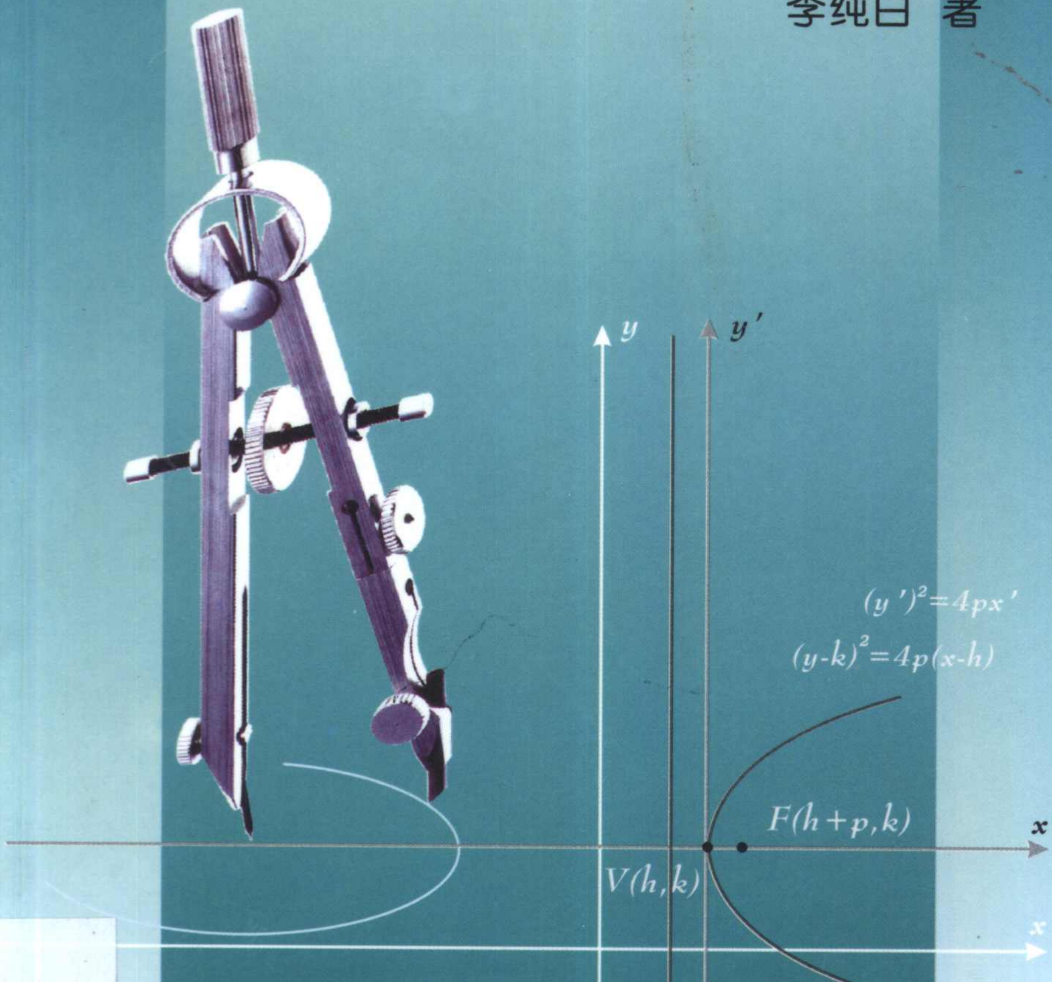
# 数学素质论

SHUXUE SUZHILUN

李纯白 著




四川大学出版社

# 数学素质论

李纯白　著

四川大学出版社
2002年·成都

责任编辑:李川娜
责任校对:王 平
封面设计:罗 光
责任印制:王 炜

**图书在版编目(CIP)数据**

数学素质论/李纯白著. —成都:四川大学出版社,2002.4
ISBN 7-5614-2313-6

Ⅰ.数... Ⅱ.李... Ⅲ.数学-素质教育-中学-教学参考资料 Ⅳ.G633.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第024170号

书名 数学素质论

作 者 李纯白
出 版 四川大学出版社
地 址 成都市一环路南一段24号(610065)
印 刷 成都金龙印务有限责任公司
发 行 四川大学出版社
开 本 850mm×1 168mm 1/32
印 张 9.75
字 数 243千字
版 次 2002年4月第1版
印 次 2002年4月第1次印刷
印 数 001~800册
定 价 18.00元



◆读者邮购本书,请与本社发行科联系。电话:85412526/85414115/85412212 邮政编码:610064
◆本社图书如有印装质量问题,请寄回印刷厂调换。

# 内容提要

本书用数学问题、数学概念、数学模型、数学推理、数学问题的解答思路、构造辅助问题的方法、解答数学问题的策略7章论述了数学教育教学的各个重要方面。它立足于学生数学素质的培养，数学创新意识的形成，数学创新能力的锻造，这在国内外同类著述中实为少见。它是广大数学教育工作者、数学爱好者和高等学校相关专业学生的良师益友。

# 序

《数学素质论》这本书，从数学素质的基本内涵出发，进行了多方面的探索，可供广大数学教育工作者参考。

该书不仅论及到如何培养学生的数学思维能力，而且还论及到怎样引导学生从实践中提炼数学问题，以及在提炼问题的过程中，如何培养学生形成数学概念的抽象、建构数学模型的能力，进而在解答问题的过程中，数学方法的运用和数学思想的创新等基本的数学素质。可以看出，该书积聚了作者几十年从事数学教育的宝贵经验和理论建树。

该书论述严谨，例证丰富，语言简练。全书在论述中，不仅紧密结合数学教育的现实，而且十分注重从数学发展的历史角度进行审视，使得《数学素质论》的内容更加饱满，论证更加有力。所以，完全有理由相信，该书不仅是献给数学教育工作者的一份礼物，而且也是爱好数学的大、中学校学生和社会各界读者的良师益友。

愿有更多的这类著作出版面世。

张景中

2001年12月

# 前 言

本书是作者近20余年来在数学教育和教学中,对于教育、教学理论的深入思考和对于教育、教学实践的经验总结。它汇集了作者这20多年来的数学教育、教学的科研成果。

全书由数学问题、数学概念、数学模型、数学推理、数学问题的解答思路、构造辅助问题的方法、解答数学问题的策略共7章组成。它比较全面系统地论述了数学教育、教学的各个重要方面;它立足于学生数学素质的培养,立足于学生数学创新意识的形成,立足于学生数学创新能力的锻造,这在国内外同类著述中实为少见。

21世纪的中国教育,必将发生翻天覆地的深刻变化,必将从应试教育的桎梏中解放出来而迈向全面推进素质教育的轨道,必将切切实实地以提高国民整体素质为己任。

不少教育界同行,特别是中学教师常常提出这样的问题:现在升学压力这样重,如何实施素质教育啊!对于这个问题的回答,并非三言两语就可以说清楚。但是,必须承认一个事实:多年以来,众多的中小学校为了片面追求升学率,把智育放到压倒一切的位置,而德育、体育、美育被视为可有可无;在智育之中,也是考什么课程才开什么课程,考什么内容就围绕这些内容重复训练、层层过关。其结果是,党和国家的教育方针被抛诸脑后,青年学生的想像力和创造力被扼杀,被禁锢在过分狭窄的知识层面上,他们的身体、心理素质状况被忽视,他们的思想道德培养被漠然置之。如果让此种应试教育任其发展泛滥,要提高国民整体素质,提高综合国力,使我们的国家在激烈竞争的国际环境中立于不败之地,就可能成为一句空话。

作为一名数学教育工作者,不能不认真思考这样一个问题:什么是数学素质?

简单地说,所谓数学素质,就是人们运用数学观察和处理问题的意识。具体地说,数学素质不仅包括数学的逻辑思维,而且还包括从实践中提炼问题的直觉;在提炼问题过程中形成概念的抽象,以及构建数学模型的实践;在解答问题过程中对于数学方法的运用,以及对于数学思想的创新。

数学素质应该包括逻辑思维,这不难被人们所接受。至于提炼问题的直觉,形成概念的抽象,构建模型的实践、方法的运用和思想的创新,也是数学素质的必然品格,则未必被人们所一致认同。而《数学素质论》恰好是帮助你认知这些问题的朋友。

本书参考了姜启源教授的《数学模型》,受到了张奠宙教授的教诲,并受益于1980年—1987年的各期《数学通报》,在此谨向他们表示诚挚的谢意。

由于能力和水平所限,书中谬误在所难免,恳请读者批评指正。

作者
于2001年10月

# 目 录

第1章 数学问题 …………………………………… (1)

1.1 问题的概念……………………………………… (1)
1.2 什么是数学问题………………………………… (2)
1.3 数学问题的组成部分…………………………… (4)
1.4 直接源于实践的数学问题……………………… (10)
1.5 数学猜想……………………………………… (17)
1.6 推广和收缩…………………………………… (25)
1.7 复合与分解…………………………………… (29)
1.8 问题的等价性………………………………… (33)
1.9 构建数学问题的实践………………………… (35)

第2章 数学概念 …………………………………… (38)

2.1 什么是概念…………………………………… (38)
2.2 什么是数学概念……………………………… (39)
2.3 概念的定义…………………………………… (41)
2.4 概念的划分…………………………………… (43)
2.5 数学概念的地位……………………………… (45)
2.6 概念的内涵和外延…………………………… (48)
2.7 明确数学概念的逻辑方法…………………… (50)

第3章 数学模型 …………………………………… (55)

3.1 模型的概念…………………………………… (55)

3.2 什么是数学模型………………………………(57)
3.3 初等数学方法建模……………………………(61)
3.4 建模的方法与步骤……………………………(75)
3.5 构建数学模型举例……………………………(78)

**第4章 数学推理** ………………………………(87)

4.1 推理概述……………………………………(87)
4.2 直言三段论…………………………………(89)
4.3 关系推理……………………………………(96)
4.4 假言推理……………………………………(99)
4.5 不完全归纳法 ………………………………(102)
4.6 数学归纳法 …………………………………(105)
4.7 类比推理 ……………………………………(113)

**第5章 数学问题的解答思路**……………………(117)

5.1 解答数学问题的涵义 ………………………(117)
5.2 解答数学问题的过程 ………………………(119)
5.3 具体特征的启示 ……………………………(133)
5.4 概念和理论的应用 …………………………(136)
5.5 知识的联系与综合 …………………………(140)
5.6 顺逆方向的并行思索 ………………………(149)
5.7 广泛联想——思路的核心 …………………(160)

**第6章 构造辅助问题的方法**……………………(178)

6.1 构造命题法 …………………………………(178)
6.2 构造图形法 …………………………………(190)
6.3 构造表达式法 ………………………………(205)
6.4 构造数组法 …………………………………(212)

6.5 构造函数法 …………………………………… (219)

第7章 解答数学问题的策略……………………………… (229)

7.1 解题策略原则 ………………………………… (230)
7.2 观察与策略 …………………………………… (233)
7.3 逻辑与策略 …………………………………… (238)
7.4 知识与策略 …………………………………… (243)
7.5 经验与策略 …………………………………… (251)
7.6 分类与策略 …………………………………… (260)
7.7 反思与策略 …………………………………… (267)
7.8 数学方法美 …………………………………… (274)
7.9 直接证法 ……………………………………… (283)
7.10 间接证法……………………………………… (287)
7.11 RMI 原理及若干策略的共性 ……………… (288)

# 第 1 章　数 学 问 题

## 1.1　问题的概念

为了描述问题的概念，首先介绍关于系统的概念。

**定义 1**　所谓系统，是指“以相互联系且具有某种性质的要素所组成的集合，而这些要素又按着具有完全确定的关系而排列着。这个集合的特点是，文化整体素质和集合功能上的一致性”(邱辛 1982)。元素(对象)、性质、关系、状态、功能等都可被认为是系统的要素。任一系统都可看做是更广系统的要素或子系统。某个系统的要素，其本身也可看做是新的层次上的系统。

**定义 2**　系统$(A,S)$。假定 $A$ 代表某个主体(这里指的是某个人)，$S$ 代表某个构成一个抽象(或具体)系统的集合，并被称为次系统。

(1) 如果 $A$ 接触 $S$ 后，$S$ 中足以使 $A$ 认定 $S$ 是某一系统的那些 $S$ 的全部元素，元素的性质以及关系都是他所知道的，那么我们就称 $S$ 是相对于 $A$ 的稳定系统(或已知系统)。

(2) 如果接触 $S$ 的主体 $A$，对 $S$ 中那怕只是一个元素，或一条性质，或一种关系不了解，而这些关系、性质、元素对于 $A$ 认定 $S$ 是一个系统又是必需的，那么就称 $S$ 是相对于 $A$ 的问题系统，或未知系统。

对于某个主体 $A$ 而言，系统 $S$ 究竟属于稳定系统，还是属于问题系统，实际上应该取决于主体 $A$ 的知识和经验，即由主体 $A$ 本身所决定。同一个系统 $S$，对于主体 $A$ 是稳定系统，而对于主体 $B$ 则

可能是问题系统。

在主体 $A$ 和系统 $S$ 保持确定的接触的情况下,我们可使用通常的术语:“稳定情境”和“问题情境”。例如,方程

$$(x-5)(x-6)=6$$

对于每个看到这个式子的人而言,都是问题情境。

如果要求某个人 $A$ 从系统 $S$ 中确定他所不了解的元素、性质或关系时,也就是 $S$ 的问题性确定以后,那么就称该系统 $S$ 对于这个人 $A$ 构成一个问题。

## 1.2 什么是数学问题

首先看下面几个问题:

问题 1　若 $x=\sqrt{19-8\sqrt{3}}$,则分式

$$\frac{x^4-qx^3+21x^2+x-30}{x^2-8x+15}$$

的值是多少?

问题 2　已知 $\log_x a=a$($a$ 为大于 1 的整数),则 $x$ 等于(　　)。

(A) $10^{a\lg a}$　　(B) $10^{\frac{\lg a}{a^2}}$　　(C) $10^{\frac{\lg a}{a}}$

(D) $10^{a\lg\frac{1}{a}}$　　(E) 以上都不是。

(以上只有一个正确答案供选择)

问题 3　在复数集上分解因式

$$x^4+x^2y^2+y^4$$

问题 4　已知三角形的三边长,求作这个三角形。

问题 5　在下面多位数的除式中,求出“ * ”号数位上的数字。

$$
\begin{array}{r}
\ast\,8\,\ast\\
\ast\ast\ast\overline{)\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast}\\
\underline{\ast\ast\ast\ast}\phantom{\ast\ast\ast}\\
\ast\ast\ast\phantom{\ast\ast}\\
\underline{\ast\ast\ast\phantom{\ast\ast}}\\
\ast\ast\ast\ast\\
\underline{\ast\ast\ast\ast}\\
0
\end{array}
$$

问题6　求证对于任意的正整数 $n$，下面不等式

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$$

成立。其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 都是正数。

问题7　两平面 $\alpha\cap\beta=a$，直线 $a\perp b$，直线 $b\subset\beta$，则 $b\perp\alpha$ 的充分必要条件是 $\alpha\perp\beta$。

问题8　把一个任意大小的角分成相等的三个角。

问题9　在竖直的墙面上画一个圆，从它的最高点 $A$ 沿弦 $AB$，$AC$ 有两个斜槽，沿直径 $AD$ 有一个竖槽，从 $A$ 点同时放下三个小圆球，一个沿竖槽自由落下，另两个分别沿两个斜槽下滑，若 $AB>AC$，且不计摩擦力，问哪一个小球最先到达圆周上？

问题10　一门高射炮发射一发炮弹，发射角为 $\alpha$，初速度为 $V_0$，若不计空气阻力，求 7s 后炮弹离地面的高度(m)。

上述10个问题都是关于数学对象，即数量、图形、函数等和关于数学方法，即运算、推理、变换、作图等问题。像这种关于数学对象和数学方法的问题，就叫做数学问题。

上述问题1至问题8，涉及的只有数学对象和数学方法，称这类数学问题是纯数学问题。问题9、问题10不仅涉及数学对象和数学方法，而且还涉及非数学对象和方法，例如自由落体运动及其性质，称这类数学问题是数学模型问题。

如果一个问题同任何数学对象和数学方法都完全没有关系，那么这类问题就不是数学问题。如：①明末农民起义失败的原因

是什么？②《阿 Q 正传》的作者是谁？写作年代如何？③水稻的花期和生长期各是多少？④氯化钠的密度是多少？⑤硫酸有哪些主要的化学性质？这类问题都不是数学问题。

## 1.3 数学问题的组成部分

不论如何简单的数学问题，都是由已知、未知、条件、方法四个部分所组成的。

例如 1.2 中列举的数学问题，其中：

问题 1：

已知部分是 $x=\sqrt{19-8\sqrt{3}}$

未知部分是分式

$$\frac{x^4-9x^3+21x^2+x-30}{x^2-8x+15}$$

的值。

条件部分是隐含在 $x=\sqrt{19-8\sqrt{3}}$ 中的无理数，以及隐含在分式

$$\frac{x^4-9x^3+21x^2+x-30}{x^2-8x+15}$$

中的最简分式。

方法部分是根式运算和分式化简。

问题 2：

已知部分是 $\log_x a=a$，$a$ 是大于 1 的整数。

未知部分是 $x$ 的值。

条件部分是隐含在等式 $\log_x a=a$ 中的两个正数 $x$ 与 $a$ 之间的关系。

方法部分是指数与对数的运算。

下面具体讨论数学问题的四个组成部分。

### 1.3.1 已知部分

任何一个数学问题都必须在一定的数学科学系统中进行讨论,才有确定的意义和结论。同一个问题在不同的知识系统中研究,可能有不同的解释,因而会得出不同的答案,甚至还会使用不同的方法。例如问题3在实数集或在有理数集上分解,都有

$$x^4+x^2y^2+y^4=(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$$

但在复数集上分解,则有

$$x^4+x^2y^2+y^4=\left[x+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)y\right]\left[x+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)y\right]\times\left[x-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)y\right]\left[x-\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)y\right]$$

可见,数学问题的已知部分必须包括该问题所属的知识系统。不指明知识系统的数学问题是不完善的数学问题。许多数学问题看似没有明确所属的知识系统,其实这些问题往往是用数学概念、符号、性质、关系等间接地告知了该问题所属的知识系统。至于数学模型一类问题,当其从实际问题经过简化假定建立起模型的时候,问题所属的知识系统则被模型所明确。

数学问题的已知部分和它所属的知识系统都是解答该问题的依据。但是,这两种依据在性质上是不相同的。知识系统是被肯定了的数学真理,而已知部分只是一种假定。作为已知部分的这种假定,当其与客观对象的内在性质相符时则为真理,当其与客观对象的内在性质不相符时则为谬误。对于谬误的假定,数学问题的已知部分必然与该问题所属的知识系统不相容,因而该问题是一个错误的命题,问题自身也就毫无意义。例如:

设 $x=\log_{\csc\alpha}\sin\alpha$, $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$,求 $\log_2(x+1)$ 的值。

由已知部分可得 $(\sin\alpha)^{x+1}=1$。

因 $0<\sin\alpha<1$,于是有 $x+1=0$。

但由该问题所属的知识系统知，零没有对数，所以已知部分与知识系统不相容，故该问题没有意义。

### 1.3.2 未知部分

由前面对问题概念的讨论可知，数学问题之所以构成问题，则在系统 $S$ 中必有不被主体所了解的元素、性质或关系，这些就是数学问题所具备的未知部分。对于数学问题而言，未知部分还应该是明确给予主体解答问题的目标。例如等式

$$x^2-3x+2=0$$

不能看作是一个数学问题，因为主体从这个等式中并不明确解答问题的目标。只有将其添上未知部分，才可以构成一个数学问题。例如：

(1) 解方程 $x^2-3x+2=0$；

(2) 已知 $x^2-3x+2=0$，求实数 $x$ 的值；

(3) 求作一个以方程 $x^2-3x+2=0$ 的两根的倒数为二根的一元二次方程。

数学问题未知部分的形式是多种多样的，它可以是未知的数，也可以是未知的式子、未知的图形，以及未知其真假的命题等等。

### 1.3.3 条件部分

数学问题的条件，就是隐含在数学问题的已知部分及其所属的知识系统中的元素、性质和关系等。例如 1.2 中的问题 4：已知三角形的三边长，求作这个三角形。

首先，该问题已知的三条线段是三角形的三边，因而这三条线段应该遵从“三角形任意两边之和大于第三边，任意两边之差小于第三边”的原理。

其次，可以任选一条线段作为三角形的一边，于是该问题归结为求三角形的第三个顶点，然而这第三个顶点到已作出的一边的两端点的距离是已知部分隐蔽地给予了的。

由此可见，欲全面正确地认识问题的条件部分，必须将问题的已知部分及其所属的知识系统同问题的未知部分联系起来加以考察。又如1.2中的问题5：

```
              * 8 *
      * * *)* * * * * *
            * * * *
                * * *
                * * *
                * * * *
                * * * *
                      0
```

上述问题的未知部分是29个从0到9的整数，而条件部分是每一个未知数字在除法运算的竖式中所处的位置，以及算式中各数位上的数字之间的运算关系。乍一看，整个算式中的30个数字中只有一个是已知的，问题解答起来似乎无从入手。但是，只要将未知部分同问题所属的知识系统联系起来考察，条件部分即会被充分地揭示出来，从而使问题易于解答。

首先，我们注意到算式中商的百位数字与除数相乘的积，以及商的个位数字与除数相乘的积都是4位数，然而商的十位数字与除数相乘的积是一个3位数，可见商的百位数字与个位数字应比十位数字大，但商的十位数字是8，所以商的百位数字与个位数字无疑都是9，因而商数必定是989。

其次，除数是一个3位数，且它与9的乘积是一个4位数，所以除数不应小于112；另一方面，第一余数后面添上被除数的十位数字之后得到的是一个3位数，它不超过999，而它减去除数与8的积所得之差仍是一个3位数，所以8与除数的积不应超过899，即除数不应超过112。综其所述，除数是112无疑。

最后，被除数显然是112与989的乘积，即为110 768。

数学问题的条件既是未知部分的性质、关系、范围的条件，也是由未知通向已知的桥梁和纽带。所以，数学问题的条件部分虽