

# 封闭周转轮系效率 及动态优化设计

韩继光 著

132.41  
5

中国矿业大学出版社

责任编辑：刘永清  
封面设计：白海新 王 环

ISBN 7-81070-523-7



9 787810 705233 >

ISBN 7-81070-523-7/TH·22

定价：7.00 元

1  
10  
1010  
11010  
11010  
010100  
101001  
101010  
11010  
01010  
10100  
10101  
101010  
1101

191

JH132.41  
H15

# 封闭周转轮系效率及 动态优化设计

韩继光 著

中国矿业大学出版社

## 内 容 提 要

本书研究封闭周转轮系功率比与传动比的关系,提出十分简单的功率流判断准则;分析差动轮系中各有关传动比以及各个基本构件主从动关系与啮合功率流向的关系,提出切实可行的啮合功率流向判断方法和封闭周转轮系的自锁条件及效率计算公式;分析效率与传动比的关系;建立封闭周转轮系动力学分析模型;提出适用于混合离散变量优化设计的改进遗传算法,利用神经网络建立起封闭周转轮系动态优化设计的数学模型。

本书可作为理工科院校研究生和高年级本科学用书,也可作为相关行业研究人员、工程技术人员的参考书。

### 图书在版编目(CIP)数据

封闭周转轮系效率及动态优化设计/韩继光著. —徐州:中国矿业大学出版社, 2002. 6

ISBN 7-81070-523-7

I. 封... II. 韩... III. ①轮系—封闭功率—研究  
②轮系—机械设计: 最优设计 IV. TH132. 41

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2002) 第 024671 号

书 名 封闭周转轮系效率及动态优化设计

著 者 韩继光

责任编辑 刘永清

出版发行 中国矿业大学出版社

(江苏省徐州市中国矿业大学内 邮编 221008)

印 刷 北京地质印刷厂

经 销 新华书店

开 本  $850 \times 1168 \frac{1}{32}$  印张 4.5 字数 108 千字

版次印次 2002 年 6 月第 1 版 2002 年 6 月第 1 次印刷

定 价 7.00 元

(如有印装质量问题,本社负责调换)

# 前 言

封闭周转轮系是一种常用的混合轮系，由于其具有体积小、重量轻、结构紧凑、速比范围宽，能在较高效率下实现大速比、大功率传动等优点，广泛应用于车辆、航空运输、工程机械、纺织机械、矿山机械、火炮变速装置和机器人机构中。尤其是在车辆和航空运输等工业中，因其能够在较高效率下实现大速比传动，更显示出突出的优点。但其设计较为复杂，类型的选择和运动参数的确定往往不尽合理，甚至出现功率回流现象，致使功率分配不当，负载不均，体积增大，效率降低，产生不必要的功率损失。

近年来，随着生产和科技水平的不断提高，机械设备的动态特性及动态设计越来越受到人们的重视。封闭周转轮系作为重要的机械传动部件，其动态特性对整机性能影响很大。因此，研究封闭周转轮系的动态特性，找出影响其动态性能的薄弱环节，提高轮系的设计水平，进而对轮系进行动态优化设计，具有重要的现实意义。

封闭周转轮系的动态优化设计是非常复杂的，主要体现在设计变量多并且具有离散性，目标函数多且计算非常复杂。用常规的数学规划法自动地进行机械结构静、动态优化设计是非常困难的。目前主要采用的是人机交互方式进行动态设计，即建模分析——修改设计——再分析和修改设计，经过多次反复，直到满足要求为止。这种设计过程，从广义概念上讲也是一种优化设计，但它在很大程度上依赖于设计者的经验，很难使设计达到真

正的优化。今后的发展方向是采用数学化的方法，由计算机自动完成结构系统分析和优化过程。

机械系统静、动态优化设计的关键问题是其目标函数的建立和计算困难，这也是目前需要解决的一个关键技术。机械系统的设计变量与其动态特性参数之间的关系是一种高度非线性的映射关系，无法用一个简单的数学函数来表示。人工神经网络是最近几年发展起来的一门新兴学科。尽管目前人工神经网络还仅仅是对生物神经系统的粗略而简单的模仿，无论是在功能上还是在规模上都比真正的生物神经网络差得很多，但是它已经在一些科学研究和实际应用工程领域中取得了显著成绩。目前已经比较成熟的人工神经网络模型有几十种，它们从各个不同的角度对生物神经网络进行不同层次的描述和模拟。BP 多层前馈网络具有极强的非线性模拟功能，是描述和处理复杂非线性关系的有力工具。通过人工神经网络可以实现机械设计中非线性参数、表格参数等的数字模拟，也可以实现机械系统的设计变量与其动态参数之间的非线性映射，解决目标函数难以建立的难题，使非常复杂的数学模型变得十分简单。

遗传算法于 20 世纪 70 年代初期问世，此后近 30 年来，在解决复杂的全局最优化问题方面，遗传算法取得了成功的应用，受到了人们的广泛关注。遗传算法本身并不要求对优化问题的性质做深入的数学分析，从而对那些不太熟悉数学理论和算法的使用者来说，无疑是非常方便的。遗传算法具有高度的鲁棒性，可以避免在局部最优解附近徘徊，能够较好地适应目标函数的多样性或者搜索空间的不规则性，是一种比较好的全局搜索方法。采用遗传算法对封闭周转轮系进行动态优化设计是比较方便的。

由于封闭周转轮系中齿数、模数等设计变量都属于离散变量，必须选用适于混合离散变量优化设计的计算方法。目前已有的一些针对遗传算法的混合离散化的研究工作，但都有一些不尽人

意的地方，或者是变量必须全部规格离散化，或者是变量离散化过程过于复杂化，不便于应用。此外，标准遗传算法不能处理约束优化问题，一些学者采用惩罚函数法与遗传算法相结合处理约束优化设计问题。惩罚项的引入使得目标函数的性态变得非常差，对求解非常不利。标准的二进制编码遗传算法处理连续变量也存在一定程度上的困难。因此，有必要探寻一种简捷的适于混合离散变量优化设计的遗传算法。

本书是在博士学位论文的基础上完成的，并得到了尊敬的导师李瑰贤教授的悉心指导。导师的渊博知识，严谨的治学态度，辛勤而简朴的工作作风都给我留下极其深刻的印象，这是我毕生应当学习的优良品格。

在本书的研究和撰写过程中，哈尔滨工业大学汪仁树教授提供了许多宝贵的研究资料；我的挚友、事业上的合作伙伴佳木斯大学副校长任福君博士和佳木斯大学周欣教授给予了大力支持和真诚的帮助。本书的主要内容得到了北京航空航天大学张启启院士、燕山大学黄真教授、华南理工大学谢存禧教授、哈尔滨工程大学孟庆鑫教授、东北林业大学马岩教授、中国船舶重工集团第七零三研究所常山高级工程师、哈尔滨理工大学于惠力教授、哈尔滨工业大学李华敏教授、陈湛闻教授的悉心审阅，并提出了许多宝贵的意见，在此一并表示深深的谢意。

最后，向多年来给予我大力帮助和支持的各位朋友表示衷心的感谢和诚挚的问候。

由于本人水平有限，书中难免有错误和不当之处，恳请读者批评指正。

作 者

2002年2月于徐州师范大学

# 目 录

|       |                                |    |
|-------|--------------------------------|----|
| 第 1 章 | 绪 论 .....                      | 1  |
| 1.1   | 概 述 .....                      | 1  |
| 1.2   | 周转轮系的功率流与效率研究现状 .....          | 4  |
| 1.3   | 齿轮传动系统扭振特性分析及动态设计研究概况 ...      | 7  |
| 1.4   | 神经网络与遗传算法的研究概况 .....           | 10 |
| 1.5   | 研究内容和拟解决的关键问题 .....            | 14 |
| 第 2 章 | 封闭周转轮系的功率流类型判定 .....           | 15 |
| 2.1   | 引 言 .....                      | 15 |
| 2.2   | 封闭周转轮系的结构类型 .....              | 15 |
| 2.3   | H 封闭周转轮系的功率流类型判定 .....         | 17 |
| 2.4   | 非 H 封闭周转轮系的功率流类型判定 .....       | 21 |
| 2.5   | 本章小结 .....                     | 24 |
| 第 3 章 | 封闭周转轮系运动参数对啮合功率流向的<br>影响 ..... | 25 |
| 3.1   | 引 言 .....                      | 25 |
| 3.2   | 周转轮系中啮合功率的流向判定 .....           | 25 |
| 3.3   | 封闭周转轮系中啮合功率流向与运动参数的关系 ...      | 30 |
| 3.4   | 封闭周转轮系合理传动比的选择区域的确定 .....      | 43 |
| 3.5   | 本章小结 .....                     | 45 |
| 第 4 章 | 封闭周转轮系的效率研究 .....              | 46 |
| 4.1   | 引 言 .....                      | 46 |

|        |                             |     |
|--------|-----------------------------|-----|
| 4.2    | H 封闭周转轮系的效率计算               | 47  |
| 4.3    | 非 H 封闭周转轮系的效率计算             | 51  |
| 4.4    | 封闭周转轮系的效率分析                 | 55  |
| 4.5    | 本章小结                        | 70  |
| 第 5 章  | 封闭周转轮系动力学分析                 | 72  |
| 5.1    | 引 言                         | 72  |
| 5.2    | 封闭周转轮系的动态激励                 | 73  |
| 5.3    | 封闭周转轮系扭转振动力学模型              | 74  |
| 5.4    | 数学模型的建立                     | 79  |
| 5.5    | 固有频率和模态柔度分析                 | 84  |
| 5.6    | 动力学模型中的物理参数计算方法             | 86  |
| 5.7    | 封闭周转轮系动态特性分析                | 90  |
| 5.8    | 本章小结                        | 95  |
| 第 6 章  | 封闭周转轮系动态优化设计                | 96  |
| 6.1    | 引 言                         | 96  |
| 6.2    | 封闭周转轮系动态优化设计模型              | 98  |
| 6.3    | 改进遗传算法及在封闭周转轮系动态优化设计中<br>应用 | 112 |
| 6.4    | 本章小结                        | 124 |
| 主要参考文献 |                             | 126 |

# 第 1 章 绪 论

## 1.1 概 述

“封闭周转轮系效率及动态优化设计的研究”是黑龙江省自然科学基金资助项目“封闭式周转轮系的运动参数研究”的延伸。封闭周转轮系是以一个双自由度  $2K-H$  型差动轮系为基础，将差动轮系的三个基本构件(两个中心轮  $a, b$  和一个系杆  $H$ )中的两个通过另一单自由度传动系统连接成封闭传动链而形成的混合轮系。封闭周转轮系是一种常用的混合轮系，其传动比变化范围大、结构紧凑，在各种车辆、矿山机械、航空发动机、火炮变速装置和机器人中均有应用。但其设计较为复杂，类型的选择和运动参数的确定往往不尽合理，致使功率分配不当，负载不均，体积增大，效率降低，甚至出现功率回流现象，产生不必要的功率损失。因此，对封闭周转轮系的功率流和效率等进行研究，探讨其与运动参数之间的内在关系，对于揭示封闭周转轮系设计规律具有重要意义。

本课题的研究目的有以下几个方面：一是论证封闭周转轮系的功率流类型判定准则，为判定功率流向是否合理，提供简明有效的方法，从而为合理选择轮系的类型和确定有关传动比的范围提供理论依据；二是找到组成该轮系的差动轮系的转化机构中啮合功率流向判定方法，为效率计算做好必要的准备；三是建立封闭周转轮系效率计算的数学模型，据此给出的效率曲线，对其进

行分析,得到一些有价值的结论,用以指导该种轮系的设计;四是分析轮系的动态特性,建立一种适合于封闭周转轮系的动力学模型,进一步为机构动态优化设计提供计算基础;五是提出一种适合于封闭周转轮系动态优化设计的设计方法,提高轮系的动态设计水平。

传统的功率流类型判定方法极其繁琐<sup>[1~3]</sup>,根本无法用于轮系设计,通过研究功率流类型与有关传动比的关系,推导出封闭周转轮系功率流类型的简易判定准则,为判定功率流向是否合理提供简明有效的方法,从而为合理选择轮系的形式、适当分配传动比及功率、确定运动参数提供理论依据。

周转轮系的效率计算有其特殊重要的意义,一直是人们关注的机构学问题之一,这主要是基于以下原因:对于定轴轮系来说,它的效率主要取决于选用的材料、齿轮的对数、加工制造和安装的精度以及润滑条件等等,而与定轴轮系的结构关系不大。但是,对于周转轮系而言则完全不同,既使在加工制造、安装、润滑条件很好且齿轮数目也很少的情况下,由于结构设计的不合理仍可导致很低的效率,甚至发生自锁现象。周转轮系的效率与结构的关系很大,它的效率计算也远比定轴轮系复杂,特别是结构较复杂的轮系,计算难度就更大了。

目前,国内外已发表了许多研究周转轮系效率的文献,尽管使用的方法各有不同,应用的技巧也各有千秋,但总可以归纳为两类方法,一是力矩法,二是啮合功率法。力矩法<sup>[3,4]</sup>在计算周转轮系效率时较好地考虑了轴承摩擦损失功率,原理十分简单明了,只要在力矩法求行星轮系传动比的力图上将各力偏移一个微小距离即可方便地计算出效率。力矩法计算简便,结果准确,是一种通用算法,适用于一切周转轮系,而且轮系的结构复杂程度对效率计算的难度影响不太大。此方法的另一优点是在计算周转

轮系效率的同时也计算出各个啮合点的圆周力和各个轴承所受的力，便于以后进行强度计算和结构设计。力矩法的主要缺点是没有把轮系的效率与结构联系起来，从所求得效率计算公式中难以发现结构与效率的关系。同时，在计算效率之前还需要知道各个构件的一些几何尺寸，如齿轮的分度圆半径、轴的直径等等。因此，力矩法对轮系的实际结构设计缺乏指导意义。力矩法求效率应用比较少，但它与啮合功率法相比却有其独特之处，不失为一种好的方法。

啮合功率法是目前应用最广泛的周转轮系效率计算方法。根据啮合功率法派生出来的轮系效率计算方法也很多，其中比较有代表性的是库德略夫切夫(КУДРЯВЦЕВ)方法和克列依涅斯(КРЕЙНЕС)方法。库德略夫切夫方法是目前使用最多的方法，它的主要优点是按不同类型的周转轮系分别求其效率，因而很自然地将轮系的效率计算与轮系的结构类型联系起来，这有助于设计者合理选择轮系的结构类型。但是，这种方法的缺点也正在于此，对不同类型的周转轮系分别进行研究，因而所推导出的效率计算公式也和周转轮系的结构形式一样多一样复杂，仅仅是从众多的效率计算公式中选择一个同某一周转轮系结构形式对号入座的计算公式也并非易事。这种方法的另一缺点是对于结构较复杂的周转轮系难以正确地判定各个部分的啮合功率流向，也就难以推导出准确的效率计算公式。

克列依涅斯非常巧妙地解决了功率流向判断的难题<sup>[6,7]</sup>，提出了适用于各种不同类型周转轮系效率计算的通用方法。它虽然从原理上说也是属于啮合功率法，但它并不像一般啮合功率法那样，对周转轮系必须进行分类研究，而是用统一的计算方法计算各种不同类型的周转轮系。它的缺点主要有两个，其一是和力矩法一样没有把效率与周转轮的结构联系起来一起研究，不能对设

计者选择轮系类型起到指导作用；其二是这种方法实质上是利用对分效率求偏导数计算啮合功率的流向，掌握其方法本身需要一定技能，使用该方法更需要一些技巧，不便于工程技术人员掌握和使用。所有啮合功率法的一个共同缺点是只考虑了齿间啮合的摩擦损失，而没有或不正确地考虑行星轮系中轴与轴承间的摩擦损失。

## 1.2 周转轮系的功率流与效率研究现状

关于封闭周转轮系的功率流类型及其判定，国内外许多学者都在研究和探索。石油大学贾宝贤等在“2K-H 差动轮系的功率流向与啮合效率”<sup>[9]</sup>中对 2K-H 差动轮系的功率流向与结构参数之间的关系进行了研究，将这种轮系的传动概括为三种情况，提出总功率流经构件是由轮系的结构参数和两中心轮的传动比决定的；东北大学胡茂弘在文章“行星齿轮变速器的功率流与效率”<sup>[10]</sup>中叙述了功率流图的绘制方法，其优点是除机构自锁外，在有摩擦时提出的公式仍然可以判定该种轮系的功率流向；天津职业技术学院刘继岩在文章“2K-H 型单向封闭差动无级变速器功率流和传动效率的分析研究”<sup>[11]</sup>中提出了单向封闭差动无级变速机构的传动比、传动效率、功率流的计算公式，为对该种机构的深入研究提出了解决问题的方式和方法；佳木斯大学周欣等在文献[12、13]中研究了功率流向与轮系各个传动比之间的关系，得到了判断理想机构功率流向的简单方法；北京轻工业学院刘季颖提出了系杆 H 为输出输入件时封闭周转轮系的功率流类型判定方法，研究的范围虽然有限，但在对系杆 H 为输出、输入件时的六种情况下功率流类型的判断在方法上开拓了研究的视野<sup>[14]</sup>；

吉林工学院杨文教等<sup>[15]</sup>依据力矩法分析了传递大功率闭式行星传动功率流的分配方式和功率计算;在文献[16]中研究闭式行星传动大传动比、封闭功率流、输入输出转向与封闭形式的关系。

对于封闭周转轮系的效率,也有一些学者进行了不同程度的研究。浙江大学李祖踏等分析了封闭差动式传动的啮合效率<sup>[17]</sup>,推导了以机构各传动参数来表示的封闭差动式传动的啮合效率公式,阐明了一、二级传动转化机构的啮合效率对整机啮合效率的不同影响,其分析具有一定的深广度,对研究周转轮系提供了对啮合效率的敏感性分析的方法;吉林工学院张滨的论文“闭式行星传动效率计算公式的研究”<sup>[18]</sup>,采用转化机构法和功率法相结合,推出了不同的效率计算公式,与其他方法建立的效率公式计算结果比较,误差非常小,且具有较高的精度,使用起来也很方便,但应用范围受到一定限制。文献[19]推出了差动轮系效率计算的通用公式,文献[20]和[21]提出了 2K-H 型行星轮系的效率计算简便式,能够简化设计计算程序,具有一定的参考价值。佳木斯大学周欣深入研究了 2K-H 型封闭周转轮系的效率与传动比的关系<sup>[22,23]</sup>,推导出利用其差动轮系转化机构的传动比和两封闭构件间的传动比计算该种轮系效率的公式,减少了公式的个数,统一了计算程序,对本书的研究提供了理论基础。吉林工学院杨文教<sup>[24]</sup>采用转化机构法和节点功率法分析了传递大功率闭式行星传动效率。西北工业大学舒约文用啮合功率法分析了 H 封闭行星轮系的效率<sup>[25]</sup>。西安理工大学苏志霄、郝向儒、崔亚辉利用迭加原理分析了差动轮系的功率流,提出了轮系效率计算的节点功率法,并将其应用在封闭行星轮系效率计算及封闭差动无级变速传动研究中<sup>[26-30]</sup>。山东矿业学院安鲁陵采用图解法研究了封闭差动行星齿轮传动的功率流及效率<sup>[31]</sup>。吉林水工机械厂颜振洲用图解法分析了起重机用分流差动式行星减速机构的结构形式

和效率<sup>[32]</sup>。文献[33]研究了封闭行星轮系与摩擦锥盘构成的无级变速器的效率和滑差率等。

根据 E. I. Radzimovsky<sup>[34,35]</sup>的研究, 国外最早涉及到周转轮系效率分析的是 M. P. Massot(1936 年)。此后近 65 年来发表了大量有关周转轮系效率的文献。最初 E. I. Radzimovsky 给出了周转轮系效率计算的初步形式, 将周转轮系的三个基本构件之一固定, 并根据另两个基本构件的角速度比, 分别建立起 6 种模型的功率平衡方程, 确定轮系的效率。由于这种方法没有考虑行星传动比对效率的影响, 其计算结果与 P. B. Davise 的实验分析结果有一定差距。H. J. Glover<sup>[36]</sup>研究了行星轮系的效率与传动比之间的关系。R. H. Macmillan<sup>[37,38]</sup>基于摩擦不影响功率流向的假设建立起周转轮系的功率流和效率的分析方程。1985 年 D. Yu<sup>[39]</sup>建立起分析差动轮系效率的解析表达式。1992 年 L. Saggere<sup>[40]</sup>等用力矩法建立起周转轮系功率流和效率分析的近似方法。1993 年意大利学者 E. Pennestri 和美国学者 F. Freudenstein 基于文献[5,36]的假设, 摩擦的存在不影响功率的流向和功率比, 分别建立起差动轮系中基本构件不同输入输出组合的 6 种分析模型, 编制了计算机分析程序<sup>[41]</sup>; 同年两人基于力矩方法建立起比较系统的周转轮系效率分析方法<sup>[3]</sup>。1998 年, H. I. Hsieh(University of Maryland)在文献[42]中, 在 Hsieh<sup>[43]</sup>、E. Pennestri 和 F. Freudenstein 等的研究基础上, 研究了多路行星自动传动机构的运动、力矩和功率损失问题, 采用功率平衡方程研究包括离合器等在内的力矩分析, 用无摩擦时的功率流代替有摩擦时的功率流, 尽管这种替代含有一定的误差, 但给计算带来很大方便, 并且一般情况下这种替代误差并不很大。

综上所述, 尽管许多学者针对轮系的效率和功率流问题进行了大量的研究工作, 还有许多问题尚未得到圆满解决。如何简单

迅速地判别轮系的功率流类型？如何准确方便地确定轮系的啮合功率流向？如何建立简捷实用的效率计算公式等等？都有待于进一步研究和探讨。

## 1.3 齿轮传动系统扭振特性分析及动态设计研究概况

近年来，随着生产和科技水平的不断提高，机械设备的动态特性及动态设计越来越受到人们的重视。封闭周转轮系作为重要的机械传动部件，其动态特性对整机性能影响很大。因此，研究封闭周转轮系的动态特性，进而对其进行动态优化设计具有重要的现实意义。

目前，国内学者在减速器系统动态特性研究方面已经做了大量工作。1998 年，西安交通大学杨小安等人研究了齿轮偏心误差与啮合频率的变化幅值之间的关系，提出了用啮合频率变化幅值来评价啮合频率变化情况的准则，其研究成果可用于减速器的动态分析和设计<sup>[44]</sup>。华东交通大学杨树军等人建立了单级行星轮系和多级行星轮系的减速器扭振动力学模型，并对其动力学特性进行了模拟研究<sup>[45]</sup>。西安交通大学张建云等人建立了行星架悬浮的 2K-H 行星齿轮减速器的集中参数振动模型，用相对运动的动力学基本原理建立了系统的振动方程，采用 Fourier 级数法求解了振动响应<sup>[46]</sup>。福州大学刘开昌建立了中心传动磨机用  $2 \times 1100$  齿轮减速机振动模型，采用矩阵迭代法，利用计算机获得其固有频率和振型<sup>[47]</sup>。由于封闭周转轮系的结构特点和工作性质，决定了其振动主要体现在扭转振动方面。研究齿轮传动系统

扭转振动也是齿轮动力学的一个研究方向。1977 年, G. V. Tordion 研究了二级齿轮系统扭振的参数激振效应, 分析了两级啮合刚度相位不同时的动态响应<sup>[48]</sup>。T. Tobe 通过扭转振动模型提出了计算传递误差与动载荷相关性的统计方法<sup>[49,50]</sup>。Y. Furuya 采用集中质量模型和分布参数模型相结合的方法, 建立了齿轮系统扭转振动模型, 求解了较高阶的自由振动频率<sup>[51]</sup>。Liang Zhaozheng 等建立了矿井提升机构齿轮传动系统的扭振模型, 并分析了其扭振动态特性<sup>[52]</sup>。W. J. Chen 利用有限元法分析了同步发动机传动链的扭转振动<sup>[53]</sup>。在系统扭振分析中, 传递矩阵法是分析整机系统动态特性的一种有效方法。1972 年, S. M. Wang 等人建立了考虑轴和齿轮腹板刚度的扭振模型, 并采用传递矩阵法求解了系统在外力矩下的响应<sup>[54]</sup>。1988 年, 日本学者 K. Umezawa 等用传递矩阵法分析啮合刚度为常数的线性系统的固有频率, 并将结果与实验结果进行了对比<sup>[55]</sup>。J. W. David(North Carolina State University)等用传递矩阵法分析了参数激励系统的受迫振动响应<sup>[56]</sup>。1991 年, T. Farakawa 等将单级齿轮传动系统分为独立的齿轮轴和轮齿啮合部分, 用传递矩阵法分析非耦合的齿轮轴的动态特性以及用线性处理方法获得轮齿耦合部分刚度和动态啮合力<sup>[57]</sup>。1992 年, 华中理工大学唐增宝等研究了齿轮、轴和轴承组成的齿轮传动系统的扭转振动和横向振动问题, 将模态分析法和状态空间法相结合, 求解了该系统的多自由度非线性微分方程<sup>[58]</sup>。1995 年, Katsuhiko 等研究了发动机的阻尼特性, 并用传递矩阵法分析了具有扭转阻尼的柴油发动机的扭振特性<sup>[59]</sup>。1998 年, 西安理工大学苏志霄等将频域传递矩阵法应用于齿轮传动的扭振分析中, 并导出了惯性元件、弹性元件及分布参数元件的频域传递矩阵<sup>[60]</sup>。1999 年, 台湾学者 Yuan Mao Huang 等利用扩展传递矩阵法分析了具有阻尼的齿轮传动系统的扭转振动问题<sup>[61]</sup>。