素.

证明:(1) $\because 2 \in A, \therefore \frac{1}{1-2} = -1 \in A$,

于是 $\frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2} \in A$, 而 $\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$,

$\therefore A$ 中还有 $-1, \frac{1}{2}$ 两个元素.

(2)假设 A 是单元素集, 则必有 $a = \frac{1}{1-a}$, 即 $a^2 - a + 1 = 0$.

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$, 方程没有实数解, 故假设不成立, A 不可能是单元素集.

说明:其中(2)的证明若用直接法不易证明, 它是一个否定性命题, 故用反证法较好. 若 $a \in \mathbf{R}$, 你能说出集合 A 中有几个元素吗? 请证明你的结论.



错解点击

例9 方程组 $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=-1 \end{cases}$ 的解集是 ()

A. $\{x=0, y=1\}$

B. $\{0, 1\}$

C. $\{(0, 1)\}$

D. $\{(x, y) | x=0 \text{ 或 } y=1\}$

错解:选择 A、B、D.

点击:A 中不符合集合表示法的基本模式, 既不是列举法也不是描述法; B 中为两个元素 0, 1 组成的数集, 不是二元一次方程组的解集; D 中虽然是点集, 但其中元素为 $(0, y)$ 或 $(x, 1)$, 其中 x, y 可以取一切实数, 它表示两条直线 $x=0$ 或 $y=1$ 上所有的点的集合. 以上错解均是由于审题不严, 概念理解错误而产生的.

正解:选 C.

说明:集合语言很抽象, 这道题说明审题极其重要, 只有正确地理解题意, 才能正确解题.

例10 已知集合 $A = \{x | x \in \mathbf{R} \text{ 且 } ax^2 - 3x + 2 = 0, a \in \mathbf{R}\}$, 若 A 中元素至多只有一个, 求 a 的取值范围.

错解: $ax^2 - 3x + 2 = 0$, 方程至多只有一个解, 则 $\Delta = 8 - 8a \leq 0 \Rightarrow a \geq \frac{9}{8}$.

点击: $ax^2 - 3x + 2 = 0$ 在 $a \in \mathbf{R}$ 的条件下, 不一定是二次方程. 当 $a=0$ 时, 它只是一个一次方程, 根本就没有 Δ , 只有当 $a \neq 0$ 时, 才有 Δ 可研究. 错误原因在于对数学概念的理解不完整, 仅仅弄清楚二次方程的外在形式, 因而漏解.

正解:(1) $a=0$ 时, 原方程为 $-3x+2=0, x=\frac{2}{3}$, 符合题意.



(2) $a \neq 0$ 时, 方程 $ax^2 - 3x + 2 = 0$ 为二次方程.

$\Delta = 9 - 8a \leq 0, a \geq \frac{9}{8}$. 此时, 方程 $ax^2 - 3x + 2 = 0$ 无实根或有两个相等的实数根.

结合(1)、(2)知 $a = 0$ 或 $a \geq \frac{9}{8}$.

说明: A 中元素至多只有一个, 即方程 $ax^2 - 3x + 2 = 0$ 有解或无解, 由于 $a = 0$ 或 $a \neq 0$, 两种情况下的方程形式完全不一样, 所以, 此题分两种情况讨论求解.



本节小结

1. 本节主要掌握集合的概念, 表示方法及“ $\in$ ”“ $\notin$ ”符号的使用.
2. 重点理解描述法中代表元素的含义.
3. 初步理解元素的三个性质的含义.
4. 注意数形结合思想的应用, 如例 5(3) 及集合语言的应用, 如例 6 等.



同步测试

一、选择题

1. 在(1)难解的题目, (2)方程 $x^2 - 3 = 0$ 在实数集内的解, (3)直角坐标平面内第四象限的一些点, (4)很多多项式中, 能够组成集合的是 ()
A. (2) B. (1)(3) C. (2)(4) D. (1)(2)(4)
2. 下列集合中, 表示同一集合的是 ()
A. $M = \{(3, 2)\}, N = \{(2, 3)\}$
B. $M = \{3, 2\}, N = \{2, 3\}$
C. $M = \{(x, y) | x + y = 1\}, N = \{y | x + y = 1\}$
D. $M = \{1, 2\}, N = \{(1, 2)\}$
3. 设集合 $A = \{x | x = (-1)^n, n \in \mathbf{N}^*\}, B = \{2, 4, 6, 8\}, C = \{(x, y) | 3x + 2y = 16, x \in \mathbf{N}^*, y \in \mathbf{N}^*\}, D = \{x \in \mathbf{Q} | 1 < x < 2\}, E = \{\text{直角三角形}\}$, 其中有限集的个数是 ()
A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个
4. 若点 P 的坐标 $(x, y) \in \{(x, y) | y = -1 + x - 2x^2, x \in \mathbf{R}, x \neq 0\}$, 则 P 点所在象限为 ()
A. I 或 III B. II 或 III C. III 或 IV D. IV 或 I
5. 已知 $M = \{m | m = 2k, k \in \mathbf{Z}\}, X = \{x | x = 2k + 1, k \in \mathbf{Z}\}, Y = \{y | y = 4k + 1, k \in \mathbf{Z}\}$, 则 ()
A. $x + y \in M$ B. $x + y \in X$ C. $x + y \in Y$ D. $x + y \notin M$
6. 有下列四个命题: ① $\{\emptyset\}$ 是空集; ② $\{0\}$ 是空集; ③ 若 $a \in \mathbf{N}$, 则 $-a \notin \mathbf{N}$; ④ 集合 $A = \{x | x \in \mathbf{R} \text{ 且 } x^2 + 2x + 1 = 0\}$ 是二元集. 其中正确的命题个数为 ()
A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

二、填空题

1. $A = \{x | x \in \mathbf{R} \text{ 且 } x \notin \mathbf{Q}\}$, 下列实数: $-\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \pi, -0.101010, \dots, 3^{-\frac{1}{2}}, \sqrt[3]{-2}$,