序

居今日而欲致國家於富强之林，登斯民於康樂之境，其道無他，要在教育、文化、經濟諸方面力求進步而已。自然科學之研究與發展，屬於文化領域之一環，同時亦爲國防建設之主動力，其在教育設施方面，實佔有甚大之比重，久爲識者所共喻。

巴西華僑徐君銘信，身繫異邦，心縈祖國，鑒於自然科學之發展與夫建國前途所關之鉅，嘗思盡一己之力，爲邦人士格物致知之助。比年以來，其慨捐於國內學術機構者，固已爲數不貲，前歲之冬，復搜購德國著名函授學校之數學、物理、化學、生物等優良課本約五百萬言寄臺，經東海大學吳校長德耀與溫院長步頤之介紹，欲以迻譯刋行，嘉惠學子之任，委諸元吉，自維學殖荒落，本不敦敢，惟感於徐君所見者大，所志者遠，殊不宜過拂其意，爰勉受義務主編及統籌出版之命。嗣經先後約請江鴻（數學總執筆人）、宋沵、李煥燊、南登岐、孫賡年(物理學總執筆人)、張壽彭、陳喜棠、許巍文、黃友訓、傅貽椿、熊俊（生物學總執筆人）、廖可奇、劉泰庠、鍾恩寵、關德懋（以姓氏筆劃爲序）諸君分任迻譯，其事遂舉。顧以個人精力時間，均屬有限，一年以還，竭知盡能，時以能否符合信達雅之準則爲慮，幸賴各方碩彥陳力就列，各自靖獻，得如預期出書，以餉讀者，實爲元吉精神上莫大之收穫。今後倘蒙文教先進及讀者不吝匡翼，俾在吾國科學發展史上日呈緝熙光明之象，遂徐君之初願於萬一，並使其今後仍就此途徑邁進之志事，（徐君近復精選英文本初級科學百科全書，交由科學勵進中心* 譯印。）永感吾道不孤，邪許同聲，則尤元吉一瓣心香，朝夕禱祝者也。茲値本書出版伊始，謹誌涯略，並向協助譯印諸君子敬致感謝之忱。

中華民國五十一年元月湯元吉序於臺北

*該中心爲一不以營利爲目的之財團法人，其宗旨在於促進科學教育、發展科學研究及介紹科學新知。現任董事爲李熙謀、錢思亮、趙連芳、林致平、徐銘信、李先聞、戴運軌、鄭萣厚、湯元吉等九人。

Fut 92/12

徐氏基金會啓事

一、凡對本書任何一部分，或本會所印行之其他書籍，能在內容及文字方面，提供建議，致使讀者更易迅捷了解書中意義者，如被採納，當致酬美金十二元五角(折合新臺幣五百元)至一百二十五元（折合新臺幣五千元），以示謝意。

二、本會誠徵關於自然科學及機械、電機、電子等工程之中文創作或翻譯稿件，以適合於一般人士或中等學校以上學生自修之用者爲標準。稿費每千字美金二元五角（折合新臺幣一百元），特優譯著稿酬另議。

三、茲爲獎酬本會出版各書之作者及譯者起見，將於各書出版後之次年年底，核計其在臺灣、香港及星加坡三處之銷售數量，分配贈與其作者或譯者以下列三項獎金：

1. 銷數最多者美金6,000元

2. 第二多數者美金4,000元

3. 第三多數者美金2,000元

關於上開一、二兩項事宜，請逕函香港郵政信箱 1284 號徐氏基金會接洽。

編輯要旨

一・本叢書包括數學、物理、化學、生物等四種。

二・本叢書物理、化學、生物等三種，均係採用德國魯斯汀(Rustin)函授學校之課本；數學一種，則係採用德國馬特休斯(Mathesius)函授學校之課本，分別遴請專家迻譯。

三・本叢書之供應對象，主要為中等以上學校之學生、自行進修人士及從事教授各該有關課業之教師，故其內容亦以適合上述各界人士之需要為主旨。

四・原書內於每一相當節段，均附有習題、複習題、試題及論文作業等，可使在學者增加反覆研討之機，自修者亦易得無師自通之樂。本叢書對於前三者均已予以保留，俾利讀者之研習。至於論文作業題目，本係該函授學校對於所屬學生之另一種教學措施，學生於作成論文後，校方尚需負修改之責，與本叢書旨趣未盡相同，故均於正文內予以省略，惟為存眞起見，一俟本叢書出齊後，當彙印單行本，以供讀者參考。

五・本叢書因係依據原書格式譯輯而成，故未能於每一學科之首册中編列總目，擬俟全書出齊後，另行編印專册，以供讀者檢閱。

六・本叢書數學原文，每講約為六萬字，而其餘各書字數自二萬餘字至四萬餘字不等，且各講自成段落，不能分割，故為便利讀者及減輕讀者負擔，只能將其每二講或三講合印為一册，字數遂在七萬餘字至九萬餘字之間。

七・本叢書所有各種科學名詞，一律採用國立編譯館輯譯，教育部審

定公布之名詞；但主編者認爲必要時，亦偶用其他譯名代替之；其爲上述公布名詞中所無者，則出於主編者或譯者之創擬。該項替代或創擬之名詞，是否妥善無疵，未敢自是，倘冀海內專家學者不吝賜教。

八・本叢書之迻譯工作係由多人執筆，行文屬辭，難免各具風格，主編者能力時間，均屬有限，故雖竭智盡慮，勉爲整理，亦僅能使其小異而大同，尚祈讀者諒之。

九・本叢書原文篇帙浩繁，約近五百萬字，出版須依一定進度，編者勢難將譯文與原文逐一核對，倘有未盡妥洽之處，亦請讀者隨時指教，俾於再版時更正，幸甚幸甚！

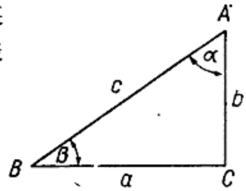
主編者謹識

數學第十二册目錄

三　角　學（續）

C.　正切函數 (Tangensfunktion)

正弦和餘弦都是邊長的比例（亦即分數），其分母則爲斜邊 953
（參閱第十一册中之〔932〕及〔943〕二節）。現在亦可僅用勾股邊以構成直角三角形之邊比：一個銳角的對邊與隣邊之比，稱爲**正切** (Tangens，德文的簡寫爲 tg，英文的簡寫爲 tan)。至於這個名稱是怎樣來的，以後便會知道。



953 a

在〔953 a〕圖的直角三角形 ABC 中可以讀出：

$$tg\beta=\frac{\beta\text{ 角的對邊}}{\beta\text{ 角的隣邊}}=\frac{b}{a}=\frac{21mm}{30mm}$$
$$=21:30=0.7\text{ 及}$$

$$tg\alpha=\frac{\alpha\text{ 角的對邊}}{\alpha\text{ 角的隣邊}}=\frac{a}{b}=\frac{30mm}{21mm}=30:21\approx1.43$$

由此可見，對邊和隣邊的記號是與決定正切的角度有關。一般的式子如下：

$$\boxed{tg\,\varphi=\frac{\varphi\text{ 角之對邊}}{\varphi\text{ 角之隣邊}}}$$

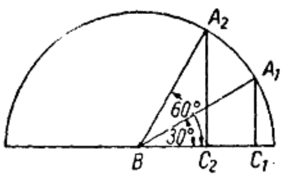
請各位畫出許多大小不同的直角三角形，但 β 角都要等於 35°！試根據量的方法，計算這些三角形中每一個三角形的邊比 $b:a$！結果：35° 角的正切都是一個不變的常數。反過來說，在直角三角形中，屬於正切值 0.7 者，一定是35° 左右的一個角，而這個角乃是對着分數 $\frac{7}{10}$ 中代表分子 7 的一個直角邊（或稱勾邊）。

習　題：

試畫若干直角三角形，其中 $\sphericalangle\alpha$ 1) $=25°$，2) $=47°$，3) $=68°$，4) $=70°$！量一量每個三角形的 a 和 b 之邊長，然後計算 $tg\,\alpha=a:b$，其精確度爲百分之一！ 5) 在直角三角形中，爲什末每一銳角必有某一固定的正切值，而且僅有此一正切值附屬於它？

單位圓中的正切函數

954 我們對於正弦和餘弦函數的關係，已知有一圖形，現在也把它畫出來：如〔954 a〕圖，是將每一個半徑 BA 投影於經過 B 點的水平線上；AC 是投影垂線，BC 是半徑之投影。由此圖形可讀出：



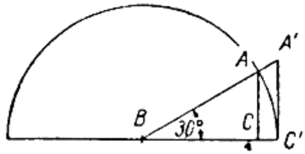
954 a

$$tg\ 30°=\frac{A_1C_1}{BC_1}=\frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}$$
$$=\frac{\text{投影垂線}}{\text{半徑 }BA_1\text{ 之投影}}$$
$$tg\ 60°=\frac{A_2C_2}{BC_2}=\frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}$$
$$=\frac{\text{投影垂線}}{\text{半徑}BA_2\text{之投影}}$$

習　題：

1) 試在〔954 a〕圖上求出 $tg\ 30°$ 和 $tg\ 60°$ 之函數！

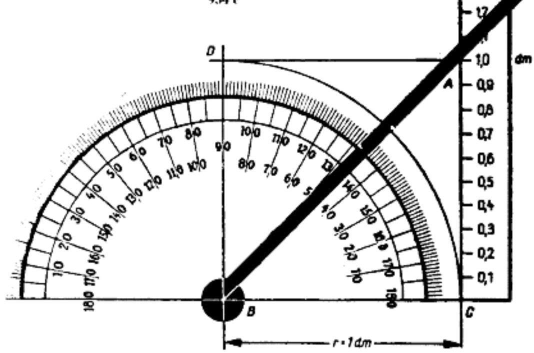
各種不同之正弦值，很容易在單位圓上互作比較（參閱第十一册中之〔934〕節），因爲這些邊比中每個比的分母都是大小不變的半徑。在餘弦函數中也是如此。但由〔954 a〕圖可以看出，各種不同之正切值因爲分母（即半徑投影）不同之故，却不易互作比較。倘若在此也能够以不變的半徑做分母的話，那麼這些正切值也就容易互作比較了。〔954 b〕圖所示，便是這種可能的作圖法：例如保持 $\sphericalangle\beta=30°$ 不變，而將 AC 線平行向右移動，直至變成切線爲止。在水平線與半徑 BA 延長線之間，這一段切



954 b

線稱爲 $C'A'$ 。三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 是相似的（爲什麼？），所以 $A'C' : BC' = tg\,\beta$；但 BC' 現在是單位圓的半徑，即其單位數爲 1，故如將其略去，亦不致發生計算上的錯誤。換言之：在單位圓上，$tg\ 30°$ 之函數值，顯然就是切線段 $A'C'$ 的長度。同理，對其他任一角度亦能作如此看法。

954 c



在〔954 c〕圖中是畫了一個轉動自如的模型。各位在此模型上可直接讀出 0° 以上諸角度的正切。請各位依照下面的說明作成這樣的一個模型，即令 $BC = r = 1\ dm = 100mm$，且將右邊豎起的量尺分爲百分之一 dm（即 mm）的若干等分！各位在繪圖用品商店中可以很便宜的購買一個大小不拘的量角規，用以量測角度。一支繞着量角規的中心 B 旋轉之指針，就叫做旋轉指針。此指針的長邊之一，例如右邊，必須準確地正對着 B 點。沿着指針的這一邊，就可讀出角度和量尺的分割。其餘的一切，看〔954 c〕圖便能明白。現在好比由該圖所示指針之位置，可知 $\sphericalangle ABC = \beta = 45°$。同時在模型上亦能讀出：

$$tg\ 45^\circ = \frac{1dm}{1dm} = 1.00$$

習　題：

2) 應用各位自己所做之模型，求出 10°，20°，……80° 等的正切值！若量尺不够長時，可用另一較長之量尺。

正切函數這個名稱之由來，各位至此諒必已經明白了：可以讀出正切值的量尺左邊，就是第五册〔538〕節所講的切線，此切線則與單位圓接觸於 C 點。

在第十一册所附的正弦與餘弦函數値數表的背面，各位可以找到正切值，左半邊爲 0° 至 45°，右半邊爲 45°至 89.9°。此表的內容雖然未加說明，但各位一看便能明白，因爲主要部分都和正弦表一樣。但有一點要注意的，即 0° 至 45° 的正切是含有四位小數；45° 以上則位數較少。

例如：屬於 $\beta = 11.4^\circ$ 的正切值爲 0.2016，簡寫爲 $tg 11.4^\circ = 0.2016$；或：屬於 $\alpha = 79.6^\circ$ 的正切值爲 5.449；簡寫爲 $tg\ 79.6^\circ = 5.449$。

公路和鐵路的坡度比例

在第八册〔759〕節中，我們已經講過公路上的傾斜度，並且在〔759 a〕圖中指出 BC 與 AC 之比稱爲坡度比例。現在各位可以看出，此一比例也可稱之爲正切，因爲它是有關公路傾斜角的對邊與隣邊之比：　$tg \measuredangle BAC = \frac{8}{25}$。

在鐵路的坡度指標上，各位可以看見一段路線註明其長度及坡度。例如在 $2000m$ 長的路線上，其坡度爲 1：5；意即：在 $500\ m$ 的距離內，這段鐵路逐漸上升 $1m$；故在 $2000m$ 的距離內，總共上升 $4m$。也有些鐵路的平均上升坡度爲 42：100，如瑞士之 Pilatus 鐵路；或爲 27：1000，如瑞士之 St. Gotthard 鐵路。在平坦地區以內之鐵路，其最大坡度一般規定爲1：160。

習　題：

3） 試求上述各鐵道路線之傾斜角！

在坡度不大的鐵路線段上，用作衡量坡度之準繩者，不是正切函數（即上升高度與水平線上線段投影之比），却是正弦函數，亦即上升高度與線段本身之比。但正切函數與正弦函數相差甚微，究竟要到那一種大小的角度才可將此差數略而不計，各位在三角函數表中能够查出。

回　顧：

坡度的大小可用各種不同的方法表示之：

1） 利用傾斜角的大小，例如 $\alpha=11.4°$。

2） 利用邊長比 $a:b$，好比是 $1:5$；這種比是以前項等於1表示之。

3） 利用普通分數表示邊比：$\frac{1}{5}$。

4） 利用小數表示邊比：0.2；更精確些應爲 0.2016。

5） 利用百分數表示上述之坡度，則爲百分之20.16＝20.16%；參閱第七册中之〔695〕節！

6） 坡度比例（即邊比）應爲 $tg\,\alpha=0.2016$。

$tg\,0°$ 與 $tg\,90°$：

在直角三角形 ABC 中 $(\gamma=90°)$，∢β 不可能等於 $0°$ 或 $90°$；爲什麼不可能？請參閱第三册中之〔278〕節！因此，$\beta=0°$ 和 $\beta=90°$（同時 $\alpha=0°$ 和 $\alpha=90°$）這兩種情形僅可視爲極限情形，即 ∢β（或 ∢α）可以儘量設法接近，但永遠無法達此極限。

現在我們要問：這些角的極限所屬之正切究有多大？假如各位利用〔954 c〕圖之模型，將指針由原位置向右旋轉，則在量尺上可以讀出下列的正切值（第一個數字是確實的，以下只是想像而已）：

$$1.0;\ 0.1;\ 0.01;\ 0.001\cdots\cdots$$

這一連串的數可以無止境的繼續寫下去，並且位數愈多，則愈接近極限值 $\beta=0$，及所屬量尺上之分劃0。僅就直角三角形與正切函數的關係而論，便可將此愈來愈接近於極限的事實寫成

下式：

$$\lim_{\beta\to 0^\circ} tg\ \beta=0$$

上式亦常簡寫爲：

$$\boxed{tg\ 0^\circ=0}$$

倘若反過來將指針由〔954 c〕圖所示的位置向左旋轉，即令∢β 由 5° 至 5° 很均勻的繼續增大時，則其所屬之正切值亦將隨之增大；但不是均勻，而是愈來愈快。對於 tg 85°，量尺之長已經超過 $10dm=1m$，這是各位在正切函數表上容易看出來的；對於 89.5°，量尺已達 11.5m 長；對於 89.9° 則已超過 57m 。旋轉至 90° 時，指針的邊終於與 CA 線平行；也就是說，它不再與 CA 線相交。所以對於 90° 是無法求其正切，而各位在表中當然也就找不到與此有關之數值了。但在其他表中各位可以讀到下面的式子：

$$\boxed{tg\ 90^\circ=\infty}$$

意即：tg 90° 等於無窮大；也就是說，愈使增大的角 β 接近於極限值 90°，那末 $tg\ \beta$ 必愈大；這種情形，在理論上是可以毫無止境繼續下去的，但假如說，$tg\ \beta$ 在此是接近於極限值 ∞，那就錯了。因爲所謂無窮大，或**無限大**，顧名思義，並非指的極限值。

955 **正切值之插值法**

正切值的插值法與正弦值的插值法(參閱第十一册中之〔939〕節）完全相同。但因正切值的小數位數各有不同，故當計算表差 (TD) 和題差 (AD) 時，最好將所有位值表示出來，以免引起錯誤。例如：

1) $tg\ 32.48^\circ=?$

$tg\ 32.4^\circ=0.6346$；　$tg\ 32.5^\circ=0.6371$；

$TD=0.6371-0.6346=0.0025$； 角比例數之百分數（在本例

中爲 8）一般仍以 h_z 表示之；因此求得：

$$AD=0.1\times TD\times h_z=0.1\times 0.0025\times 8=0.0020\text{；}$$

$$tg\ 32.48^\circ=0.6346+0.0020=0.6366$$

逆算法：$ta\ \alpha=0.6366$；$\alpha=?$ $\alpha=32.4\cdots^\circ$

$$h_z=\frac{10\times AD}{TD}=\frac{10\times 0.0020}{0.0025}=\frac{0.0200}{0.0025}=200\div 25=8\text{；}$$

$$\alpha=32.48^\circ$$

2) $tg\ 84.23^\circ=?$

$tg\ 84.2^\circ=9.845$； $tg\ 84.3^\circ=10.02$

$TD=10.02-9.845=0.175$；

$AD=0.1\times 0.175\times 3=0.0525\approx 0.053$；

$$tg\ 84.23^\circ=9.845+0.053=9.898$$

逆算法： $tg\ \alpha=9.898$； $\alpha=84.2\cdots^\circ$；

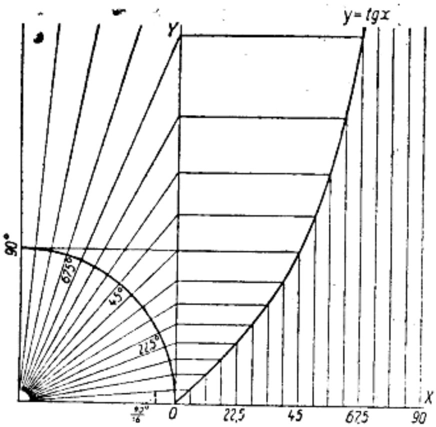
$$h_z=\frac{10\times 0.053}{0.175}=\frac{0.530}{0.175}\approx 3\text{；}\quad \alpha=84.23^\circ$$

習　題：

求下列各角之正切：1) 35.25°； 2) 45.48°； 3) 69.95°； 4) 83.06°； 5) 6.76°；並求屬於下列各正切值之角： 6) 0.6670 ； 7) 0.9939； 8) 1.580； 9) 0.0110； 10) 6.900

0° 至 90° 間之正切曲線

在〔954 c〕圖所示之活動模型上，所有正切值均顯示爲在水 956
平線上豎立於 C 點之垂線；因此有一部份垂線叠合在一起。爲使它們易於區別，以及可用直角坐標系表明正切值與角度大小之關係起見，我們將這些垂直線段配合所屬之角向右作平行移動，至角之弧長則可在單位圓上量得，然後將其移繪於水平線之上，正如對正弦曲線（參看第十一册中之〔934 a〕圖）所採取之步驟完全一樣。末了，如〔956 a〕圖所示，假如以一條順其勢而彎曲的線連結各正切線段的頂點，便可獲得一部分的**正切曲線**；倘若儘可能的將四分之一圓分爲很多等分，更可達成較大之精確性（



956 a

即可描繪更爲精確的正切曲線之意）。

我們很明顯可以看出，正切曲線是如何陡峭上升的，並且愈上升則愈接近於90°分點上的垂線。可是，縱能將正切曲線繼續往上畫，結果也永遠不能使之與此垂線相交於一點的。

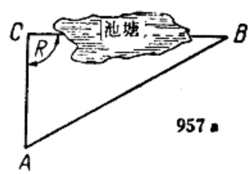
其次這條曲線顯示，在連續的度數（例如 5° 和 6°），甚或十分之一度（例如 5° 和 5.1°）中間之曲線段，幾乎與直線無法分辨，假如我們將十分接近於緊靠 90° 一直往上升的曲線置諸勿顧的話。但在 90° 附近，大約 87° 以下，曲線與直線相差却是如此顯著，致使我們在 87° 與 90° 之間如用從前的插值法，便只能求得十分不精確的正切值。至於在這種情形當中如何尋求補救之道，以後當再討論及之。

習　題：

試畫如〔956 a〕圖所示之正切曲線，但以 $r=1dm$！

957　用正切函數計算三角形之方法

1)　在〔957 a〕圖中，設須求 B 與 C 二地之距離。直接測量 BC 線段是不可能的，因爲 B 與 C 之間有一口池塘無法通過。所以只好在 BC 線上標定垂直方向，而量 CA 線段之長，例如 $130m$；並觀測 $\sphericalangle BCA=\alpha=60°$。由此可得

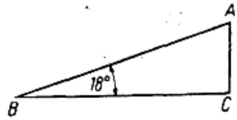


957 a

$a:b=tg\,\alpha$；

$a=b\cdot tg\,\alpha=130m\times1.73=224.9\ m$

2） 臺灣省谷關經達見至花蓮之橫貫公路，全程中有些線段的坡度可達 32 %；試求其相應之傾斜角。我們再說一遍：在〔957 b〕圖中，所謂線段 BA 的坡度，是指 AC 與 BC 之比，其中 AC 是公路起點 B 與終點 A 的海拔之差，而 BC 是 BA 線段之水平投影。此投影的長度應由地圖上去量。所謂坡度爲 32 % $=0.32$，卽指 $tg\ \beta=0.32$ 而言。根據正切函數表可知 β 約爲 $17.7°\approx18°$，却不是 $32°$。



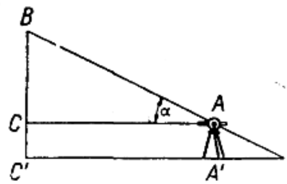
957 b

習　題：

1） 在〔957 c〕圖中，設 B 爲塔頂，應求塔高 BC'。在與塔相距 $C'A'=80m$ 之處架設經緯儀（參閱第二册中之〔208〕節）$A'A$，其分度盤的中心 A 高於水平線 $C'A'$ 1.30 m，塔頂出現於**仰角** $\alpha=17°$ 之內。原來位於水平的望遠鏡必須向上旋轉等於仰角之大小。

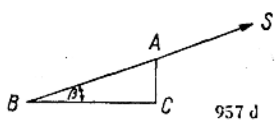
2） 如〔957 d〕圖所示，已知塔影 $BC=60m$ 及太陽位置 $\beta=40°$，求塔高 CA。

3） 假如 $20m$ 高的垂直旗桿 AC 所投之影爲 $BC=40\ m$，問太陽究有多高？意卽 β 角究有多大？看957d〕圖！



957 c

4） 鐵路的坡度指標上指示 1：250；問在此處之鐵路傾斜角究有多大？



957 d

5） 瑞士 Pilatus 鐵道之平均坡度爲 42 %。求其傾斜角！

D. 餘切函數 (Cotangens-Funktion)

在直角三角形 ABC（見〔953 a〕圖）中，$\dfrac{b}{c}=\sin\beta$， 958

$\frac{a}{c}=\cos\beta$， 及 $\frac{b}{a}=tg\,\beta$ 。 每種比都可以逆轉過來，使之成爲倒數之比（參閱第二册中之〔190〕節）。 這種倒數比與原來比的眞値不同 ；例如 ： $\frac{b}{c}=\frac{1}{2}=0.5$ ， 但其倒數比則爲 $\frac{c}{b}=\frac{2}{1}=2$。惟有分母與分子相同時，無論如何逆轉，其値才會不變。

因此 ，亦可將三角比倒轉過來 ，例如由 $\sin\beta=\frac{b}{c}$ 構成倒數比爲 $\frac{c}{b}$，這似乎應該有個新名稱，因爲在三角學中到現在還沒有出現過這樣一個比。但一般旣不由正弦，亦不由餘弦構成倒數， 却僅由正切倒過來， 構成**餘切** (Cotangens) ，簡寫爲 ctg (英文用cot，後面不加點)。由〔953 a〕圖可寫成下列各式：

$$tg\,\alpha=tg\,55^\circ=\frac{a}{b}=\frac{30\,mm}{21\,mm}=1.43$$

$$ctg\,\alpha=ctg\,55^\circ=\frac{b}{a}=\frac{21\,mm}{30\,mm}=0.7$$

$$tg\,\beta=tg\,35^\circ=\frac{b}{a}=\frac{21\,mm}{30\,mm}=0.7$$

$$ctg\,\beta=ctg\,35^\circ=\frac{a}{b}=\frac{30\,mm}{21\,mm}=1.43$$

由此可見，好比 $tg\,55^\circ=ctg\,35^\circ=ctg\,(90^\circ-55^\circ)$ 或 $tg\,35^\circ=ctg55^\circ=ctg\,(90^\circ-35^\circ)$；若寫成一般通用公式，卽爲：

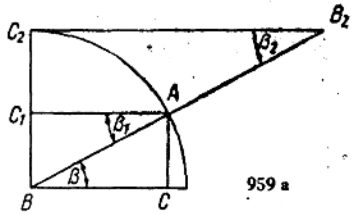
$$\boxed{tg\,\alpha=ctg\,(90^\circ-\alpha)}$$

意卽任何一個角的正切等於其餘角之餘切。這也是餘切名稱之由來；參閱第十一册中之〔945〕節！

單位圓中之餘切及餘切曲線

959 由〔954 a〕圖可以看出，餘切値亦與正切値一樣，由於其分

母不同，是不易互作比較的。所以必須尋求另一描繪方法，在此方法中儘可能的使每個餘切值的分母變成單位圓之半徑，然後始可以之互作比較。



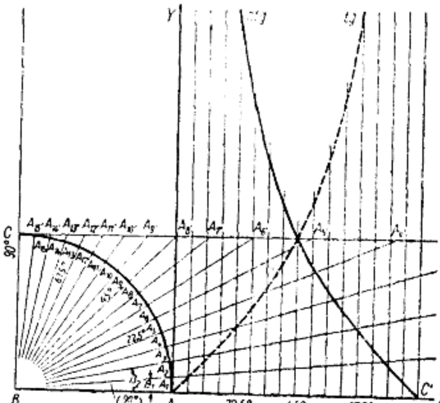
959 a

〔954 b〕圖的畫法，是否可用作餘切值之比較？各位試想一想！我們的答案是不可以！但〔959 a〕圖對我們是有帮助的：

假定 β 角之一邊是水平的；另一邊與單位圓相交於 A 點。通過此 A 點作 BC 的平行線，通過 B 點再作 AC 之平行線，最後通過 C_2 點作 BC 之平行線。由這種作圖法各位可以看出 β，β_1 和 β_2 三個角是相等的，以及下面的邊比也是相等的：

$$ctg\,\beta=\frac{BC}{AC}=ctg\,\beta_1=\frac{AC_1}{C_1B}=ctg\quad{}_2=\frac{B_2C_2}{C_2B}=\frac{B_2C_2}{r}$$

結論：線段 C_2B_2 在圖上顯示，就其長度言，即等於單位圓中 β 角之餘切比值。現在各位諒必明瞭〔959 b〕圖的作圖法，就是以 r 為半徑，B 為圓心作四分之一圓。為了用一支米突尺便於量



959 b

度起見，各位可選用 $r=1\,dm$。在〔959 b〕圖中，這種畫法本應縮小爲 1：3。此外，通過 A_0 點作垂直線，亦卽在圓上引一條切線；然後通過 C 點作水平線，這又是一條切線。最後把四分之一圓弧至少分爲十六等分，並且將由此決定的半徑 BA_1，BA_2 等，儘可能的延長到水平切線之上。由此可得下面的餘切值（卽餘切線段）：

$$ctg\,22.5^\circ=CA_4{'}\ ;\quad ctg\,45^\circ=CA_8{'}\ 等等$$

在此圖中，因爲延長的半徑與水平切線相交於圖形之外的緣故，小於 22.5° 角的餘切值是不能讀出的。

一如第十一册〔934 a〕圖所示之正弦曲線圖，線段 A_0C' 也是拉直的四分之一圓；並且爲了要使各個分點能配合有關各角之比值起見，亦同樣被分成了十六等分。

然後將相當於不同角度的餘切線段 $CA_4{'}$ 等，當作 A_0C' 水平線之垂線，使之直立起來以表示各角之比值。如用順其勢而彎曲的線將這些垂直線的頂點聯接起來，如〔959 b〕圖所示，則得一段

餘　切　曲　線

這條曲線在 0° 與 90° 之間是往下降的。在 0° 的附近，此曲線與 A_0C' 線相距甚遠；β 角愈小，則此曲線愈接近於圓上 A_0 點的垂直切線。可是它永不能與此切線相接觸的。（假如說：它與切線相交於無窮遠，那是會引起誤解的。）

在 90° 附近，餘切曲線與水平線相遇於一點。餘切線段至此卽收縮變爲 0；亦卽 $ctg\,90^\circ=0$。

在〔959 b〕圖中，除了餘切曲線之外，尙以虛線畫出正切曲線。一看便知此二曲線是對稱的；對稱軸是在 45° 附近，卽二曲線相交之處：$tg\,45^\circ=ctg\,45^\circ=1$。

各位最好也將此圖置於視線範圍之內，以防重大錯誤的發生。如能仿照第十一册〔945 a〕圖，以紅色畫正切曲線，及 $tg\,30^\circ$ 和 $tg\,60^\circ$ 的垂直線段，再以綠色畫餘切曲線，以及 $ctg\,40^\circ$ 和