普通高等教育“十五”国家级规划教材

微分几何

彭家贵 陈 卿 编著

高等教育出版社

内容提要

本书共10章，第1章～第5章为第一部分，系统讲述了三维欧氏空间中曲线、曲面的局部几何理论和曲面的内蕴几何学，这部分内容可作为数学专业本科生微分几何必修课教材；第6章～第10章为第二部分，介绍有关曲面整体理论的一些基本结果，是整体微分几何一些经典问题选讲，它涉及数学的其它领域，可作为高年级本科生的专业课教材或课外阅读材料。

图书在版编目(CIP)数据

微分几何/彭家贵，陈卿编编．—北京：高等教育出版社，2002.7

ISBN 7-04-011025-3

Ⅰ．微…　Ⅱ．①彭…②陈…　Ⅲ．微分几何-高等学校-教材　Ⅳ．O186.1

中国版本图书馆CIP数据核字（2002）第015545号

微分几何

彭家贵　陈卿　编著

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市东城区沙滩后街55号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100009	网　　址	http://www.hep.edu.cn
传　　真	010-64014048		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
排　　版	高等教育出版社照排中心		
印　　刷	河北新华印刷一厂		
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2002年7月第1版
印　　张	16.25	印　　次	2002年7月第1次印刷
字　　数	290 000	定　　价	19.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

序　言

本书要讨论的内容是欧几里得微分几何学，即欧几里得空间中曲线和曲面的几何性质，并研究它们的内蕴几何性质．人们自然要问，什么是欧几里得几何？所谓的几何性质又是什么？读者也许从初等几何中对这些问题已有了大概的了解，但由于这些问题带有本质性，因此，仍有必要多说几句．

几何的观念最初来源于人们对自然空间的直观感受和经验．古希腊时期的几何学家欧几里得（约公元前 330 —前 275? ）首先给出了直观几何的条理化结构，他所编写的《几何原本》对几何学原理作了系统的阐述，并开创了公理化的数学研究方法．长期以来，关于欧几里得几何公理体系的完备性、无矛盾性引起了很多数学家的兴趣，特别是关于平行公理的研究更导致了非欧几何学的诞生，其中决定性的工作应归功于 J. Bolyai（匈牙利）和 N. I. Lobachevsky（俄国）． Hilbert 在其名著《几何基础》中所规定的公理体系也许是最严密和最精练的．

欧几里得空间曲线和曲面几何的研究始于微积分在几何的应用，Euler 和 Monge 对微分几何的早期发展作出了重要的贡献． Gauss 关于曲面的理论，建立了基于曲面第一基本形式的几何，并把欧几里得几何推广到曲面上“弯曲”的几何，使微分几何真正成为一个独立的学科． Riemann 在 1854 年的有名演讲“ Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen [1] ”，把 Gauss 的理论推广到高维的空间， Riemann 几何就此诞生． Riemann 的思想引起了许多工作来处理和发展他的新几何．经过 Christofell 、 Beltrami 以及随后的 Bianchi 、 Ricci 和 Levi Civita 等人的努力，微分几何在 19 世纪末已成为蓬勃发展的学科．

与上述想法不同， F. Klein 在 1872 年发表了后人称之为“爱尔朗根纲领（ Erlangen Program）”的著名演讲“最新几何研究的比较评论”．他的基本思想是把几何看作某个变换群作用下的不变量．根据 Klein 的思想，有一个变换群就有一个几何与之对应，欧几里得几何就是研究几何图形在欧几里得变换群下不变的性质和量．

Elie Cartan 融合了上述两种观点，以联络为主要几何观念，创立了外微

---

1 英译文见 M. Spivak. A Comprehensive Introduction to Differential Geometry Vol. 2.pp135−148

分法，使几何不变量得以更充分的显示. 外微分与活动标架法相结合，使得整体微分几何有了突飞猛进的发展. 陈省身将 Elie Cartan 的方法发扬光大，他关于纤维丛和示性类的理论，建立了微分几何与拓扑的联系，是一个光辉的里程碑.

本书讲述的主要是三维欧氏空间中曲线和曲面的几何理论和曲面的内蕴几何学，它历史悠久、内容丰富. 为适应课程改革和微分几何学发展的需要，我们力求简明，在书中主要介绍微分几何的基本观点和基本方法，着重介绍了如何利用自然标架和正交标架研究曲面的几何. 为兼顾微分几何局部理论和整体理论的关系，我们把本书的内容分为两部分：第一部分系统讲述了曲线和曲面的局部几何理论和曲面的内蕴几何学；第二部分介绍了有关曲面整体理论的一些基本结果. 为使本书能在有限的课时内完成讲授，我们在不影响全书结构的前提下，把部分局部理论的内容放入习题. 因此，本书的习题是正文内容的一个补充. 我们将在可微分的范畴内讨论曲线和曲面的几何，因此，如不特别声明，本书所涉及的映射、函数、变换等均是任意次可微的.

本书是基于 20 世纪 80 年代初期写的微分几何讲义，结合多年来在中国科学技术大学的教学实践编写而成. 本书的第一部分可以作为本科生微分几何必修课的教材，其中第五章加星号的两节也可以作为课外阅读材料. 本书的第二部分是整体微分几何一些经典问题的选讲，它涉及到数学的其它领域，可作为高年级本科生的专业课教材或课外阅读材料.

作者感谢高等教育出版社文小西先生对本书出版的大力帮助. 由于作者水平有限，书中不妥或错误之处，敬请读者指正.

作者

目　录

第二部分 整体微分几何选讲

第一部分

曲线与曲面的局部微分几何

第一章 欧氏空间

§1.1 向量空间

1. 向量空间

我们首先回顾有关向量空间的一些基本概念. 我们的讨论都是基于实数域 $\mathbf{R}$ 的.

一个集合 V 称为实数域 $\mathbf{R}$ 上的向量空间是指在 V 上定义了加法运算与数乘运算，它们满足：

(1) $(xy)\boldsymbol{v} = x(y\boldsymbol{v}), \qquad 1\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v};$

(2) $x(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = x\boldsymbol{v} + x\boldsymbol{w}, \qquad (x + y)\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{v} + y\boldsymbol{v};$

这里 $x, y \in \mathbf{R}$ ， $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$.

向量空间 V 如果有一组向量 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ ，使得 V 中的任何向量都可以表示为它们的线性组合且表示惟一，则称 V 是 n 维向量空间，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ 称为 V 的一组基.

一个简单的例子是 n 维数组空间

$$\mathbf{R}^n = \{\boldsymbol{v} = (x^1, x^2, \ldots, x^n) \quad | \quad x^i \in \mathbf{R}, \quad i = 1, 2, \ldots, n\},$$

它的加法和数乘运算分别为相应的分量运算. 任意一个 n 维向量空间 V ，给定了一组基 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ 后，有对应

$$V \ni \boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} x^i \boldsymbol{v}_i \to (x^1, x^2, \ldots, x^n) \in \mathbf{R}^n, \tag{1.1}$$

这个对应将 V 与 $\mathbf{R}^n$ 等同.

向量空间 V 上的内积是一个双线性函数 $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbf{R}$ ，满足：

(1) $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} \rangle$ ；

(2) $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle \geqslant 0$ ，且 $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle = 0$ 当且仅当 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$.

定义了内积的有限维向量空间称为 欧氏向量空间， 记为 $\big(V, \langle\ ,\ \rangle\big)$. n 维欧氏向量空间 V 的任意一组基，可以经过 Schmidt 正交化，得到一组标准正交基 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ ，它满足

$$\langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j \rangle = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

n 维数组空间 $\mathbf{R}^n$ 上，可以定义内积如下：对 $\boldsymbol{v}=(x^1,x^2,\dots,x^n)$ ，$\boldsymbol{w}=(y^1,y^2,\dots,y^n)\in\mathbf{R}^n$ ，

$$\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\rangle=x^1y^1+x^2y^2+\cdots+x^ny^n.$$

在这个内积下 $\mathbf{R}^n$ 是 n 维内积空间，这时 $\mathbf{R}^n$ 的（自然的）一组标准正交基为 $\{\boldsymbol{e}_i=(0,\dots,0,\overset{i}{1},0,\dots,0):i=1,2,\dots,n\}$.

显然，类似 (1.1) ，我们可以建立 n 维欧氏向量空间与 $\mathbf{R}^n$ 间的等同.

以下我们只在 $\mathbf{R}^3$ 中讨论．为此记 $\mathbf{R}^3$ 的标准正交基为

$$\boldsymbol{i}=(1,0,0),\qquad \boldsymbol{j}=(0,1,0),\qquad \boldsymbol{k}=(0,0,1).$$

$\mathbf{R}^3$ 的向量间除了加法、数乘、内积运算外，还有外积运算. 对 $\boldsymbol{v}=(x^1,x^2,x^3)$, $\boldsymbol{w}=(y^1,y^2,y^3)\in\mathbf{R}^3$ ， $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 的外积定义为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{w}&=\left(x^2y^3-x^3y^2,\ -x^1y^3+x^3y^1,\ x^1y^2-x^2y^1\right)\\&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\x^1&x^2&x^3\\y^1&y^2&y^3\end{vmatrix}.\end{aligned}\tag{1.2}$$

两个向量的外积仍是一个向量，外积运算满足反交换律，但不满足结合律 [1].

$\mathbf{R}^3$ 的三个向量 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3$ ，可以定义混合积

$$(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3)=\langle\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\wedge\boldsymbol{v}_3\rangle.\tag{1.3}$$

混合积的几何意义是三个向量张成的平行六面体的有向体积.

性质 1.1 设 $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$, $\boldsymbol{v}_4$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的四个向量,

(1) $\boldsymbol{v}_1\wedge(\boldsymbol{v}_2\wedge\boldsymbol{v}_3)=\langle\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_3\rangle\boldsymbol{v}_2-\langle\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\rangle\boldsymbol{v}_3$;

(2) Lagrange 恒等式:

$$\langle\boldsymbol{v}_1\wedge\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3\wedge\boldsymbol{v}_4\rangle=\langle\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_3\rangle\langle\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_4\rangle-\langle\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_4\rangle\langle\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3\rangle;$$

(3) $(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3)=(\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{v}_1)=(\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)$.

2. 向量分析

以后我们需要研究依赖于参数变化的向量，对它们求微分是常用的办法.

[1] 为了与微分几何的发展相一致，我们采用 $\langle\ \ \rangle$ 和 $\wedge$ 表示向量的内积和外积运算.

设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 均依赖于单参数 t，写成分量形式有

$$\boldsymbol{a}(t) = (a^1(t),a^2(t),a^3(t)), \tag{1.4}$$

$$\boldsymbol{b}(t) = (b^1(t),b^2(t),b^3(t)), \tag{1.5}$$

$$\boldsymbol{c}(t) = (c^1(t),c^2(t),c^3(t)). \tag{1.6}$$

向量值函数 $\boldsymbol{a}(t)$ 的微商为

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{a}(t)=\left(\frac{da^1}{dt},\frac{da^2}{dt},\frac{da^3}{dt}\right). \tag{1.7}$$

设 $\lambda=\lambda(t)$ 是数值函数，利用性质 1.1，读者可以立即验证以下诸微分公式：

$$\frac{d}{dt}(\lambda\boldsymbol{a})=\frac{d\lambda}{dt}\boldsymbol{a}+\lambda\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}, \tag{1.8}$$

$$\frac{d}{dt}\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\langle\frac{d\boldsymbol{a}}{dt},\boldsymbol{b}\rangle+\langle\boldsymbol{a},\frac{d\boldsymbol{b}}{dt}\rangle, \tag{1.9}$$

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})=\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\wedge\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\wedge\frac{d\boldsymbol{b}}{dt}, \tag{1.10}$$

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(\frac{d\boldsymbol{a}}{dt},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{a},\frac{d\boldsymbol{b}}{dt},\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\frac{d\boldsymbol{c}}{dt}). \tag{1.11}$$

当向量值函数依赖于多个变量时，同样可以作偏导数或微分运算，也满足上述公式.

定义在 $\mathbf{R}^3$（或它的一个区域）上的一个向量值函数

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)=\big(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\big),$$

通常称为 $\mathbf{R}^3$ 上的一个向量场，$\mathbf{R}^3$ 上的函数有时也称作 $\mathbf{R}^3$ 上的数量场. 函数 f 的梯度是一个向量场

$$\mathbf{grad}f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right).$$

引进 Nabla 算子 $\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$，则函数的梯度可记为 $\mathbf{grad}f=\nabla f$.

向量场 $\boldsymbol{F}$ 的散度定义为

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z},$$

向量场 $\boldsymbol{F}$ 的旋度定义为

$$\mathbf{rot}\boldsymbol{F}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},-\frac{\partial R}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial z},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

利用 Nabla 算子 ∇ ，向量场的散度和旋度可以记为

$$\mathrm{div}\boldsymbol{F} = \langle \nabla, \boldsymbol{F} \rangle, \qquad \mathbf{rot}\boldsymbol{F} = \nabla \wedge \boldsymbol{F}.$$

关于旋度和散度的运算有如下公式:

1. $$\begin{aligned}\langle \nabla, (f\boldsymbol{F}_1 + g\boldsymbol{F}_2)\rangle &= \langle \nabla, (f\boldsymbol{F}_1)\rangle + \langle \nabla, (g\boldsymbol{F}_2)\rangle \\ &= f\langle \nabla, \boldsymbol{F}_1\rangle + \langle \nabla f, \boldsymbol{F}_1\rangle + g\langle \nabla, \boldsymbol{F}_2\rangle + \langle \nabla g, \boldsymbol{F}_2\rangle;\end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned}\nabla \wedge (f\boldsymbol{F}_1 + g\boldsymbol{F}_2) &= \nabla \wedge (f\boldsymbol{F}_1) + \nabla \wedge (g\boldsymbol{F}_2) \\ &= \nabla f \wedge \boldsymbol{F}_1 + f\nabla \wedge \boldsymbol{F}_1 + \nabla g \wedge \boldsymbol{F}_2 + g\nabla \wedge \boldsymbol{F}_2.\end{aligned}$$

这里 $\boldsymbol{F}_1$ 、 $\boldsymbol{F}_2$ 是向量场， f 、 g 是函数.

下述性质是容易验证的:

性质 1.2

(1) $\nabla \wedge (\nabla f) = \mathbf{rot}(\mathbf{grad} f) = \mathbf{0}$,

(2) $\langle \nabla, \nabla \wedge \boldsymbol{F} \rangle = \mathrm{div}(\mathbf{rot}\boldsymbol{F}) = 0.$

与向量场和 Nabla 算子相对应的概念是外微分形式和外微分算子，将在以后介绍.

§1.2 欧 氏 空 间

解析几何的基本思想是将欧氏空间的几何结构代数化，向量是实现这一目标的基本工具.

经典的三维欧氏空间 E^3 是由点、线、面组成的，它们满足欧氏几何的公理假设. 向量是空间中既有长度又有方向的量，一个直观的办法是用有向线段来表示向量. 例如 P 、 Q 是空间的两个点， $\overrightarrow{PQ}$ 表示从点 P 指向点 Q 的有向线段，其中 P 称为起点、 Q 称为终点，线段 $\overline{PQ}$ 的长度为向量 $\overrightarrow{PQ}$ 的长度. 如果另一个向量的表示为 $\overrightarrow{P'Q'}$ ，称它与向量 $\overrightarrow{PQ}$ 相等是指: 经过平行移动线段 $\overline{P'Q'}$ ，当点 P' 与点 P 重合时点 Q' 也与点 Q 重合. 显然，“向量相等”是一个等价关系. 因此我们只考虑向量的方向和长度，而不考虑向量的起点. 为方便起见我们也用 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \cdots$ 等表示向量，用 $|\boldsymbol{a}|$ 表示向量的长度，其中长度为零的向量称为零向量，记为 $\mathbf{0}$.

有向线段可以平移反映了欧氏空间的均齐性，正是有了平移，我们才可以不用考虑向量的起点而只考虑向量的方向和长度，可以定义向量间的各种运算 [1].

---

[1] 今后，我们要把平移的概念推广到一般的曲面上. 另外，在第五章 §6 中我们也将讨论不同起点向量的不同含义.

以下我们简要回顾向量间的各种运算．可以发现，定义了诸运算后，向量全体构成一个三维欧氏向量空间.

1. 向量的运算

1) 向量的加法

给定向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ ， $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和定义为：任取代表向量 $\boldsymbol{a}$ 的有向线段 $\overrightarrow{PQ}$ ，以 $\overrightarrow{PQ}$ 的终点 Q 为起点，取代表向量 $\boldsymbol{b}$ 的有向线段 $\overrightarrow{QR}$ ，向量 $\overrightarrow{PR}$ 表示向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

上述法则称为向量加法的三角形法则．向量加法具有性质

(a) 交换律： $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ ；

(b) 结合律： $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

2) 向量的数乘

向量 $\boldsymbol{a}$ 和实数 λ 相乘后仍然是一个向量，记为 $\lambda\boldsymbol{a}$ ，其长度为 $\boldsymbol{a}$ 长度的 $|\lambda|$ 倍，其指向当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相同，当 $\lambda<0$ 时指向与 $\boldsymbol{a}$ 相反，当 $\lambda=0$ 规定 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是零向量.

向量的数乘满足

(a) 结合律： $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ ；

(b) 分配律： $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

3) 向量的内积

两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的内积是一个数，记为 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ ，它定义为

$$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{1}{2}\Big(|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2-|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2\Big).$$

由三角形的余弦定律可知

$$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=|\boldsymbol{a}|\ |\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}),$$

其中 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 表示向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

向量的内积满足

(a) 交换律： $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\rangle$ ；

(b) 分配律： $\langle\boldsymbol{a},\lambda\boldsymbol{b}+\mu\boldsymbol{c}\rangle=\lambda\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle+\mu\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\rangle$.

读者可以自行验证，定义了以上三种运算后，向量全体构成一个三维欧氏向量空间.

4) 向量的外积

以上我们通过用有向线段表示向量来定义向量间的运算，一个自然的问题是：两个向量张成平行四边形的有向面积如何表示？

如所知，E^3 的两个不平行向量确定了一个平面，而平面又可以由它的法向量来确定（至多相差一个平移）. 因此，与有向线段的概念相类似，我们可以用法向量来表示两个向量张成的平行四边形的有向面积，这就是向量的外积.

两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的外积为一个新的向量，记为 $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}$. 向量 $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}$ 的长度等于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 张成平行四边形的面积，$\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}$ 的指向规定为：$\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 均垂直，并且 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}$ 构成右手系.

外积具有如下性质：

(a) 反交换律：$\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{a}$；

(b) 分配律：$\boldsymbol{a}\wedge(\lambda\boldsymbol{b}+\mu\boldsymbol{c})=\lambda\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}+\mu\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{c}$.

以上我们回顾了 E^3 中向量的各种运算. 解析几何的手法就是在向量空间 E^3 引进坐标系，用数组来表示向量，以便更有效地进行向量间的各种运算.

2. 坐标和坐标变换

在欧氏空间 E^3 中取定一点 O 为原点，并以 O 为起始点，取三个线性无关的向量 $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3\}$，$\{O;\ \boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3\}$ 称为 E^3(以 O 为原点）的一个（一般）标架；当 $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3\}$ 是相互正交的单位向量时，$\{O;\ \boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3\}$ 称为 E^3 的一个正交标架.

设 $\{O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ 是一个正交标架，依定义可以知道

$$\langle\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j\rangle=\delta_{ij}\quad(i,j=1,2,3). \tag{2.1}$$

这里 δ_{ij} 是 Kronecker 符号.

任意向量 $\boldsymbol{a}$ 关于上述标架有分解

$$\boldsymbol{a}=a^1\boldsymbol{e}_1+a^2\boldsymbol{e}_2+a^3\boldsymbol{e}_3=\sum_{i=1}^{3}a^i\boldsymbol{e}_i, \tag{2.2}$$

其中 $a^i=\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{e}_i\rangle$ $(i=1,2,3)$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标.

如果 P 是三维欧氏空间 E^3 中的一个点，向量 $\overrightarrow{OP}$ 的坐标是 (x^1,x^2,x^3)，即 $\overrightarrow{OP}=\sum\limits_{i=1}^{3}x^i\boldsymbol{e}_i$，则我们把数组 (x^1,x^2,x^3) 称为点 P 的坐标，向量 $\overrightarrow{OP}$ 称为点 P 的位置向量. 显然取定坐标系后，三维欧氏空间 E^3 与三维欧氏向量空间 $\mathbf{R}^3$ 之间有一个一一对应，将点 P 对应到它的坐标 (x^1,x^2,x^3). 在这个意义下，有序数组 (x^1,x^2,x^3) 即表示了点 P，亦可看作它表示了位置向量 $\overrightarrow{OP}$.

或者说，取定正交标架后的三维欧氏空间 E^3 与三维欧氏向量空间 $\mathbf{R}^3$ 等同. 而且，在这个等同下， E^3 中向量的加法、数乘、内积和外积运算的坐标表示就是 $\mathbf{R}^3$ 相应的运算，如上节所述.

现考虑 $\{O';\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2',\boldsymbol{e}_3'\}$ 是 E^3 的另一个正交标架，它与原来的标架有如下关系：

$$\overrightarrow{OO'}=\sum_{i=1}^{3}c^i\boldsymbol{e}_i,\qquad \boldsymbol{e}_i'=\sum_{j=1}^{3}t_i^j\boldsymbol{e}_j,\quad i=1,2,3. \tag{2.3}$$

记矩阵 $\boldsymbol{T}=(t_i^j)_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$ ，因为 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ 与 $\{\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2',\boldsymbol{e}_3'\}$ 均为正交标架，所以 $\boldsymbol{T}$ 是正交阵， $\det\boldsymbol{T}=\pm1$. 这两个标架相差原点间的一个平移 $\overrightarrow{OO'}$ 以及矩阵 $\boldsymbol{T}$ 诱导的正交变换.

欧氏空间给了一个正交标架，称为给了欧氏空间一个 定向. 两个标架称为定向相同，若它们间相差的正交变换的行列式为 1 ，否则称它们定向相反. 显然，定向相同是一个等价关系，因此欧氏空间有且仅有两个定向. 例如：$\{O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ 和 $\{O;\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_1\}$ 为同一定向，$\{O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ 和 $\{O;-\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ 定向相反. 通常，将 $\mathbf{R}^3$ 中由 $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$ 决定的定向称为自然定向(右手定向).

有了标架的变换关系后，容易推出欧氏空间同一点在不同标架下的坐标间的变换关系. 设 $P\in E^3$ ，在新老两个坐标系的坐标分别为 (y^1,y^2,y^3) 与 (x^1,x^2,x^3) ，即

$$\overrightarrow{OP}=\sum_{i=1}^{3}x^i\boldsymbol{e}_i,\qquad \overrightarrow{O'P}=\sum_{i=1}^{3}y^i\boldsymbol{e}_i', \tag{2.4}$$

那么由 (2.3) 式有

$$x^i=c^i+\sum_{j=1}^{3}t_j^iy^j,\qquad i=1,2,3. \tag{2.5}$$

3. 合同变换

在以后的章节中，我们始终在 E^3 中固定一个正交标架，使它成为 3 维欧氏向量空间.

E^3 中两点 $P=(x^1,x^2,x^3)$ 与 $Q=(y^1,y^2,y^3)$ 之间的距离定义为

$$d(P,Q)=\left\{\sum_{i=1}^{3}(y^i-x^i)^2\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{2.6}$$

显然，P 、 Q 两点的距离等于向量 $\overrightarrow{PQ}$ 的长度，即

$$d(P,Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ} \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

空间中点之间一对一的对应称为变换. 变换 $\mathcal{T}$ 如果保持空间中任意两点的距离，即对任意两点 P 和 Q ， $d(P,Q) = d(\mathcal{T}(P), \mathcal{T}(Q))$，则称 $\mathcal{T}$ 为 E^3 中的合同变换，或欧氏变换.

以下我们将求合同变换的一般表达式. 设

$$O(3) = \{\boldsymbol{T} \text{ 是 } 3 \times 3 \text{ 实矩阵} \mid \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{I}_3\} \tag{2.7}$$

是 3 阶正交矩阵全体，对 $\boldsymbol{T} \in O(3)$ 及 $P_0 \in E^3$ ，下述变换

$$\mathcal{T}(P) = P\boldsymbol{T} + P_0, \qquad \forall\, P \in E^3 \tag{2.8}$$

是平移 P_0 与正交变换 $\boldsymbol{T}$ 的复合，容易证明这类变换是合同变换.

定理 2.1 设 $\mathcal{T}$ 是 E^3 合同变换，则存在 $\boldsymbol{T} \in O(3)$ 以及 $P \in E^3$ 使得

$$\mathcal{T}(X) = X\boldsymbol{T} + P, \qquad \forall\, X = (x^1, x^2, x^3) \in E^3.$$

证明 经过一个适当的平移我们不妨设变换保持原点不动，即 $\mathcal{T}(O) = O$. 取 $X \neq O \in E^3$, $t \in (0,1)$ ，依合同变换的定义有

$$\begin{aligned} d(O,tX) &= d(\mathcal{T}(O), \mathcal{T}(tX)) = d(O, \mathcal{T}(tX)), & (2.9)\\ d(tX,X) &= d(\mathcal{T}(tX), \mathcal{T}(X)), & (2.10) \end{aligned}$$

上两式相加，有

$$\begin{aligned} d(O,\mathcal{T}(X)) &= d(O,X) = d(O,tX) + d(tX,X) \\ &= d(O,\mathcal{T}(tX)) + d(\mathcal{T}(tX),\mathcal{T}(X)), \end{aligned}$$

所以由三角不等式知 $\mathcal{T}(tX)$ 位于 O 和 $\mathcal{T}(X)$ 的连线之上. 因此存在 $s \in (0,1)$ 使得 $\mathcal{T}(tX) = s\mathcal{T}(X)$. 但由

$$\begin{aligned} td(O,X) &= d(O,tX) = d(O,\mathcal{T}(tX)) = d(O,s\mathcal{T}(X)) \\ &= sd(O,\mathcal{T}(X)) = sd(O,X), \end{aligned}$$

可知 $s=t$.

记 $\mathcal{T}(X)=(t^1(X),t^2(X),t^3(X))$，对 $\mathcal{T}(tX)=t\mathcal{T}(X)$ 的 t 求微商有

$$t^i(X)=\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial t^i}{\partial x^j}(tX)x^j.\qquad i=1,2,3.$$

令 $t\to 0$，就得到

$$t^i(X)=\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial t^i}{\partial x^j}(0)x^j,\tag{2.11}$$

即

$$\mathcal{T}(X)=X\boldsymbol{T},\qquad\qquad \boldsymbol{T}=\left(\frac{\partial t^i}{\partial x^j}(0)\right).\tag{2.12}$$

因此 $\mathcal{T}$ 是一个线性变换. 由于 $\mathcal{T}$ 保持距离， $\mathcal{T}$ 亦保持向量的内积，所以 $\boldsymbol{T}\in O(3)$. 证毕.

为使读者对微分几何的基本手法有一个初步的了解，我们亦给出如下第二个证明，它要求变换 $\mathcal{T}$ 是 C^2 的.

证明二 设合同变换 $\mathcal{T}$ 将点 (x^1,x^2,x^3) 变为点 (y^1,y^2,y^3)，其中 $y^i=y^i(x^1,x^2,x^3)$ $(i=1,2,3)$. 由 $\mathcal{T}$ 保持距离，我们知道

$$\sum_{i=1}^{3}(y^i-\bar{y}^i)^2=\sum_{i=1}^{3}(x^i-\bar{x}^i)^2.\tag{2.13}$$

将 $\{\bar{x}^i\}$ 固定，上式两边对 x^j 求偏导数，有

$$\sum_{i=1}^{3}(y^i-\bar{y}^i)\frac{\partial y^i}{\partial x^j}=(x^j-\bar{x}^j).\tag{2.14}$$

再对 x^k 求导，就有

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\frac{\partial y^i}{\partial x^k}+\sum_{i=1}^{3}(y^i-\bar{y}^i)\frac{\partial^2 y^i}{\partial x^j\partial x^k}=\delta_{jk}.\tag{2.15}$$

在 (2.15) 式中令 $x^i=\bar{x}^i$，则有 $y^i=\bar{y}^i$ $i=1,2,3$. (2.15) 式就成为

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial y^i}{\partial x^k}\frac{\partial y^i}{\partial x^j}=\delta_{jk}.\tag{2.16}$$