张量初步

周季生 编

高等教育出版社

本书是张量计算的简明读本. 全书共有五章及两个附录，主要内容有：张量概念及其代数运算，度量空间与度规张量，张量的协变微分，曲率张量，张量应用简述以及欧氏空间中的正交曲线坐标，并附有公式一览表. 书中对重要概念作了分析，各种公式都作了必要的推导. 具有解析几何、高等代数、微积分一般知识的读者即可阅读.

本书可作为物理系有关专业相应课程的教学用书或参考书，也可供学习理论物理的同志作学习张量之向导，并可供工科有关专业在教学中参考.

张 量 初 步

周季生 编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张5.75 字数 130,000

1985 年 10 月第 1 版 1986 年 10 月第 1 次印刷

印数 00,001—4,620

书号 13010·01167 定价 1.20 元

序　　言

张量概念是十九世纪由高斯(Gauss)、黎曼(Riemann)、克里斯托菲 (Christoffel) 等人在发展微分几何过程中引入的. 在此基础上，1887～1901 年间，李奇(Ricci) 和他的学生勒维-奇维塔(Levi-Civita)发展了张量分析. 虽然他们也曾介绍过张量的某些应用，但若干年间很少有人注意. 直至1916 年爱因斯坦(Einstein)用黎曼几何与张量分析来阐述他的广义相对论，才给这一纯数学理论以丰富的物理内容. 张量分析立即成了理论物理的有用工具而被重视起来，从而发展成为一个独立的数学分支，并促进了微分几何的发展.

现代物理的一个基本要求是描述自然规律的数学形式应与坐标系的选择无关(称为广义相对性原理或广义协变原理). 而引入张量以后，凡是能用张量形式表述的自然规律的数学表达式必然与坐标系的选择无关——这正是张量的重要作用.

现在，张量已渗透到现代微分几何、理论物理、连续介质力学以及其他一些边缘科学的领域中. 因此在当代的大学里，张量已不仅是数学专业的重要内容，并已成为理工科学生学习的对象. 但张量分析较抽象，一般不易被读者所掌握. 鉴于此，作者在编写本书时，力图从教学角度出发，结合我国理工科学生的实际数学水平，着重张量概念和计算的阐述，以使读者不致对张量的演算望而生畏.

在第一章，我们用了一定的篇幅阐明张量的概念及其代数运算.

由于张量与黎曼几何的关系十分密切，因此在第二章，我们适当介绍了黎曼几何的一些有关概念．特别是向量（或张量）的平移，因为它是张量协变微分运算的关键，我们着重阐述了勒维-奇维塔关于向量的无限小平移概念并由此推导出平移公式．

第三章是张量的协变微分．本书从普通偏导数与微分概念出发自然地引进这一概念．

显示空间的弯曲特性的曲率张量是广义相对论等理论的基础概念．为使读者顺利地通向这些领域，特辟第四章介绍曲率张量．

关于张量的应用，由于涉及许多具体的知识领域，我们不作全面介绍，只挑选了弹性力学与相对论中的几个简单问题作初步的分析．

上述各章对于不同专业的读者并非都是必要的．读者可根据具体情况予以取舍．第一章是基本的，只需要张量代数的读者可以只读第一章的前四节．

本书是由“张量初步”交流讲义修改而成．书中不仅推导了各种重要公式，还备有习题并答案，以及附有公式一览表备查．书中所附习题除少数是作者自编外，其余散见各种书籍．习题数量不多，但不少习题都具代表性，甚至还有一些没有在正文中阐述的概念，希读者尽力完成．本书所要求的基础知识不多，凡具有解析几何、高等代数、微积分等一般知识的读者即可阅读．但本书在个别地方用到了“变分法”及“微分方程”方面的知识，对这些方面不太熟悉的读者，可只了解其结论，具体证明可不予深究．

本书在出版前，承蒙北京大学物理系教授郭敦仁先生、华中工学院数学系教授俞玉森先生校阅原稿并提出指导性的意见，作者表示衷心的感谢．此外，四川大学物理系教授郭士堃先生、辽宁师范学院物理系副教授魏泽生先生、湖南大学何敏良先生也都阅读了原稿并提出了宝贵的意见，作者谨向诸位先生致谢．作者

还要特别感谢本书编辑张爱和先生，他指出和纠正了原稿中不少缺点和错误.

限于作者水平，书中谬误之处一定不少，盼读者批评指正.

周季生谨识

一九八二年六月于河北师范大学

目 录

第一章 张量概念及其代数运算

第二章 度量空间与度规张量

第三章 张量的协变(绝对)微分

第四章　曲率张量

第五章　张量应用简述

第一章　张量概念及其代数运算

本章目的是介绍 n 维空间中的一般张量及其代数运算；在弹性力学等领域中有用的三维仿射正交张量将在 § 4 中作为特殊坐标变换下的张量来讨论.

n维空间是三维空间概念的推广. 为了不使读者感到陌生，我们将从三维空间过渡到一般 n 维空间. 本章所提到的空间都是指欧几里得空间，至于黎曼空间以及欧几里得空间的特点将在第二章中讨论.

§1　坐标与坐标变换

数学发展中的一个转折点是笛卡尔(Descartes)与费马(Fermat)在几何中引入点的坐标，作出了空间“点”与“一组数”的一一对应，从而使“数”与“形”结合起来. 这就可以用代数的方法来研研几何问题；也可以由几何直观给代数提供模型与启示. 今天，高度发展的数学仍未失去这种特色，只不过创造性的思维使许多概念更加推广到一般. 从向量到张量的发展过程也明显地体现了这种特点.

为了便于了解张量的概念，我们有必要简要地回顾一下坐标与坐标变换的问题.

一、三维空间中点的坐标表示

我们知道，确定三维空间一点的位置需有坐标系. 坐标系有直线坐标系与曲线坐标系.

1. 直线坐标系 由坐标原点O与过原点的任意三条不共面并赋予了单位尺度的直线组成**直线坐标系**. 这三条直线称为**坐标轴**. 平行于坐标轴的一切直线(包括坐标轴)都称为**坐标线**. 过一点的任意两条坐标线所决定的平面称为**坐标面**.

对于直线坐标系，如果三个坐标轴上的单位尺度不相同，则称为**仿射坐标系**;如果单位尺度相同,则称为**笛卡尔坐标系**. 对于笛卡尔坐标系,如果坐标轴互相垂直，则称为笛卡尔**直角**坐标系;否则称为笛卡尔**斜角**坐标系. 显然,笛卡尔直角坐标系是笛卡尔斜角坐标系的特殊情形;笛卡尔坐标系又是仿射坐标系的特殊情形.

通常将坐标轴按指定的顺序分别记为x轴、y轴、z轴或x^1轴、x^2轴、x^3轴. 坐标系记为$\{O\text{-}x^i\}$,其中O表示原点,无需强调坐标原点时可简记为$\{x^i\}$.

由解析几何知道,平行于xOy坐标面的任一平面方程为

$$z=c.$$

给c以不同的实数值，可得一族平行平面. 这族平面形象地将空间分成"层". 空间中任一点有且仅有族中一个平面通过，且对应于一个常数c.

同理,另外还有两族平面:

$$x=a \quad 与 \quad y=b.$$

空间中任一点P，三族平面中均有且仅有一个平面通过. 与它们对应的常数a，b，c就指出了点P的位置,称为点P的**坐标**,记为(a,b,c). 显然,空间中的一点,随着原点位置的不同,或坐标轴上单位尺度的不同,或坐标轴绕原点有某种转动,其坐标都会不相同.

2. 曲线坐标系 设在空间中给定一直线坐标系,点的坐标为(x^1,x^2,x^3). 考察方程

$$f(x^1,x^2,x^3)=u \quad (u\ 为参数).$$

如果偏导数$\frac{\partial f}{\partial x^1}$, $\frac{\partial f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial f}{\partial x^3}$均存在，且其中至少有一个不为0，则给定$u$值时，方程决定了一个简单曲面（见隐函数理论）. 给u以不同实数，可得一族不相交的曲面，也形象地将空间分成“层”. 空间中任一点P有且仅有族中一个曲面通过，并对应于u的一个确定的值.

取下述三个方程，且设其雅可比(Jacobi)行列式（记为J）处处不为0，即

$$\begin{cases} u^1 = f(x^1, x^2, x^3), \\ u^2 = g(x^1, x^2, x^3), \\ u^3 = h(x^1, x^2, x^3), \end{cases}$$

$$J = \det\left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial x^1} & \frac{\partial u^1}{\partial x^2} & \frac{\partial u^1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial u^2}{\partial x^1} & \frac{\partial u^2}{\partial x^2} & \frac{\partial u^2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial u^3}{\partial x^1} & \frac{\partial u^3}{\partial x^2} & \frac{\partial u^3}{\partial x^3} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{1. 1}$$

则当给u^i分别以不同的实数时，此三个方程决定了三族不同的曲面. 空间中任一点P，三族曲面均有且仅有一个曲面通过.

若将上述三族曲面当作坐标面，任意两个不同族曲面的交线当作坐标线，则可得描述空间点的位置的另一种坐标系，称为曲线坐标系（图1）. 一般地，曲线坐标系的坐标线是弯曲的. 一条坐标线上只能有一个参数变化. 例如坐标线Pu^3，是两个坐标面

$$u^1 = 常数 \quad 与 \quad u^2 = 常数$$

的交线，故只有u^3可以取不同的值.

由于雅可比行列式不为0，可唯一解得

$$\begin{cases} x^1 = \bar{f}(u^1, u^2, u^3), \\ x^2 = \bar{g}(u^1, u^2, u^3), \\ x^3 = \bar{h}(u^1, u^2, u^3), \end{cases}$$

$$J=\det\left(\frac{\partial x^i}{\partial u^j}\right)=\frac{1}{\det\left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j}\right)}. \tag{1.2}$$

可见点P的曲线坐标(u^1,u^2,u^3)确实决定了P的位置.

当f,g,h为线性函数时，曲线坐标系就是直线坐标系. 故直线坐标系实际上是曲线坐标系的特殊情形.

综上所述，描述空间点的位置的方法不是唯一的. 同一个点用不同坐标系描述时有不同的坐标.

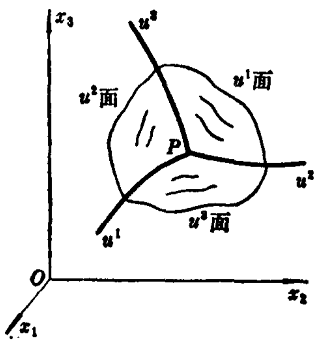

图 1

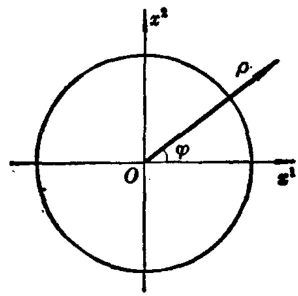

图 2

常用曲线坐标系①举例:

(1) **极坐标系** 在平面上由原点出发的射线和以原点为中心的同心圆所成之曲线坐标系称为平面极坐标系(图2). 极坐标系以射线长ρ、极角φ(取定一射线为极轴,其他射线与极轴间的角)为参数，即

$$u^1=\rho,\ \ u^2=\varphi.$$

它与共原点、x^1轴与极轴重合的直角坐标系的关系为

$$\begin{cases}x^1=\rho\cos\varphi,\\ x^2=\rho\sin\varphi,\end{cases}$$

① 实际应用的曲线坐标系往往在某些点上破坏$J\neq0$的要求. 但这无妨,只要将那些点看作特殊点即可.

$$\det\left(\frac{\partial x^i}{\partial u^j}\right)=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -\rho\sin\varphi\\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi\end{vmatrix}=\rho,$$

$$\begin{cases}\rho=\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2},\\ \varphi=\mathrm{tg}^{-1}\dfrac{x^2}{x^1},\end{cases}$$

$$\det\left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j}\right)=\frac{1}{\det\left(\dfrac{\partial x^i}{\partial u^j}\right)}=\frac{1}{\rho}.$$

（2）**柱坐标系** 由平面上的极坐标系与垂直于该平面的直线所构成之曲线坐标系称为柱坐标系(图 3)．柱坐标系的参数取为

$$u^1=\rho,\ u^2=\varphi,\ u^3=z.$$

它与共原点的直角坐标系的关系为

$$\begin{cases}x^1=\rho\cos\varphi,\\ x^2=\rho\sin\varphi,\\ x^3=z,\end{cases}\qquad \det\left(\frac{\partial x^i}{\partial u^j}\right)=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\rho,$$

$$\begin{cases}\rho=\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2},\\ \varphi=\mathrm{tg}^{-1}\dfrac{x^2}{x^1},\\ z=x^3,\end{cases}$$

$$\det\left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j}\right)=\frac{1}{\rho}.$$

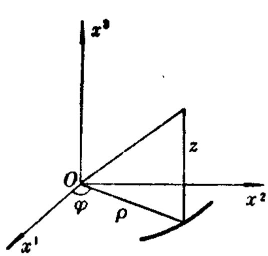

图 3

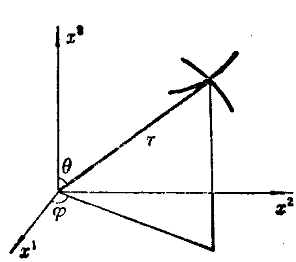

图 4

(3) **球坐标系** 为避免叙述累赘，可看图 4. 它与共原点的直角坐标系的关系为

$$\begin{cases}x^1=r\sin\theta\cos\varphi,\\ x^2=r\sin\theta\sin\varphi,\\ x^3=r\cos\theta,\end{cases}$$

$$\frac{\partial(x^1,x^2,x^3)}{\partial(r,\theta,\varphi)}=\begin{vmatrix}\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi\\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0\end{vmatrix}$$

$$=r^2\sin\theta;$$

$$\begin{cases}r=\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2},\\ \theta=\operatorname{tg}^{-1}\dfrac{\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2}}{x^3},\\ \varphi=\operatorname{tg}^{-1}\dfrac{x^2}{x^1},\end{cases}$$

$$\frac{\partial(r,\theta,\varphi)}{\partial(x^1,x^2,x^3)}=\frac{1}{r^2\sin\theta}.$$

二、n维空间

由上述可知，描述三维空间点的位置时，无论采用怎样的坐标系，必需且只需三个参数．显然，描述平面(或曲面)上点的位置必需且只需两个参数．平面(或曲面)称为**二维空间**．直线(或曲线)是**一维空间**．概括起来，构成空间的基本元素——点的活动的自由度称为“维”，空间的维数就是描述点的位置的最少的坐标数目．

在实际中，为了描述某个系统的状态或某个事件，往往需要不止三个参数．例如在力学中，描述质点运动时，除了空间位置外还需要时间．物理学家常将时间形式地看作与三个空间参数并列的“第四个”参数，从而使用“四维空间”概念．在这种四维空间中，描述运动质点的“位置”必须四个坐标．

可以设想，当一个系统需要 n 个参数才能确定其状态时，就可引入“n 维空间”概念．系统的每个状态可以看作“空间”中的一个“点”．在选定的直线或曲线坐标系下，每个点具有 n 个坐标．于是我们说由坐标$(x^1,x^2,\cdots,x^n)$表示的点的全体称为 **n 维空间**（这里 $x^1,x^2,\cdots,x^n$ 都取实数）．

高于三维的空间是抽象的空间．它是人们借用几何语言来叙述的那些不能由普通意义的简单几何表示的事物．在理论思维中，高维空间起着重要的作用．从现在起，我们所涉及的主要是一般 n维空间（n 为任何正整数，可以大于 3）．

三、向量（矢量）

向量是继数量（标量）之后的一个重要概念．用它可以方便地处理许多物理问题，在数学中也起着重要的作用．

1. 向量的坐标表示　我们仍然从三维空间的向量谈起．在解析几何中，通常将有大小、有方向的量称为**向量**（或**矢量**）．向量的几何表示是一根有向线段．但为了解析地处理问题并推广至 n 维空间，我们需要向量的**坐标表示**（或称**解析表示**）．

我们知道，三维空间的向量，有向量与向量的加法以及数与向量的乘法运算，从而构成三维向量空间．因此任何向量都可按三个线性无关的向量进行分解．为了用坐标表示向量，我们任取一点 O 作为原点，并假定所有向量都以 O 为始点．于是空间任一点 P 都有一个始于 O 终于 P 的向量与之一一对应，称为 P 的**向径**或**径矢**．设 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 为一组线性无关（不共面）的向量，它们与 O 一起称为**标架**或**坐标基**，记为 $\{O\text{-}\boldsymbol{e}_i\}$ 或简记为 $\{\boldsymbol{e}_i\}$（图 5）．$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 称为**标架向量**．显然，有了标架就在空间中建立了仿射坐标系（只须将标架向量分别看作三个轴上的单位尺度）．

按照标架 $\{O\text{-}\boldsymbol{e}_i\}$，任一向量 $\boldsymbol{A}$ 可唯一地表示为

$$A = a^1 e_1 + a^2 e_2 + a^3 e_3,$$

式中的系数 a^1, a^2, a^3 称为向量 A 的**分量**或**坐标**，以 (a^1, a^2, a^3) 表示. 很明显，标架不同时，向量的分量也不同.

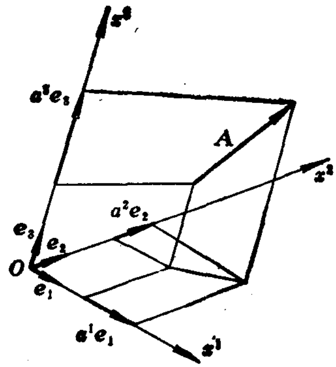

图 5

在同一标架 $\{O\text{-}e_i\}$ 中，空间任一点 P 与其径矢显然有相同的坐标. 于是由 (x^1, x^2, x^3) 表示的，既可看作三维点，也可看作三维向量. P 与 O 重合时，该向量称为**零向量**，它的所有分量为 0.

现在我们不难将三维空间向量的概念推广至一般 n 维空间，不过由于缺乏直观，只能借助于相同的语言和思想. 我们可以类似地引入"径矢"或一组 n 个数来作为 n 维向量的定义. 相应地规定两个向量的加法以及数与向量的乘法. 同三维空间一样，一组线性无关的向量 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 与原点一起称为**标架**或**坐标基**（n 维仿射坐标系）. 标架向量的个数就是空间的维数.

按照标架 $\{O\text{-}e_i\}$，任一 n 维向量 A 可唯一地表示为

$$A = \sum_{i=1}^{n} a^i e_i,$$

式中的 a^i 称为向量 A 的**分量**或**坐标**.

2. 向量的标积（内积或数性积） 我们知道，三维空间中两个向量 A 与 B 的标积定义为

$$A \cdot B = |A||B|\cos\theta, \qquad (a)$$

其中 $|A| = \sqrt{A \cdot A}$ 为向量 A 的长或模，θ 为向量 A 与 B 的夹角. 在笛卡尔直角坐标系中，标积的坐标表示为

$$A \cdot B = \sum_{i=1}^{3} a^i b^i, \qquad (b)$$

其中 a^i, b^i 分别为 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的分量.

对于 n 维空间，向量的长以及两个向量的夹角尚无定义，因此既不能用(*a*)，也不能用(*b*) 来推广标积的概念. 不过，分析(*a*)与(*b*)，可知标积具有下述性质:

① $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$;

② $(\lambda\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{B}=\lambda(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$ （λ 为实数）;

③ $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C})\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{B}$;

④ $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}\geqslant 0$, 等号只当 $\boldsymbol{A}=0$ 时才成立.

于是我们可以根据这些性质来定义向量的标积.

在 n 维空间中，若每一对向量 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 对应着一个实数，且满足性质①～④，则说 n 维空间中定义了向量的**标积**. 两个向量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$的标积记为 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$.

进而我们规定:

$$|\boldsymbol{A}|=\sqrt{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}} \tag{1.3}$$

称为向量$\boldsymbol{A}$的**长或模**;

$$\theta=\arccos\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|}\quad\left(\cos\theta=\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|}\right) \tag{1.4}$$

称为向量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的**夹角**. 并且当 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=0$ 时称向量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ **正交**.

在 n 维空间中任取一个标架$\{O\text{-}\boldsymbol{e}_i\}$. 其中任意两个标架向量的标积记为

$$g_{ij}=\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j. \tag{1.5}$$

特别，如果有

$$g_{ij}=\delta_{ij}=\begin{cases}0, & i\neq j,\\ 1, & i=j,\end{cases} \tag{1.6}$$

则称该标架为**标准正交标架或正交归一系**(笛卡尔直角坐标系).

今后我们常采用符号