

拱式体系的稳定计算

吴 恒 立

人 民 交 通 出 版 社

拱式体系的稳定计算

吴 恒 立

人 民 交 通 出 版 社

拱式体系的稳定计算

吴 恒 立

人民交通出版社出版

(北京市安定门外和平里)

北京市书刊出版业营业许可证出字第 006 号

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

人民交通出版社印刷厂印

开本: 787×1092 1/32 印张: 2.875 字数: 63 千

1979 年 4 月 第 1 版

1979 年 4 月 第 1 版 第 1 次印刷

印数: 0001—14,500 册 定价: 0.31 元

目 录

前言	1
第一章 实体压杆和组合压杆的稳定计算	2
第一节 稳定问题的概念	2
第二节 实体压杆的稳定计算	5
(一)弹性阶段的失稳	5
(二)弹塑性阶段的失稳	8
(三)实体压杆稳定的实用算法——折减系数法	9
(四)压杆材料和截面形式的选择	14
第三节 组合压杆的稳定计算	15
(一)剪切变形对临界力的影响	16
(二)剪切柔度 k/GA 的计算	18
(三)组合压杆中的横剪力	23
(四)例题	25
第二章 拱桥稳定的实用算法及讨论	29
第一节 拱桥稳定的实用算法	29
(一)拱轴平面内的稳定性验算	29
(二)侧向稳定性验算	31
(三)例题	32
第二节 讨论	35
(一)预备知识	35
(二)用平式横撑联结的双肋拱的侧倾	44
(三)立式横撑对侧倾临界荷载的影响	50
(四)同时考虑平式横撑和立式横撑作用的 侧倾临界荷载及有关比较和分析	55

第三章 双层圆柱薄壁沉井的内力和稳定计算	60
第一节 计算简图	60
第二节 内力计算	61
(一)实用计算方法.....	61
(二)比较精确的计算方法.....	70
第三节 稳定计算	75
(一)在静水压力 (径向均布荷载 q) 作用 下具有弹性固定拱趾的圆拱稳定性.....	75
(二)带隔板的双层圆环在内外静水压力作 用下稳定问题的第一种解法.....	76
(三)带隔板的双层圆环在内外静水压力作 用下稳定问题的第二种解法.....	81
第四节 注记	83
(一)圆环基本方程组的推导.....	83
(二)一点说明.....	85
主要参考资料	86

前 言

这是一本只有三章内容五万字左右的专题性小册子。第一章建立稳定问题的概念，用直接积分法讨论中心受压的实体压杆和组合压杆的稳定计算，介绍它们的实用算法并为第二章打基础。第二章介绍拱桥在拱轴平面内失稳和侧向失稳的实用验算方法，重点是用能量法对后者作理论上的分析和讨论。双层圆柱薄壁沉井是1972年开始使用的新工艺，第三章是将这种沉井简化为带隔板的双层圆环，详细地分析了它的内力和稳定计算问题。这本小册子就涉及的问题尽力反映了1972年以来国内的新成果，其中包括作者曾作过的一些研究工作。

在写这本小册子时，作者力图在理论上讨论得比较详细，同时重视实用算法，使两者联系起来，并且对讨论的每个问题都附有比较详细的算例。这本小册子虽是结合公路桥梁专业的特点写的，但对其他专业的类似问题也希望能有所帮助。

因囿于自己的水平，书中缺点必然很多，甚至错误亦所难免，望同志们批评指正。

第一章 实体压杆和组合压杆 的稳定计算

第一节 稳定问题的概念

结构在荷载作用下，能否正常工作，有的可以只根据强度和刚度条件去判断。但在有些情况下，只以它们作为判断的依据是不够的。例如一根细长直杆，受轴向压力作用，在压力稍大时，就会突然发生横向弯曲，出现这种情况后，即使压力只有极微小的增加，直杆的弯曲变形也会有相当大的发展，这时，直杆丧失了承压能力，但它并不是由于抗压强度不足或轴向压缩变形过大（刚度不足）所致，而是由于它不能保持原来的直线形式的平衡状态的缘故。

结构的稳定问题，就是指结构在荷载作用下，其原有的平衡状态是否能够保持的问题。

平衡状态有三种：稳定的、随遇的和不安定的。这可以用一个小球在凹面底、在水平面和凸面顶的情况来表示（图 1-1）。

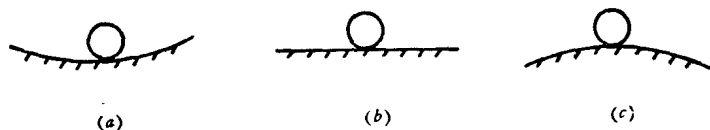


图 1-1

a) 稳定平衡
稍受干扰后小球
可回到原处；

b) 随遇平衡
小球可以在邻近的任
意位置平衡；

c) 不稳定平衡
稍受干扰后小球不能
回到原位

上述概念，对于某些工程结构也是适用的。当荷载不断增长时某些工程结构的平衡状态会由稳定的过渡到随遇的，然后迅速进入不稳定状态，稍有扰动，则变形急剧增大，最后使结构遭到破坏。这是由于在一定条件下，荷载的量变，引起了结构平衡状态的质变的缘故。我们仍考察受轴向压力的细长直杆，当压力 P 较小时 ($P < P_{cr}$ ，图1-2, a)，虽在横向干扰下杆会弯曲，干扰因素一旦除去，又会很快地回到原来的直线平衡状态，即此时压杆的直线平衡状态是稳定的。当压力 P 大于某一值 P_{cr} 时 (P_{cr} 远小于从强度或刚度观点，压杆所能承受的

压力)，压杆的直线平衡状态是不稳定的，稍受干扰就处于弯曲的平衡状态(图1-2, b)，而此时将主要由于很大的弯曲变形使压杆不能正常工作，甚至毁坏。

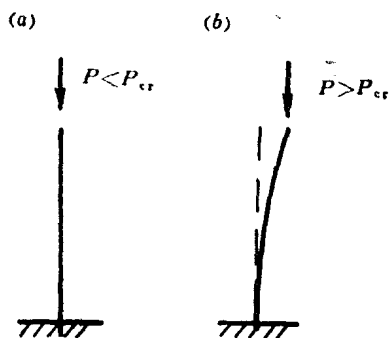


图 1-2

“任何质量都表现为一定的数量，没有数量也就没有质量”。因

此研究稳定问题，首先应该关心的，就是那个引起平衡状态质变的荷载数量。在 $P < P_{cr}$ 和 $P > P_{cr}$ 之间有一过渡阶段 $P = P_{cr}$ ，此时，对于压杆来说，直的和微弯的平衡状态都是可能的，也就是压杆处于随遇平衡状态。可见，随遇平衡状态是初始平衡状态由稳定变为不稳定的分界状态。而此时的荷载则称为临界荷载。

我们将结构的初始平衡状态由稳定变为不稳定的现象，称为失稳或屈曲。结构稳定理论的主要内容，就是研究结构

的失稳图式，以及与之相应的临界荷载。

桥梁及其他工程结构的失稳现象，可以分为下列几类：

(1) 个别构件的失稳。例如压杆失稳 (图 1-2)；受静水压力的圆环失稳，突然变成椭圆 (图 1-3, a)；高薄梁的侧倾 (图 1-3, b) 等。

(2) 部分结构或整个结构的失稳。例如桥门架或整个拱桥的失稳 (图 1-3, c、d 和 e)。

(3) 构件的局部失稳。例如组合压杆的板和板梁腹板或翼缘板的翘曲 (图 1-3, f、g)，而局部失稳往往导致整个体系的失稳。

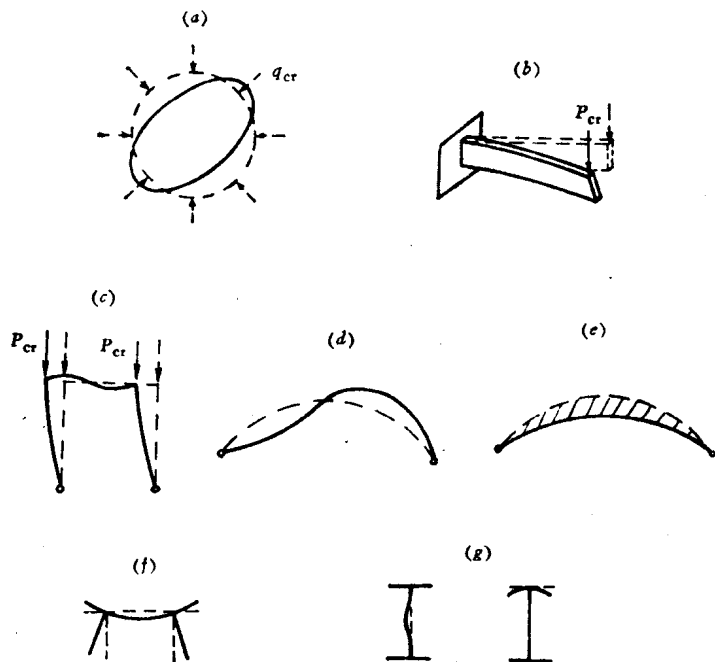


图 1-3

a) 圆环的失稳；b) 梁的侧倾；c) 刚架平面失稳；d) 拱的平面失稳；e) 拱的侧倾；f) 组合压杆的板的翘曲；g) 板梁腹板或翼缘板的翘曲

应该指出，并不是所有的结构和构件都有失稳问题。从压杆稳定问题和图 1-3 可以看出，只有当构件纤细而同时又有压应力存在时，才有失稳的可能性。对于拉杆，不管它如何纤细，到它被拉断之前，其直线平衡状态，始终是稳定的。

本章只介绍中心受压的实体压杆和组合压杆的稳定计算，目的是既解决两个实际问题，又为后面的内容提供基础知识。

第二节 实体压杆的稳定计算

(一) 弹性阶段的失稳

两端铰支的中心压杆（图 1-4），当压力 P 增加到临界值 P_{cr} 时，压杆横截面上的平均应力叫临界应力，可用 $\sigma_{cr} = P_{cr}/A$ 表示。如 σ_{cr} 小于材料的弹性极限 σ_e ，称为弹性失稳，因为压杆开始弯曲时，变形还是弹性的。

在临界状态时，直的和微弯的杆轴都是可能的。为了求出 P_{cr} ，我们要分析微弯的平衡状态（图 1-4）。其挠度曲线的微分方程式为：

$$\frac{1}{\rho} = y'' = -\frac{M}{EI} = -\frac{Py}{EI}$$

式中负号是由于图示坐标，挠度曲线的斜率 y' 渐减，故 $y'' < 0$ ，而图示弯矩 M 又规定具有正值。

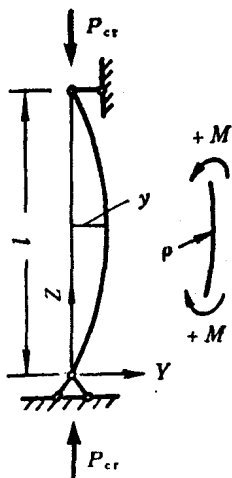


图 1-4

$$\text{令: } \alpha^2 = \frac{P}{EI} \quad (1-1)$$

$$\text{则: } y'' + \alpha^2 y = 0$$

式 (1-1) 的通解为:

$$y = c_1 \sin \alpha z + c_2 \cos \alpha z$$

根据边界条件可定出积分常数 c_1 和 c_2 :

$$\text{由 } z = 0 \text{ 时 } y = 0 \text{ 得出 } c_2 = 0;$$

$$\text{由 } z = l \text{ 时 } y = 0 \text{ 得出}$$

$$c_1 \sin \alpha l = 0 \quad (1-2)$$

此即两端铰支压杆的失稳条件。 $c_1 = 0$, 表示压杆保持直的平衡状态, 这不是我们所要研究的。在弯曲平衡状态 $c_1 \neq 0$, 必须 $\sin \alpha l = 0$, 因此:

$$\alpha l = n\pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\text{或 } \alpha_n = \frac{n\pi}{l}$$

代入式 (1-1) 得临界压力:

$$P_{cr, n} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2}$$

对应的挠度曲线:

$$(1-3)$$

$$y_n = c_1 \sin \frac{n\pi z}{l}$$

式中 c_1 为最大挠度。

参数 α_n 或 $P_{cr, n}$ 在数学上称为固有值 (或本征值), 相应的函数 y_n 称为固有函数 (或本征函数)。当参数取固有值时, 方程 (1-1) 才有非零解。故计算临界荷载的问题即数学上求固有值的问题。

式 (1-3) 中 $n = 1, 2, 3, \dots$ 表示压杆失稳时挠度曲线的半波数目, 理论上可以有多个半波, 但工程上有实际意

义的 P_{cr} 值是最小值, 因此 $n=1$, $I=I_{\min}$, 最小临界压力为:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l^2} \quad (1-4)$$

此式习惯上称为欧拉公式, 它所对应的压杆挠度曲线的形状只有一个正弦半波, 如图 1-4 所示。

值得注意, 现在只能确定临界荷载和失稳后的挠曲形状, 并不能确定挠度 y 的具体数值。这是所有的小挠度线性稳定理论的共同特征。要确定失稳后的挠度, 必须应用大挠度理论。对于压杆, 则要用曲率的精确表达式 $\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ 代替现在采用的近似表达式 $\frac{1}{\rho} = y''$ 。

压杆的支承情况对 P_{cr} 的大小, 有很大的影响。因为压杆的 P_{cr} 值, 主要决定于压杆的失稳图式, 因此对于其他支承情况的压杆, 我们可以从中取出与两端铰支压杆失稳图式相同的杆段, 用比较的方法, 得出其临界压力公式。

图 1-5 中, l_0 表示压杆失稳时挠度曲线上两个弯矩零点 (包括反弯点) 间的距离, 叫自由长度, 即相当于一个正弦半波的长度。不同支承情况的压杆, 其 P_{cr} 值应与按自由长度计算的两端铰支压杆的 P_{cr} 值相同 (因两者的失稳图式相同), 即:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l_0^2} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\beta l)^2} \quad (1-5)$$

式中 l 为实际长度, $l_0 = \beta l$, 四种杆端情况长度折算系数 β 的数值见图 1-5。

由式 (1-5) 可得各种支承情况的欧拉临界应力公式为:

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\beta l)^2 A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (1-6)$$

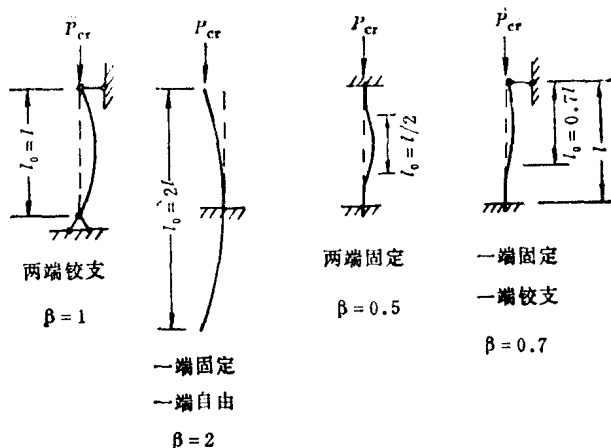


图 1-5

其中： $\lambda = \beta l / i$ 称为压杆的长细比，

$i = \sqrt{I_{\min} / A}$ 为压杆横截面的最小惯性半径。

由式 (1-6) 可见， λ 愈大即杆愈细长，则 σ_{cr} 值愈小。

(二) 弹塑性阶段的失稳

式 (1-6) 只适用于弹性阶段的失稳，即 $\sigma_{cr} \leq \sigma_e$ 的情况，亦即只运用于 $\lambda \geq \pi \sqrt{E / \sigma_e} = \lambda_e$ 的压杆。对于 3 号钢压杆 $\lambda_e \approx 100$ ，铸铁压杆 $\lambda_e \approx 80$ ，普通木压杆 $\lambda_e \approx 75$ 。

当遇到 $\lambda < \lambda_e$ ，即临界应力 σ_{cr} 超过材料弹性极限 σ_e 的压杆，用式 (1-6) 求得的 σ_{cr} 值是虚假而不正确的。根据应力—应变曲线 (图 1-6)，当 $\sigma_{cr} > \sigma_e$ 时，材料的弹性模量 $E = \tan \alpha$ 降低为切线弹性模量 $E_t = \tan \alpha_t$ 。因此， σ_{cr} 的计算公式应改写为：

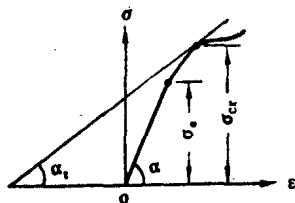


图 1-6

$$\sigma_{cr} = -\frac{\pi^2 E_t}{\lambda^2} \quad (1-7)$$

式中 E_t 是变化的，需由实验确定。而式 (1-7) 的正确性，也已为近年来的实验所肯定。

工程上，对于弹塑性阶段失稳的压杆 ($\lambda < \lambda_e$)，常用经验公式求 σ_{cr} 。例如普通木材制成的压杆，当 $\lambda < 75$ 时，用二次曲线公式：

$$\sigma_{cr} = \sigma_a \left[1 - 0.8 \left(\frac{\lambda}{100} \right)^2 \right]$$

式中 σ_a 为木材的抗压强度极限。

对于用 3 号钢制成的压杆，在 $\lambda < 40$ 的小长细比时：

σ_{cr} = 屈服极限 $\sigma_{Y.P.} = 2400$ 公斤/厘米²；在 $40 < \lambda < 100$ 的中等长细比时，用直线公式：

$$\sigma_{cr} = 3100 - 11.4 \lambda;$$

在 $\lambda \geq 100$ 的大长细比时，由于 $\sigma_{cr} \leq \sigma_e$ ，故采用欧拉公式。

(三) 实体压杆稳定的实用算法——折减系数法

我们知道，压杆的强度条件为：

$$\sigma = \frac{P}{A} \leq [\sigma]$$

式中强度许用应力 $[\sigma] = \frac{\text{危险应力 } \sigma^0}{\text{强度安全系数 } n}$ 为常数，与压杆的尺寸无关。

为保证压杆不致失稳，即稳定性是安全的，必须要求压力 P 小于临界值 P_{cr} ，且有一定的储备。因此，压杆的稳定条件为：

$$P \leq \frac{P_{cr}}{n_{cr}}$$

两边除以压杆截面积 A 得:

$$\sigma = \frac{P}{A} \leq \frac{P_{cr}}{A n_{cr}} = \frac{\sigma_{cr}}{n_{cr}} = [\sigma_{cr}]$$

式中稳定性许用应力 $[\sigma_{cr}] = \frac{\text{临界应力 } \sigma_{cr}}{\text{稳定安全系数 } n_{cr}}$ 为变数, 与压杆的尺寸有关, 因为临界应力 σ_{cr} 与压杆的长细比 λ 有关之故。

只要引用变系数 φ , 就能使变数与常数用等式相联系:

$$[\sigma_{cr}] = \varphi[\sigma]$$

式中变系数 φ 决定于压杆的材料 (E 或 E_t) 和 λ 值, 称为折减系数。因 $\sigma_{cr} < \sigma^0$, 稳定安全系数 n_{cr} 又通常规定得比强度安全系数 n 大, 故 $\varphi = n \sigma_{cr} / n_{cr} \sigma^0$ 的值, 永远小于 1, 且 λ 增大时, φ 值减小, 因 λ 值愈大 σ_{cr} 值愈小之故。

最后, 压杆稳定条件可以写成:

$$\sigma = \frac{P}{A} \leq \varphi[\sigma] \quad (1-8)$$

几种主要建筑材料, 对应于不同 λ 值的 φ 值, 列于图 1-7 所示之曲线中, 可供查用。

类似于压杆强度计算, 式 (1-8) 可以解决压杆稳定计算的三类实际问题。

(1) 验算稳定性是否安全

安全的计算应力应满足下式:

$$\sigma = \frac{P}{A} \leq \varphi[\sigma]$$

(2) 求许可荷载

在已知压杆材料及尺寸时, 最大许可荷载应满足下式:

$$P \leq \varphi[\sigma] A$$

(3) 选择截面

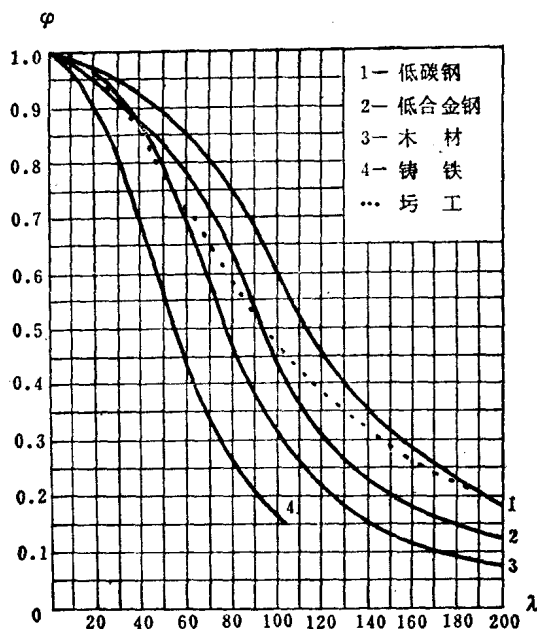


图 1-7

在已知荷载 P 及压杆材料的强度许用应力 $[\sigma]$ 时，压杆的最小横截面积 A 需满足下式：

$$A \geq \frac{P}{\varphi[\sigma]}$$

因式中有二未知数 A 和 φ (φ 与 A 有关，故亦为未知)，所以必须假定其中之一，用逐步渐近法试算。

三类问题中，以最后两类较为重要，并已包括了第一类，现以例题说明其计算步骤。

例题 1 建桥工地常用图1-8所示的摇头扒杆起吊重物，其桅杆 AB 长 6 米，用直径 $d=20$ 厘米的木柱作成，可以简化为两端铰支的压杆，如已知木材的 $[\sigma]=100$ 公斤/厘米²，

