科学版

研究生教学丛书

飞行动力学

徐明友　丁松滨　著

科学出版社
www.sciencep.com

科学版研究生教学丛书

飞 行 动 力 学

徐明友　丁松滨　著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书系统地阐述飞行器(弹箭、飞机)飞行过程中的运动规律、总体性能和优化设计原理,其中包括运动模式、飞行稳定性、随机运动及仿真、状态优化等内容。教材以崭新的数学力学方法推导了一系列新的运动方程和大量的解析公式,并给出了典型的计算实例,体现了飞行动力学当前发展的概况。

本书可作为兵器和航空专业研究生和本科高年级学生的教科书,亦可供从事相关专业研究、设计、试验的科技人员参考和使用。

图书在版编目(CIP)数据

飞行动力学/徐明友,丁松滨著. —北京:科学出版社,2003

(科学版研究生教学丛书)

ISBN 7-03-011485-X

Ⅰ.飞… Ⅱ.①徐…②丁… Ⅲ.飞行力学-研究生-教学参考资料 Ⅳ.V212

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 036159 号

策划编辑:鄢德平 吕 虹 李鹏奇 / 文案编辑:邱 璐 贾瑞娜

责任校对:钟 洋 / 责任印制:安春生 / 封面设计:黄华斌

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2003年8月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2003年8月第一次印刷 印张:16 1/2

印数:1—2 000 字数:310 000

定价:28.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈路通〉)

前　　言

飞行动力学是研究飞行器(flight vehicle)在空中的运动规律及总体性能的科学,所有穿过流体介质或真空的运动体,统称为飞行器,其大致分类如图 0-1 所示。

- 飞行器
  - 航天器
    - 人造地球卫星
    - 空间探测器
    - 载人飞船
    - 航天飞机
  - 航空器
    - 轻于空气
      - 飞艇
      - 气球
    - 重于空气
      - 固定翼
        - 飞机
        - 滑翔机
      - 旋翼机
        - 直升机
        - 旋翼机
      - 扑翼机
  - 弹　箭
    - 导弹
      - 弹道导弹
      - 巡航导弹
    - 常规弹箭
      - 炮弹(枪弹)
      - 火箭弹
      - 炸弹
  - 水下兵器
    - 潜艇
    - 鱼雷

图 0-1　飞行器分类

本书主要研究弹箭和飞机的运动规律。前者一般命名为外弹道学,后者常称之为飞机飞行动力学;从力学意义看,都属于典型的飞行动力学范畴。各类飞行器的运动规律所遵循的力学原理都是相同的,但由于各飞行器的飞行任务和外形结构等方面的显著差别,必将带来自身的独特问题。为此必须沿着新的发展方向进行深入地探索。研究飞行动力学的目的在于为飞行器的研制和使用从基本原理和性能分析技巧方面提供理论基础。

飞行动力学是建立在刚体力学、弹性结构力学、空气动力学、流体力学、多体系统动力学、振动理论、运动稳定性等力学基础之上的;又依赖于现代控制论和计算技术的发展,并与测量技术密切相关。随着计算技术的快速发展,人们已不再着重于近似的解析计算方法,而是把建立精确描述运动状态的数学模型放到了非常重要的位置。计算技术发展的另一影响是矢量、矩阵等数学工具被用作数值计算的理想工具;这不

仅使运动模型的推导和表述非常简洁，而且简化了编程过程并易于检查。

本书体现了基本原理和科学方法的重要性。在内容安排上适应研究生教学的特点，在本科生同类课程基础上，力求拓展知识域，为本学科奠定坚实的专业基础。第1、2章介绍了飞行器运动的数学力学基础。第3章运动环境和受力分析，对大气状态做了静态和随机过程描述，并给出空气动力和力矩的简明表达式，以及其他干扰因素。第4章建立了轴对称飞行器的运动方程，它不仅适用于线性小扰动角运动情况，也便于对几何非线性和运动参量非线性的运动稳定性进行分析。第5章对弹箭的运动稳定性做了较系统性的论述。第6章对导弹运动做了精练的分析，其中给出运动模型，包括四元数形式的运动学方程。第7章对随机干扰下的运动过程给以数学描述，并给出了非线性随机系统实用的仿真方法。第8章涉及到最佳运动状态研究，采用数学规划和最优控制方法处理飞行器飞行中的优化问题。第9章涉及到飞行状态估计与参数辨识问题，这是近些年相当活跃的研究领域，具有广泛的应用前景。从第10章开始的后四章对飞机飞行动力学加以阐述。飞机的运动方程的建立方法与导弹飞行动力学类同，但受力状况有所差别，第11章做了具体介绍。第12章论述了飞行性能；第13章对机动飞行性能做了综合介绍。这四章着重于飞机飞行原理和运动特性的分析，而对其他具有共性的问题如稳定性分析、飞行过程的随机特性、优化设计方法以及飞行状态的最优估计与参数辨识，都可借鉴本书前面章节介绍的内容。

本书的主要内容取材于作者多年来的科研成果，并经多次教学实践不断完善。作为研究生教材，其宗旨是在理论体系上立足于更高的层次，为拓宽学生知识域并引导他们至学科前沿奠定基础。在撰写本教材过程中，作者顾及到授课对象（研究生）专业基础的差别和来自不同学科的状况，会给教学带来较大难度，于是在内容安排和布局方面，尽量淡化某些专业性很强的术语和概念，使凡具有大学一般数学和物理知识的读者都能学懂本书的知识；不但使在大学本科没有学习过飞行动力学的读者能快速掌握这方面的较深的理论，而且使已学习过飞行动力学知识的读者也将获得新的有用知识，拓展视野。教学实践表明，效果是显著的。

本书不但研究轴对称飞行器的飞行动力学问题，而且阐述了面对称飞行器（飞机）的飞行性能。这样，就构成了飞行动力学较系统而完整的学科体系。本书后4章由中国民用航空学院丁松滨博士撰写，其余各章由本人撰写。该书是南京理工大学研究生课程及教材建设委员会安排的课程建设立项课题，研究生系列教材之一。在撰著过程中，始终得到该委员会的热情指导，并对内容进行审阅，作者在此表示衷心感谢。限于作者水平，书中尚存问题在所难免，请读者不吝指教。

徐明友
于南京理工大学
2003年1月

目　　录

第 1 章　飞行器运动学基础

§1.1　矢量与并矢

1.1.1　基矢量与矢量

三个汇交于 O 点的正交单位矢量 $\vec{e}_1$、$\vec{e}_2$、$\vec{e}_3$ 称为基矢量，它们组成的右手正交参考系称为基，O 为基点。将基矢量排列成列阵作为基矢量表达式，称为基矢量列阵，以黑体字 $\vec{\boldsymbol{e}}$ 表示

$$\vec{\boldsymbol{e}} = [\vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \vec{e}_3]^{\mathrm{T}} \tag{1-1}$$

基矢量满足正交条件，即

$$\vec{\boldsymbol{e}} \cdot \vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I} \quad \text{（三阶单位矩阵）} \tag{1-2}$$

矢量 $\vec{a}$ 在基 $\vec{\boldsymbol{e}}$ 上的投影或坐标为 a_1、a_2、a_3，坐标列阵以黑体字表示

$$\boldsymbol{a} = [a_1 \quad a_2 \quad a_3]^{\mathrm{T}} \tag{1-3}$$

则

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 = \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{e}} = \vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a} \tag{1-4}$$

显然矢量 $\vec{a}$ 与其坐标列阵是有区别的，不可混为一谈！但是，对于所选定的基 $\vec{\boldsymbol{e}}$，任一矢量 $\vec{a}$ 都能用坐标列阵 $\boldsymbol{a}$ 或行阵 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}$ 完全确定。将矢量 $\vec{a}$ 的坐标排成以下三阶反对称方阵，称为 $\vec{a}$ 在 $\vec{\boldsymbol{e}}$ 上的坐标方阵或叉乘矩阵，使用带波浪号的矩阵符号，以 $\tilde{a}$ 记之

$$\tilde{a} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{1-5}$$

若矢量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$、$\vec{d}$ 的坐标列阵为 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{d}$，则矢量与坐标列阵之间存在下列等价关系

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \qquad \boldsymbol{c} = \tilde{a}\boldsymbol{b} = -\tilde{b}\boldsymbol{a} \tag{1-6}$$

$$\vec{d} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \qquad \boldsymbol{d} = \tilde{a}\tilde{b}\boldsymbol{c} \tag{1-7}$$

$$\vec{d} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \qquad \boldsymbol{d} = \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\tilde{b}\boldsymbol{c} \tag{1-8}$$

1.1.2　并矢

依序并列的两个矢量称为并矢，用白体字母上加两个箭头表示，比如

$$\vec{\vec{P}} = \overrightarrow{\vec{a}\vec{b}} \tag{1-9}$$

并矢遵循下列运算规则：

(1) 并矢与矢量的点积为矢量

$$\vec{\vec{P}}\cdot\vec{r}=\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{r}),\quad \vec{r}\cdot\vec{\vec{P}}=(\vec{r}\cdot\vec{a})\vec{b} \tag{1-10}$$

(2) 并矢与矢量的叉积为并矢

$$\vec{\vec{P}}\times\vec{r}=\vec{a}(\vec{b}\times\vec{r}),\quad \vec{r}\times\vec{\vec{P}}=(\vec{r}\times\vec{a})\vec{b} \tag{1-11}$$

(3) 并矢与并矢的点积仍为并矢。设 $\vec{\vec{Q}}=\vec{c}\vec{d}$,则

$$\vec{\vec{P}}\cdot\vec{\vec{Q}}=\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{d} \tag{1-12}$$

以上运算不符合交换律。

对于基 $\vec{\boldsymbol{e}}$,$\vec{\vec{P}}$可用 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 在$\vec{\boldsymbol{e}}$ 上的坐标阵表示为

$$\vec{\vec{P}}=\vec{a}\vec{b}=\vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{ab}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{e}}=\vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}P\vec{\boldsymbol{e}} \tag{1-13}$$

P 的 9 个元素组成的三阶方阵称为 $\vec{\vec{P}}$在 $\vec{\boldsymbol{e}}$ 上的坐标阵

$$P=\begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{bmatrix} \tag{1-14}$$

由式(1-13)、式(1-14)可知,并矢是由基矢量组成的 9 个并矢的线性式

$$\begin{aligned}\vec{\vec{P}}=&a_1b_1\vec{e}_1\vec{e}_1+a_1b_2\vec{e}_1\vec{e}_2+a_1b_3\vec{e}_1\vec{e}_3+a_2b_1\vec{e}_2\vec{e}_1+a_2b_2\vec{e}_2\vec{e}_2+\\&a_2b_3\vec{e}_2\vec{e}_3+a_3b_1\vec{e}_3\vec{e}_1+a_3b_2\vec{e}_3\vec{e}_2+a_3b_3\vec{e}_3\vec{e}_3\end{aligned} \tag{1-15}$$

坐标阵为单位阵的并矢称为单位并矢,记作 $\vec{\vec{I}}$

$$\vec{\vec{I}}=\vec{e}_1\vec{e}_1+\vec{e}_2\vec{e}_2+\vec{e}_3\vec{e}_3=\vec{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{e}} \tag{1-16}$$

并矢的运算可采用坐标阵进行。设 $\boldsymbol{f}$、$\boldsymbol{r}$、F、Q 为矢量$\vec{f}$、$\vec{r}$ 和并矢 $\vec{\vec{F}}$、$\vec{\vec{Q}}$的坐标阵,则有

$$\begin{aligned}&\vec{f}=\vec{\vec{P}}\cdot\vec{r}, && \boldsymbol{f}=P\boldsymbol{r}\\&\vec{f}=\vec{r}\cdot\vec{\vec{P}}, && \boldsymbol{f}=P^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}\\&\vec{\vec{F}}=\vec{\vec{P}}\times\vec{r}, && F=P\tilde{r}\\&\vec{\vec{F}}=\vec{r}\times\vec{\vec{P}}, && F=\tilde{r}P\\&\vec{\vec{F}}=\vec{\vec{P}}\cdot\vec{\vec{Q}}, && F=PQ\end{aligned} \tag{1-17}$$

在飞行动力学中,飞行器以 $\vec{\boldsymbol{e}}$ 为基矢量,它相对于某一点的惯量张量就是一个并矢,在§2.2 中将具体阐述。应该指出,矢量和并矢都是张量的特例,它们分别

是一阶和二阶张量，而单个标量则是零阶张量。虽然张量在不同的基中有不同的分量，但作为一个实体，它的存在与基的选择无关。

§1.2 坐标变换

在飞行动力学中，需要建立多种坐标系，以反映出飞行器的空间状态及运动参量的大小和方向。经常遇到的问题是要把某一坐标系内的数学力学量转换到另一坐标系中去，这就是坐标变换问题。

1.2.1 矢量的坐标变换

以 p、q 表示不同基的标号，$\vec{e}_p$ 与 $\vec{e}_q^{\mathrm{T}}$ 的点积是三阶方阵，记为

$$C_{pq}=\vec{e}_p\cdot\vec{e}_q^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\vec{e}_{p1}\cdot\vec{e}_{q1} & \vec{e}_{p1}\cdot\vec{e}_{q2} & \vec{e}_{p1}\cdot\vec{e}_{q3}\\ \vec{e}_{p2}\cdot\vec{e}_{q1} & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \vec{e}_{p3}\cdot\vec{e}_{q3}\end{bmatrix} \tag{1-18}$$

式中 $\vec{e}_{pi}\cdot\vec{e}_{qj}=\cos\alpha_{ij}$，$\alpha_{ij}$是矢量$\vec{e}_{pi}$与$\vec{e}_{qj}$之间的夹角；可见 C_{pq}是$\vec{e}_q$ 相对于$\vec{e}_p$ 的方向余弦矩阵，即矢量坐标从基 $\vec{e}_q$ 转换到基$\vec{e}_p$ 中的坐标变换矩阵。

任一矢量 $\vec{r}$ 在不同基$\vec{e}_p$ 和$\vec{e}_q$ 中的坐标列阵表示为

$$\boldsymbol{r}_p=[r_{p1}\quad r_{p2}\quad r_{p3}]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{r}_q=[r_{q1}\quad r_{q2}\quad r_{q3}]^{\mathrm{T}}$$

矢量 $\vec{r}$ 作为一个实体，它的存在与基的选择无关，于是有关系式

$$\vec{e}_p^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_p=\vec{e}_q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_q \tag{1-19}$$

将上式等号两边左侧点乘 $\vec{e}_p$

$$\vec{e}_p\cdot\vec{e}_p^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_p=\vec{e}_p\cdot\vec{e}_q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_q$$

将式(1-2)、(1-18)代入上式便得

$$\boldsymbol{r}_p=C_{pq}\boldsymbol{r}_q \tag{1-20}$$

由此推出任意三个基 $\vec{e}_p$、$\vec{e}_q$、$\vec{e}_r$ 之间的坐标变换矩阵关系

$$C_{pq}=C_{pr}C_{rq} \tag{1-21}$$

还可任意递推，即

$$C_{pq}=\prod_{k=p}^{q-1}C_{k,k+1} \tag{1-22}$$

方向余弦矩阵(1-18)是正交阵，其逆矩阵等于其转置矩阵，即

$$C_{pq}^{-1}=C_{pq}^{\mathrm{T}}=C_{qp} \tag{1-23}$$

1.2.2 基本的坐标变换矩阵

最简单的变换矩阵，是某一基被视为由另一基绕其某一个基矢量转动一个有

限角度而得，它们之间的坐标变换矩阵是最简单的方向余弦矩阵，该矩阵由所绕转轴及转动角所决定。

(1) 基 $\vec{e}_q$ 绕 $\vec{e}_{q1}$ 逆时针方向转动角 α，至基 $\vec{e}_p$，则方向余弦矩阵为(图 1－1)

$$C_1(\alpha)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha\\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix} \tag{1-24}$$

(2) 基 $\vec{e}_q$ 绕 $\vec{e}_{q2}$ 逆时针方向转动角 β，至基 $\vec{e}_p$，则方向余弦矩阵为(图 1－2)

$$C_2(\beta)=\begin{bmatrix}\cos\beta & 0 & -\sin\beta\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\beta & 0 & \cos\beta\end{bmatrix} \tag{1-25}$$

(3) 基 $\vec{e}_q$ 绕 $\vec{e}_{q3}$ 逆时针方向转动角 σ，至基 $\vec{e}_p$，则方向余弦矩阵为(图 1－3)

$$C_3(\sigma)=\begin{bmatrix}\cos\sigma & \sin\sigma & 0\\ -\sin\sigma & \cos\sigma & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{1-26}$$

$C_1(\alpha)$、$C_2(\beta)$、$C_3(\sigma)$是三个基本的坐标变换矩阵，其脚注表示所围绕的转轴标号，括号内的量是逆时针方向转动的角度。

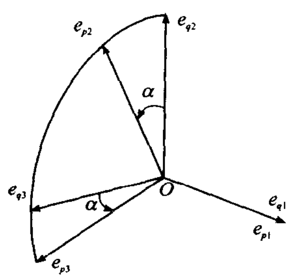

图 1－1　$C_1(\alpha)$的几何意义

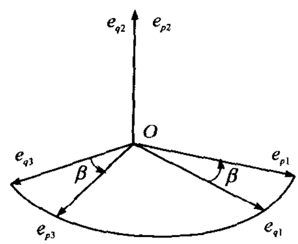

图 1－2　$C_2(\beta)$的几何意义

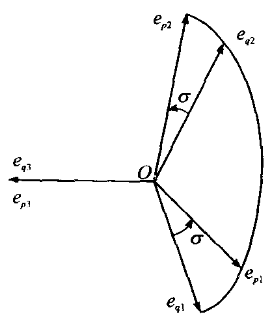

图 1－3　$C_3(\sigma)$的几何意义

1.2.3　并矢的坐标变换

并矢式(1－13)作为一个实体，它对不同的基 $\vec{e}_p$ 和 $\vec{e}_q$，表达式是相等的，即

$$\vec{e}_p^{\mathrm{T}}P_p\vec{e}_p=\vec{e}_q^{\mathrm{T}}P_q\vec{e}_q \tag{1-27}$$

对等式两边分别左点乘 $\vec{e}_p$，右点乘 $\vec{e}_q^{\mathrm{T}}$ 得

$$\vec{e}_p\cdot\vec{e}_p^{\mathrm{T}}P_p\vec{e}_p\cdot\vec{e}_q^{\mathrm{T}}=\vec{e}_p\cdot\vec{e}_q^{\mathrm{T}}P_q\vec{e}_q\cdot\vec{e}_q^{\mathrm{T}}$$

将式(1－2)、式(1－18)代入得

$$P_pC_{pq}=C_{pq}P_q$$

再利用式(1－23)，则

$$P_p = C_{pq}P_qC_{qp} \tag{1-28a}$$

或

$$P_p = C_{pq}P_qC_{pq}^{\mathrm{T}} \tag{1-28b}$$

在弹箭运动研究中，惯量张量就是一个并矢，其坐标方阵即是惯量矩阵 J，它是实对称矩阵，经变换可得对角阵。与对角阵相应的坐标系称为惯量主轴坐标系，特别是，取坐标原点为质心，则称为中心惯量主轴坐标系。

§1.3　四　元　数

1.3.1　基本概念

四元数是哈密顿(Hamilton W. R.)1843 年提出的数学概念，近 30 年来逐渐应用于刚体运动学。它是由一个实数单位 1 和三个虚数单位 $\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$ 组成的包含四个实元的超复数，记作

$$\vec{\Lambda} = \lambda_0 + \lambda_1\vec{i} + \lambda_2\vec{j} + \lambda_3\vec{k} \tag{1-29}$$

若将 $\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$ 视为基矢量，式(1－29)的后三项便构成矢量 $\vec{\lambda}$，于是

$$\vec{\Lambda} = \lambda_0 + \vec{\lambda} \tag{1-30}$$

设 $\vec{\Lambda}$ 和 $\vec{M}$ 均为四元数，且是同一基底，其乘法符号以空心点“∘”表示，由

$$\vec{\Lambda} = \lambda_0 + \vec{\lambda}, \qquad \vec{M} = \mu_0 + \vec{\mu}$$

得乘积规则为

$$\vec{N} = \vec{\Lambda}\circ\vec{M} = (\lambda_0\mu_0 - \vec{\lambda}\cdot\vec{\mu}) + (\lambda_0\vec{\mu} + \mu_0\vec{\lambda} + \vec{\lambda}\times\vec{\mu}) \tag{1-31}$$

该运算过程可采取矩阵形式进行

$$\boldsymbol{N} = \tilde{\Lambda}\boldsymbol{M} \tag{1-32}$$

$$\boldsymbol{N} = \underset{\sim}{M}\boldsymbol{\Lambda} \tag{1-33}$$

式中

$$\boldsymbol{N} = [\nu_0\ \nu_1\ \nu_2\ \nu_3]^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\Lambda} = [\lambda_0\ \lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3]^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{M} = [\mu_0\ \mu_1\ \mu_2\ \mu_3]^{\mathrm{T}} \tag{1-34}$$

$$\tilde{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_0 & -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_0 & -\lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_0 & -\lambda_1 \\ \lambda_3 & -\lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_0 \end{bmatrix},\qquad \underset{\sim}{M} = \begin{bmatrix} \mu_0 & -\mu_1 & -\mu_2 & -\mu_3 \\ \mu_1 & \mu_0 & \mu_3 & -\mu_2 \\ \mu_2 & -\mu_3 & \mu_0 & \mu_1 \\ \mu_3 & \mu_2 & -\mu_1 & \mu_0 \end{bmatrix} \tag{1-35}$$

将式(1－30)中的 $\vec{\lambda}$ 改变符号后的四元数称为 $\vec{\Lambda}$ 的共轭四元数，记作 $\vec{\Lambda}^*$

$$\vec{\Lambda}^* = \lambda_0 - \vec{\lambda} \tag{1-36}$$

四元数的范数或模为

$$|\vec{\Lambda}|=\vec{\Lambda}\circ\vec{\Lambda}^{*}=\vec{\Lambda}^{*}\circ\vec{\Lambda}=\lambda_0^2+|\vec{\lambda}|^2 \tag{1-37}$$

模等于 1 的四元数称为规范四元数。

1.3.2 欧拉参数和有限转动四元数

在刚体有限转动中，引入参数

$$\lambda_0=\cos\frac{\varepsilon}{2},\quad \boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{p}\sin\frac{\varepsilon}{2} \tag{1-38}$$

式中

$$\boldsymbol{\lambda}=[\lambda_1\quad\lambda_2\quad\lambda_3]^{\mathrm{T}},\qquad \boldsymbol{p}=[p_1\quad p_2\quad p_3]^{\mathrm{T}} \tag{1-39}$$

称 λ_0、λ_1、λ_2、λ_3 为欧拉参数；$\boldsymbol{p}$ 是单位矢量 $\vec{p}$ 的坐标列阵。将欧拉参数代入式(1-37)知 $|\vec{\Lambda}|=1$，可见由欧拉参数构成的四元数是规范四元数。

借助于欧拉参数构成的四元数 $\vec{\Lambda}$，被用来描述刚体的有限转动。在本章附录中，推导了刚体上某一矢量转动前后间的关系。矢量 $\vec{d}_0$ 绕单位矢量 $\vec{p}$ 方向的轴线转动一个角度 ε，到达新位置时为 $\vec{d}$，$\vec{p}$ 的方向余弦为 p_1、p_2、p_3；$\vec{d}$ 与 $\vec{d}_0$ 的关系为式(1-91)

$$\vec{d}=\vec{\Lambda}\circ\vec{d}_0\circ\vec{\Lambda}^{*} \tag{1-40}$$

由此推广到连续 n 次有限转动的一般情形，合成转动四元数为

$$\vec{\Lambda}=\vec{\Lambda}_n\circ\vec{\Lambda}_{n-1}\circ\cdots\circ\vec{\Lambda}_1 \tag{1-41}$$

需要注意的是，若对式(1-41)采用矩阵形式的式(1-32)或式(1-33)进行运算，就必须对诸四元数 $\vec{\Lambda}_1$、$\vec{\Lambda}_2$、…、$\vec{\Lambda}_n$ 采用同一的基。设 $\vec{\Lambda}_{jk}$ 是基 $\vec{e}_k$ 至 $\vec{e}_j$ 的有限转动四元数，基 $\vec{e}_p$、$\vec{e}_q$、$\vec{e}_r$ 之间的转动四元数为

$$\vec{\Lambda}_{qp}=\lambda_{0qp}+\boldsymbol{\lambda}_{qp}^{\mathrm{T}}\vec{e}_p \tag{1-42}$$

$$\vec{\Lambda}_{rq}=\lambda_{0rq}+\boldsymbol{\lambda}_{rq}^{\mathrm{T}}\vec{e}_q \tag{1-43}$$

$$\vec{\Lambda}_{rp}=\lambda_{0rp}+\boldsymbol{\lambda}_{rp}^{\mathrm{T}}\vec{e}_p \tag{1-44}$$

又由式(1-40)知

$$\vec{e}_q=\vec{\Lambda}_{qp}\circ\vec{e}_p\circ\vec{\Lambda}_{qp}^{*} \tag{1-45}$$

则据式(1-41)～式(1-45)得

$$\vec{\Lambda}_{rp}=\vec{\Lambda}_{rq}\circ\vec{\Lambda}_{qp}=(\lambda_{0rq}+\boldsymbol{\lambda}_{rq}^{\mathrm{T}}\vec{\Lambda}_{qp}\circ\vec{e}_p\circ\vec{\Lambda}_{qp}^{*})\circ\vec{\Lambda}_{qp}=\vec{\Lambda}_{qp}\circ(\lambda_{0rq}+\boldsymbol{\lambda}_{rq}^{\mathrm{T}}\vec{e}_p)\circ\vec{\Lambda}_{qp}^{*}\circ\vec{\Lambda}_{qp}$$

即

$$\vec{\Lambda}_{rp}=\vec{\Lambda}_{qp}\circ\vec{\Lambda}_{rq/p} \tag{1-46}$$

式中

$$\vec{\Lambda}_{rq/p}=\lambda_{0rq}+\boldsymbol{\lambda}_{rq}^{\mathrm{T}}\vec{e}_p \tag{1-47}$$

这样，式(1-46)中的 3 个四元数都采用了同一基 $\vec{e}_p$，便可以由式(1-32)、(1-33)做矩阵运算

$$\boldsymbol{\Lambda}_{rp}=\tilde{\Lambda}_{qp}\boldsymbol{\Lambda}_{rq}=\underset{\sim}{\Lambda}_{rq}\boldsymbol{\Lambda}_{qp} \tag{1-48}$$

推广到四个基,有

$$\boldsymbol{\Lambda}_{sp}=\tilde{\Lambda}_{qp}\tilde{\Lambda}_{rq}\boldsymbol{\Lambda}_{sr}=\underset{\sim}{\Lambda}_{sr}\underset{\sim}{\Lambda}_{rq}\boldsymbol{\Lambda}_{qp} \tag{1-49}$$

§1.4　Possion 公式及其推广

设某刚体内有一单位矢量 $\vec{e}_i$,刚体的转动角速度为 $\vec{\omega}$,则 $\vec{e}_i$ 对时间的导数为

$$\frac{\mathrm{d}\vec{e}_i}{\mathrm{d}t}=\vec{\omega}\times\vec{e}_i \tag{1-50}$$

这就是 Possion 公式。

设有一动参考系,其基为 $\vec{\boldsymbol{e}}$;今有一可变矢量 $\vec{\rho}$,

$$\vec{\rho}=\rho_1\vec{e}_1+\rho_2\vec{e}_2+\rho_3\vec{e}_3$$

则

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\rho}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\rho_1}{\mathrm{d}t}\vec{e}_1+\frac{\mathrm{d}\rho_2}{\mathrm{d}t}\vec{e}_2+\frac{\mathrm{d}\rho_3}{\mathrm{d}t}\vec{e}_3+\rho_1\frac{\mathrm{d}\vec{e}_1}{\mathrm{d}t}+\rho_2\frac{\mathrm{d}\vec{e}_2}{\mathrm{d}t}+\rho_3\frac{\mathrm{d}\vec{e}_3}{\mathrm{d}t}$$

记

$$\frac{\mathrm{d}_r\vec{\rho}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\rho_1}{\mathrm{d}t}\vec{e}_1+\frac{\mathrm{d}\rho_2}{\mathrm{d}t}\vec{e}_2+\frac{\mathrm{d}\rho_3}{\mathrm{d}t}\vec{e}_3 \tag{1-51}$$

此为由于矢量 $\vec{\rho}$ 相对于动参考系的变化所引起的速率,是相对导数。而由式(1-50)知

$$\rho_1\frac{\mathrm{d}\vec{e}_1}{\mathrm{d}t}+\rho_2\frac{\mathrm{d}\vec{e}_2}{\mathrm{d}t}+\rho_3\frac{\mathrm{d}\vec{e}_3}{\mathrm{d}t}=\rho_1\vec{\omega}\times\vec{e}_1+\rho_2\vec{\omega}\times\vec{e}_2+\rho_3\vec{\omega}\times\vec{e}_3=\vec{\omega}\times\vec{\rho}$$

故

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\rho}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}_r\vec{\rho}}{\mathrm{d}t}+\vec{\omega}\times\vec{\rho} \tag{1-52}$$

上式表明,动矢量的时间变化率等于其对动参考系的相对速率,加上由于动参考系的转动所引起的牵连速率。这一推广的 Possion 公式在力学中经常用到。

§1.5　速度与加速度合成公式

1.5.1　速度合成

如图 1-4 所示,S 为固定参考系,原点为 O;S'为动参考系,原点为 D。A 为动点,位矢为 $\vec{\rho}$;D 点的位矢为 $\vec{\rho}_D$;A 相对于 D 的位矢为 $\vec{r}$。易见

$$\vec{\rho}=\vec{\rho}_D+\vec{r}$$

则 A 点的绝对速度为

$$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{\rho}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\vec{\rho}_D}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$

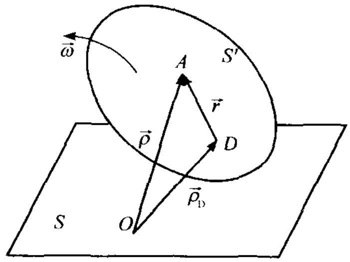

图 1-4　参考系

由式(1-52)得

$$\vec{v}=\vec{v}_D+\frac{\mathrm{d}_r\vec{r}}{\mathrm{d}t}+\vec{\omega}\times\vec{r} \tag{1-53}$$

记

$$\vec{v}_e=\vec{v}_D+\vec{\omega}\times\vec{r} \tag{1-54}$$

$\vec{v}_e$ 为 A 点的牵连速度，它等于动参考系原点 D 的速度 $\vec{v}_D$ 与因动参考系的转动所引起的速度之和。$\vec{v}_e$ 是动参考系上瞬时与动点 A 相重合的那一点的速度。又记

$$\vec{v}_r=\frac{\mathrm{d}_r\vec{r}}{\mathrm{d}t} \tag{1-55}$$

$\vec{v}_r$ 被称之为相对速度，即动点 A 相对于动参考系的运动速度，见式(1-51)。于是 A 点的绝对速度式(1-53)写成下式

$$\vec{v}=\vec{v}_r+\vec{v}_e \tag{1-56}$$

1.5.2　加速度合成

A 点的加速度 $\vec{a}$ 为

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}_r}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\vec{v}_e}{\mathrm{d}t} \tag{1-57}$$

由推广的 Possion 公式(1-52)知

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}_r}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}_r\vec{v}_r}{\mathrm{d}t}+\vec{\omega}\times\vec{v}_r=\vec{a}_r+\vec{\omega}\times\vec{v}_r \tag{1-58}$$

上式中的 $\vec{a}_r$ 是相对加速度，$\vec{\omega}\times\vec{v}_r$ 是由于牵连运动的存在所引起的 $\vec{v}_r$ 之速率，后者是科里奥利(Coriolis)加速度的一部分。式(1-57)中的 $\vec{v}_e$ 由式(1-54)所表达

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}_e}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{v}_D\times\vec{\omega}\times\vec{r})=\frac{\mathrm{d}\vec{v}_D}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{\omega}\times\vec{r})=\vec{a}_D+\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$

再利用式(1-52)

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d_r}\vec{r}}{\mathrm{d}t}+\vec{\omega}\times\vec{r}$$

则

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}_\mathrm{e}}{\mathrm{d}t}=\vec{a}_D+\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})+\vec{\omega}\times\vec{v}_\mathrm{r}=\vec{a}_\mathrm{e}+\vec{\omega}\times\vec{v}_\mathrm{r} \tag{1-59}$$

式中 $\vec{a}_\mathrm{e}$ 是牵连加速度

$$\vec{a}_\mathrm{e}=\vec{a}_D+\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) \tag{1-60}$$

它是动参考系上瞬时与动点 A 相重合的那一点的加速度。由于相对运动($\vec{v}_\mathrm{r}$)的存在,牵连速度的大小和方向受影响($\vec{\omega}\times\vec{v}_\mathrm{r}$),这就构成了科里奥利加速度的又一根源。

据式(1-58)和式(1-59)看出,相对速度 $\vec{v}_\mathrm{r}$ 对时间的导数并不等于相对加速度 $\vec{a}_\mathrm{r}$,牵连速度 $\vec{v}_\mathrm{e}$ 对时间的导数也不等于牵连加速度 $\vec{a}_\mathrm{e}$,这是一个基本的力学概念问题。最后将式(1-58)、式(1-59)代入式(1-57),得

$$\vec{a}=\vec{a}_\mathrm{r}+\vec{a}_\mathrm{e}+\vec{a}_\mathrm{c} \tag{1-61}$$

式中

$$\vec{a}_\mathrm{c}=2\vec{\omega}\times\vec{v}_\mathrm{r} \tag{1-62}$$

$\vec{a}_\mathrm{c}$ 称为科里奥利加速度,它是由于动参考系的转动($\vec{\omega}$)和点的相对运动($\vec{v}_\mathrm{r}$)相互影响产生的。

§1.6　用方向余弦表示的角速度

设在转动基 $\vec{\boldsymbol{e}}_m$ 中有一常矢量 $\vec{r}_m$,它在平动基 $\vec{\boldsymbol{e}}_d$ 中为变矢量 $\vec{r}_d$,它们的坐标阵满足下式

$$\boldsymbol{r}_d=C_{dm}\boldsymbol{r}_m$$

对时间求导数

$$\dot{\boldsymbol{r}}_d=\dot{C}_{dm}\boldsymbol{r}_m \tag{1-63}$$

若基 $\vec{\boldsymbol{e}}_m$ 的角速度在 $\vec{\boldsymbol{e}}_m$ 中记为 $\vec{\omega}_m$,在 $\vec{\boldsymbol{e}}_d$ 中记为 $\vec{\omega}_d$,则 $\vec{r}_m$ 的矢端速度在 $\vec{\boldsymbol{e}}_m$ 中为

$$\vec{v}_m=\vec{\omega}_m\times\vec{r}_m$$

它在平动基 $\vec{\boldsymbol{e}}_d$ 中的坐标列阵为

$$\dot{\boldsymbol{r}}_d=C_{dm}\boldsymbol{v}_m=C_{dm}\tilde{\omega}_m\boldsymbol{r}_m \tag{1-64}$$

比较式(1-63)、式(1-64)便得

$$\dot{C}_{dm}=C_{dm}\tilde{\omega}_m \tag{1-65}$$

或