超图

——有限集的组合学

[法] C.贝尔热 著
卜月华 张克民 译

东南大学出版社

O15-7
B459

超　图

——有限集的组合学

[法]C. 贝尔热　著

卜月华　张克民　译

东南大学出版社

·南　京·

内 容 提 要

本书第一部分是贝尔热"超图"译著。它论述了基本概念、横贯和匹配、分数横贯、着色、二部图在超图中的推广和拟阵中的着色等内容及其应用。全书内容丰富,系统性强,其中不少内容处在本方向的前沿,还附了大量文献。在每章后面搜集了相关的问题和习题,作为正文的延伸和拓广。本书第二部分将全部习题作了解答,使读者能更全面地掌握本方向的内容。

本书填补了目前国内尚无中文的"超图"专著和教材的空白。它可作为数学系高年级学生和研究生相关课程的教材,也可作为从事这方面工作的教学、科研人员的参考书。

本书已由作者本人正式授权出版中文版
图字:10-2001-061号

图书在版编目(CIP)数据

超图——有限集的组合学/[法]C. 贝尔热著;卜月华,张克民译. —南京:东南大学出版社,2002.7
ISBN 7-81050-955-1

Ⅰ. 超... Ⅱ. ①贝... ②卜... ③张... Ⅲ. 超图
Ⅳ. O157.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第014982号

东南大学出版社出版发行
(南京四牌楼2号 邮编210096)
出版人:宋增民
江苏省新华书店经销 华东有色地研所印刷厂印刷
开本:700 mm×1000 mm 1/16 印张:14.75 字数:281千字
2002年8月第1版 2002年8月第1次印刷
定价:28.00元
(凡因印装质量问题,可直接向发行科调换。电话:025-3792327)

前　言

在过去的四十几年里，图论已被证明是解决几何、数论、运筹学和优化等领域中各种组合问题非常有用的工具。为了解决更多的组合问题，把图的概念进行推广是非常自然的事情。

用这种观点来研究集簇的思想大约始于 1960 年前后。关于把集簇中每个集合看作为"广义的边"，把集簇本身称为"超图"的思想，起初是为了推广图论中一些经典的结果，如 Turán 定理和 König 定理。后来，人们注意到这种推广往往会带来不少便利，且可把图论中的一些定理用统一的、简单的形式加以陈述。正是基于上述考虑，在本书中尽量给出超图中我们认为最有意义的结果。

此外，当所给的矩阵具有某种特殊性质时，超图理论是解决整数优化问题的非常有用的工具。在第 4 章，读者会涉及时间表问题，在第 5 章会涉及定位问题等，书中把这些问题用超图的语言来描述并给出了一般的算法，使得超图理论的应用给从事运筹学和数学规划的专家留下深刻的印象。对于纯数学家，本书包含了并非从图论中产生的关于集系的几个一般的结果。图的概念在这时对这些结果提供了一个直观的框架，使它们更容易被理解。

在每一章的后面搜集了一些相关的习题，我们认为这对基础数学或应用数学的学生来说是必要的。有些问题至今尚未解决。但绝大多数只要直接应用组合设计、有向图、拟阵等理论即可解决。这样的问题很多，限于篇幅，我们不可能都把它们包含在正文中。

我们衷心感谢 Michel Las Vergnas 以及 Dominique de Werra 和 Dominique de Caen 在本书写作过程中的帮助。另外我们还要感谢纽约大学允许我们把 1985 年在纽约讲课时的部分章节写入本书中。

C. 贝尔热

(Claude Berge)

注：书中很长的证明和特别困难的证明在相应位置上加上"*"，首次阅读本书的读者可先跳过它不读。

目　　录

此为试读，需要完整PDF请访问： www.ertongbook.com

第 1 章　基本概念

1　对偶超图

令 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 是一个有限集。关于 X 上的一个**超图** $H = (E_1, E_2, \cdots, E_m)$ 是 X 上一个有限子集簇，使得

(1) $E_i \neq \emptyset \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$

(2) $\bigcup\limits_{i=1}^{m} E_i = X$

一个超图 $H = (E_1, E_2, \cdots, E_m)$ 若还满足

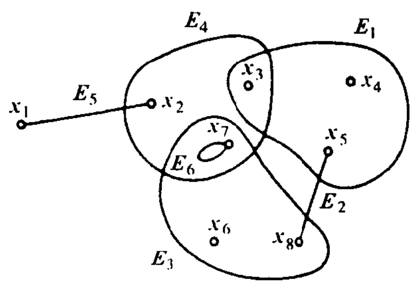
(3) $E_i \subset E_j \Rightarrow i = j$

则称 H 为**简单超图**(或“Sperner 簇”)。

在超图 H 中，X 的元素 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 称为**顶点**，集合 $E_1, E_2, \cdots, E_m$ 称为**边**。简单图是一个每条边均含 2 个顶点的简单超图；一个多重图(有环和重边)是一个每条边含不超过 2 个顶点的超图。这里我们不考虑类似于图中孤立点的顶点。

超图 H 可以用图形来表示，即由点的集合表示 X 中的元素。当 $|E_j| = 2$ 时，就用一条连接 E_j 中两个元素的连续曲线表示 E_j；当 $|E_j| = 1$，用一个包含 E_j 中唯一元素的环表示 E_j；当 $|E_j| \geqslant 3$，用一条包含 E_j 中所有元素的简单闭曲线表示 E_j。

一个超图也可以由一个关联矩阵 $A = (a_{ij})$ 来表示，A 中的 m 列分别对应 H 的 m 条边 $E_1, E_2, \cdots, E_m$，n 行分别对应 H 的 n 个顶点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$。当 $x_i \notin E_j$ 时，$a_{ij} = 0$；当 $x_i \in E_j$ 时，$a_{ij} = 1$(见图 1)。



$$A = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 & E_5 & E_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

图 1　超图 H 的表示和它的关系矩阵

X 上超图 $H = (E_1, E_2, \cdots, E_m)$ 的**对偶**是超图 $H^* = (X_1, X_2 \cdots, X_n)$，其中的顶点对应 H 中的边，而边为

$$X_i = \{e_j \mid \text{在} H \text{中}, x_i \in E_j\}$$

H^* 显然满足条件(1)和(2)。

易见 H^* 的关联矩阵是 H 的关联矩阵的转置,所以有$(H^*)^* = H$。

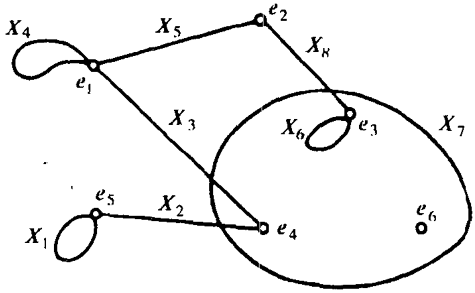


图 2　图 1 中超图的对偶超图

与图类似,超图 H 的顶点数称为 H 的阶,用 $n(H)$ 表示。边数用 $m(H)$ 表示。此外,$r(H) = \max_j |E_j|$ 称为**秩**,$s(H) = \min_j |E_j|$ 称为**下秩**;如果 $r(H) = s(H)$,则称 H 是**一致超图**;秩为 r 的简单一致超图称为 **r- 一致超图**,此时尽管不含"简单"二字,仍被认为是不含重边。

对集合 $J \subset \{1,2,\cdots,m\}$,称

$$H' = (E_j \mid j \in J)$$

为 J 对 H 诱导的**部分超图**。H' 的顶点集是 X 的一个非空子集。

对集合 $A \subset X$,称

$$H_A = (E_j \cap A \mid 1 \leqslant j \leqslant m, E_j \cap A \neq \varnothing)$$

为 A 对 H 的**导出子超图**。

性质　H 的子超图的对偶是对偶超图 H^* 的部分超图。

秩为 2 的超图就是熟知的图。图论中所有概念可推广到超图中,并可获得更强的结果,应用更为广泛。此外,用超图的语言论证组合问题中的一些结果有时会显得更加简洁,甚至一个较强的结果会比一个较弱的结果更容易证明。

2　度

图论中的其他一些定义,下面可以毫不费力地推广到超图中。

对 $x \in X$,定义以 x 为心的**星** $H(x)$ 为 H 中所有含 x 的边所导出的部分超图。x 的**度** $d_H(x)$ 是指 $H(x)$ 中的边数,即 $d_H(x) = m(H(x))$。

超图 H 的最大度记为

$$\Delta(H) = \max_{x \in X} d_H(x)$$

所有顶点有相同度的超图称为**正则的**。

注意到 $\Delta(H) = r(H^*)$,故正则超图的对偶是一致超图。

对 n 阶超图 H,令 $d_H(x_i) = d_i$,并按非增 n- 序列 $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \cdots \geqslant d_n$ 来排序

所成的度序列，当 H 是简单图时，上述度序列能被刻画（见 Erdös, Gallai[1960], Graphs, 第 6 章, 定理 6)。一般地，有下面的性质 1。

性质 1 一个 n- 序列 $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \cdots \geqslant d_n$ 是一个秩为 r 的 n 阶一致超图（允许有重边）的度序列的充要条件是：

(1) $\sum_{i=1}^{n} d_i$ 是 r 的倍数

(2) $d_i \geqslant 1 \quad (i = 1,2,\cdots,n)$

(3) ① $\sum_{i=1}^{n} d_i / r \geqslant d_1$

证 对于上述给定的 n- 序列 $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \cdots \geqslant d_n$，逐次在顶点集合 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 上构造超图 H 的边。

第一步，对每一顶点 x_i 赋予一个权 $d_i^1 = d_i$。第一条边 E_1 由对应权 d_i^1 中最大的前 r 个顶点组成。

第二步，对每个顶点 x_i 赋权为

$$d_i^2 = \begin{cases} d_i^1 & \text{若 } x_i \notin E_1 \\ d_i^1 - 1 & \text{若 } x_i \in E_1 \end{cases}$$

E_2 由对应权 d_i^2 中最大的前 r 个顶点组成。由 (3) 知，这过程可一直进行。若 $\sum_{i=1}^{m} d_i = mr$，则可得边为 $E_1, E_2, \cdots, E_m$，且满足 $d_H(x_i) = d_i \ (i = 1,2,\cdots,n)$ 的超图 H。

一个超图是连通的，如果它的边所产生的交图是连通的，则有下面的性质 2。

性质 2(Tusyadej[1978]) 一个 n- 序列 $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \cdots \geqslant d_n$ 是连通的 r- 一致超图的度序列的充要条件是：

(1) $\sum_{i=1}^{n} d_i$ 是 r 的倍数

(2) $d_i \geqslant 1 \quad (i = 1,2,\cdots,n)$

(3) $\sum_{i=1}^{n} d_i \geqslant \frac{r(n-1)}{r-1}$

(4) $d_1 \leqslant m = \frac{\sum d_i}{r}$

（上述结果可推广到非一致超图，见 Boonyasombat[1984]）

定理 1 (Gale[1957], Ryser[1957]) 给定 m 个整数 $r_1, r_2, \cdots, r_m$ 和一个 n- 序

① 原文中没有这一条件，但证明充分性时需这一条件。例如序列 5,3,2,1,1，就不是秩为 3 的一致超图的度序列。

列 $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \cdots \geqslant d_n$，则存在顶点集为 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 的超图 H，使得 $d_H(x_i) = d_i\ (i \leqslant n)$ 和 $|E_j| = r_j\ (j \leqslant m)$ 的充要条件是：

$$(1)\ \sum_{j=1}^{m} \min\{r_j, k\} \geqslant d_1 + d_2 + \cdots + d_k \qquad (k < n)$$

$$(2)\ \sum_{j=1}^{m} r_j = d_1 + d_2 + \cdots + d_n$$

证 由网络流理论直接推出这定理(参见 Graphs，第 5 章，定理 2 的推论)，为此，构造一个网络：其顶点为 $j = 1,2,\cdots,m$ 和 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，发点为 a，收点为 z，它的弧为：

· 所有弧 (a, j) 赋予容量 $r_j\ (j = 1,2,\cdots,m)$；

· 所有弧 (x_i, z) 赋予容量 $d_i\ (i = 1,2,\cdots,n)$；

· 所有弧 (j, x_i) 赋予容量 1 $(1 \leqslant j \leqslant m, 1 \leqslant i \leqslant n)$。

于是，只需证明存在一个满足上述容量的整数流，且饱和每一条进入收点 z 的弧 (j, z) 即可，即对任意 $I \subseteq \{1,2,\cdots,n\}$，进入集合 $\{x_i \mid i \in I\}$ 的最大流的流量总是大于或等于 $\sum_{i \in I} d_i$。定理中条件(1)，(2) 恰保证了这一点。 ▓

未解决问题 找一个 m- 元组 (r_j) 和 n- 元组 (d_i) 分别表示某个简单超图 H 的 $|E_j|$ 和 $d_H(x_i)$ 的充要条件。

令 r, n 是整数，$1 \leqslant r \leqslant n$，$X$ 为 n 元集合，定义 X 上一个 n 阶 r- 一致完全超图 K_n^r，其边集由 X 的所有 r 元子集所组成。下面陈述 Sperner 的定理[1926]，其中不等式(1) 的简单证明最近由 Yamamoto, Meshalkin, Lubell 和 Bollobás 各自独立给出。

定理 2 (Sperner[1928]，证明由 Yamamoto, Meshalkin, Lubell, Bollobás 给出) 每一个 n 阶简单超图 H 满足

$$(1)\ \sum_{E \in H} \binom{n}{|E|}^{-1} \leqslant 1$$

此外，边数 $m(H)$ 满足

$$(2)\ m(H) \leqslant \binom{n}{[n/2]}$$

当 $n = 2h$ 为偶数时，(2) 中等号成立当且仅当 H 是 K_n^h。当 $n = 2h + 1$ 时，(2) 中等号成立当且仅当 H 是 K_n^h 或 K_n^{h+1}。

证 令 X 是一个 n 元有限集。构造有向图 G：其顶点集为 X 的所有子集簇 $\mathcal{P}(x)$，当且仅当 $A, B \subset X$，且 $|A| = |B| - 1$ 时，从 A 指向 B 有一条弧。

对于 $E \in H$，在 G 中从顶点 $\varnothing$ 到顶点 E 的路的条数是 $|E|!$。注意到 H 是简单超图，当 $E', E \in H, E' \neq E$ 时，过 E 的路不能再过 E'。因此从 $\varnothing$ 到 X 的路的总数是：

$$n! \geqslant \sum_{E \in H} |E|!(n - |E|)!$$

故不等式(1)成立。

对于(2)式，由于

$$\binom{n}{|E|} \leqslant \binom{n}{[n/2]}$$

因此

$$1 \geqslant \sum_{E \in H} \binom{n}{|E|}^{-1} \geqslant m(H)\binom{n}{[n/2]}^{-1}$$

所以(2)式成立。

令 H 是使(2)中等号成立的超图，则对所有 $E \in H$，有下面的(3)：

(3) $\binom{n}{|E|} = \binom{n}{[n/2]}$

若 $n = 2h$ 是偶数，(3)式蕴含着 H 是 h- 一致超图，再由于 $m(H) = \binom{n}{h}$，故 $H = K_n^h$。

若 $n = 2h + 1$，(3)式蕴含着对一切 $E \in H, h \leqslant |E| \leqslant h + 1$。$G$ 中顶点集 X_k 表示 H 中基数为 k 的边集，则 $X_h \cup X_{h+1}$ 是 G 中的独立集，且 $m(H) = |X_h \cup X_{h+1}|$。

在图 G 中，X_h 的出弧等于 $|X_h|(n - h)$ 条，X_h 的象 ΓX_h 的入弧有 $|\Gamma X_h|(h + 1)$ 条，因此有

$$|\Gamma X_h|(h + 1) \geqslant |X_h|(n - h)$$

即

$$|\Gamma X_h| \geqslant \frac{2h + 1 - h}{h + 1}|X_h| = |X_h|$$

若 X_h 非空且又不等于 $\mathscr{P}_h(X) = \{A \mid A \subset X, |A| = h\}$，由于 h- 子集和 $(h + 1)$- 子集全体在 G 中所导出的二部子图的底图是连通的，故上述不等式是严格的。因而有

$$\begin{aligned} m(H) &= |X_h| + |X_{h+1}| \leqslant |X_h| + |\mathscr{P}_{h+1}(X) - \Gamma X_h| \\ &< |X_h| + \binom{n}{h+1} - |X_h| = \binom{n}{h+1} \end{aligned}$$

所以(2)中等式成立仅当 $X_h = \varnothing$ 或 $X_h = \mathscr{P}_h(X)$，即 $H = K_n^h$ 或 $H = K_n^{h+1}$。

关于定理 2 的推广可参见：Erdös[1945]，Kleitman[1968]，Meshalkin[1963]，Kleitman[1965]，Greene，Kleitman[1976]，Katona[1966]，Hochberg，Hirsch[1970]，Erdös，Frankl，Katona[1984]。

为了推广无悬挂点的图，考虑如下一类超图：超图 H 称为**可分离的**，如果对任

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

一顶点 x，H 中所有含 x 的边的交集是 $\{x\}$，即 $\bigcap_{E\in H(x)} E=\{x\}$。

推论 如果 n- 正整数序列 $d_1\geqslant d_2\geqslant\cdots\geqslant d_n$ 是一个可分离超图 $H=(E_1,E_2,\cdots,E_n)$ 的度序列，则

$$\sum_{i=1}^{n}\binom{m}{d_i}^{-1}\leqslant 1$$

事实上，H 是可分离的当且仅当其对偶 H^* 是简单超图，于是由定理 2 有

$$\sum_{i=1}^{n}\binom{m}{|X_i|}^{-1}\leqslant 1$$

为了推广简单图，我们称超图 $H=(E_1,E_2,\cdots,E_m)$ 是**线性的**，如果对 $i\neq j$，$|E_i\cap E_j|\leqslant 1$。如图 1,2 中的超图均是线性的。

下面直接可得：

性质 3 线性超图的对偶也是线性的。

事实上，如果 H 是线性的，则 H^* 中两条边 X_i 和 X_j 的交不含两个不同的顶点 e_1,e_2，否则，在 H 中就有 $\{x_i,x_j\}\subset E_1$，$\{x_i,x_j\}\subset E_2$，这与 $|E_1\cap E_2|\leqslant 1$ 矛盾。

定理 3 H 是一个 n 阶线性超图，则

(1) $\sum_{E\in H}\binom{|E|}{2}\leqslant\binom{n}{2}$

如果 H 是 r- 一致超图，则其边数满足

(2) $m(H)\leqslant\dfrac{n(n-1)}{r(r-1)}$

(2) 式中等号成立当且仅当 H 是 Steiner 系 $S(2,r,n)$。

因为 H 是线性的，故含在同一条边中的点对数有

$$\sum_{E\in H}\binom{|E|}{2}\leqslant\binom{n}{2}$$

即(1) 式成立。如果 H 又是 r- 一致的，则(2) 式成立。

Steiner 系 $S(2,r,n)$ 是 n 元集 X 上满足每一对点恰好含在一条边中的 r- 一致超图。T.P.Kirkman[1847] 给出：$S(2,3,n)$ 系存在的充要条件是 $n\equiv 1$ 或 $3 \pmod 6$。

为了排除某些 r 的值，考察 $S(2,r,n)$ 系存在的必要条件：

(1) $\binom{n}{2}\binom{r}{2}^{-1}$ 是整数；

(2) $(n-1)(r-1)^{-1}$ 是整数。

对 $r=3,4$，这两个条件是充分和必要的(Hanani)。对 $r=6$，除 $S(2,6,21)$ 系不存在外，这些条件是充分的。Wilson[1972] 进一步证明，如果 r 是一个素数幂及 n 充分大，则(1) 和(2) 是充分和必要的。

关于 $S(2,r,n)$ 系的存在性和计数问题可参见 Lindner 和 Rosá[1980]，下面给

出当 r,n 较小时存在 $S(2,r,n)$ 的表：

$S(2,3,7)$	
$S(2,3,9)$	De Pasquale[1899],Brunel[1901],Cole[1913]
$S(2,4,13)$	De pasquale[1899],Brunel[1901],Cole[1913]
$S(2,3,15)$	Cole[1917],White[1919],Fischer[1940]
$S(2,4,16)$	Witt[1938]
$S(2,3,19)$	Deherder[1976]
$S(2,3,21)$	Wilson[1974]
$S(2,5,21)$	Witt[1938]
$S(2,3,25)$	Wilson[1974]
$S(2,4,25)$	Brouwer, Rokowska[1977]
$S(2,5,25)$	McInnes[1977]
$S(2,3,27)$	McInnes[1977]
$S(2,4,28)$	Rokowska[1977]

当 $n=7, r=3$ 或 $n=9, r=3$ 等时，可证明定理 3 中(2) 的上界是最好的。

3　交簇

H 是一个超图，若 H 的边集两两交非空，则称该边集为一个**交簇**。例如，对 H 的一个顶点 x，星 $H(x)=\{E \mid E\in H, x\in E\}$ 是 H 的一个交簇。用 $\Delta_0(H)$ 表示 H 的交簇中的最大基数，则

$$\Delta_0(H) \geqslant \max_{x\in X}|H(x)| = \Delta(H)$$

在一个多重图中，交簇只能是星和三角形（允许三角形含多重边）。

定理 4　H 是无重边的 n 阶超图，则

$$\Delta_0(H) \leqslant 2^{n-1}$$

此外，n 元集合的所有子集构成的超图中，交簇的最大基数是 2^{n-1}。

证　令 $\mathscr{A}$ 是 n 元集 X 的子集构成的超图的最大交簇。

如果 $B_1 \notin \mathscr{A}$，则由 $\mathscr{A}$ 的最大性，存在 $A_1\in\mathscr{A}$ 与 B_1 不相交；因此 $X-B_1\supset A_1$，因而对任给的 $A\in\mathscr{A}$，$(X-B_1)\cap A\neq\varnothing$。再由 $\mathscr{A}$ 的最大性，推出 $(X-B_1)\in\mathscr{A}$。反之，如果 $(X-B_1)\in\mathscr{A}$，就有 $B_1\notin\mathscr{A}$。所以

$$B \to X-B$$

是从 $\mathscr{P}(X)-\mathscr{A}$ 到 $\mathscr{A}$ 的双射，因此

$$|\mathscr{A}| = \frac{1}{2}|\mathscr{P}(X)| = 2^{n-1}$$

引理（Greene, Katona, Kleitman[1976], Bollobás 在此以前已得到）　令 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是一列依序排列在一个圆圈上的点。令 $\mathscr{A}=(A_1, A_2, \cdots, A_m)$ $(A_i\neq\varnothing)$ 是

圈区间簇，满足

(1) $|A_i| \leqslant \frac{n}{2} \quad (i \leqslant m)$

(2) $A_i \cap A_j \neq \varnothing$ （对所有的 i, j）

(3) $A_i \not\subset A_j$ （对所有的 $i, j, i \neq j$）

则有

(4) $m \leqslant \min\limits_i |A_i|$

(5) $\sum\limits_{i=1}^{m} |A_i|^{-1} \leqslant 1$

(5) 中等号成立当且仅当 $\mathscr{A}$ 是基数均为 m 且有公共顶点的圈区间簇。

证 令 A_1 是 $\mathscr{A}$ 中基数最小的子集。由(2)，对 $i \neq 1, A_1 \cap A_i \neq \varnothing$；再由(3)，$A_1 \cap A_i$ 是圈中一个区间，这区间有且仅有一个端点与 A_1 的端点重合。由(3)可推得这些区间 $A_1 \cap A_i$ 互不相同。因此上述形式的区间总数至多是 $2(|A_1| - 1)$。注意到由条件(1)和(2)，当 $i, j \neq 1, i \neq j$ 时，$A_1 \cap A_i$ 和 $A_1 \cap A_j$ 不可能构成 A_1 的剖分。因此上述形式的区间只能出现一半，于是有 $m - 1 \leqslant |A_1| - 1$。故对所有 $i \leqslant m$，$|A_i| \geqslant |A_1| \geqslant m$。从而(4)和(5)成立。

最后，若(5)中等号成立，则

$$1 = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{|A_i|} \leqslant \frac{m}{|A_1|} \leqslant 1$$

故有 $|A_i| = |A_1| = m \ (1 \leqslant i \leqslant m)$。这样 A_i 均为长是 m 的区间，并且这些区间的起点位于该圈中连续的 m 个点。反之，若 A_i 满足(1)，(2)，(3)及每个区间的长为 m，(5)中等号显然成立。

定理 5 (Erdös, Chao-Ko, Rado [1961]，这里证明由 Greene, Katona, Kleitman [1976] 给出) H 是 n 阶简单交超图且秩 $r \leqslant \frac{n}{2}$，则

(1) $\sum\limits_{E \in H} \binom{n-1}{|E|-1}^{-1} \leqslant 1$

(2) $m(H) \leqslant \binom{n-1}{r-1}$

此外，当 H 是 K_n^r 的星时，(2)中等号成立（反过来，则须加条件 $r < \frac{n}{2}$）。

下面简称定理 5 为 EKR 定理。

证 令 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 是 H 的顶点集。π 为 $1, 2, \cdots, n$ 的一个置换，记

$$H_\pi = (E \mid E \in H, E \text{ 是圈序列 } x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \cdots, x_{\pi(n)}, x_{\pi(1)} \text{ 中一个区间})$$

对 $E \in H$，置

$$\beta(E) = |\{\pi \mid E \in H_\pi\}|$$

由引理，可得下面的(3)：

(3) $\sum\limits_{E\in H_\pi}\dfrac{1}{|E|}\leqslant 1$

因此有

(4) $\sum\limits_{E\in H}\dfrac{\beta(E)}{|E|}=\sum\limits_{E\in H}\sum\limits_{\pi|E\in H_\pi}\dfrac{1}{|E|}=\sum\limits_{\pi}\sum\limits_{E\in H_\pi}\dfrac{1}{|E|}\leqslant n!$

令 $E_0\in H$，且 $|E_0|=h$。又令 $x_0\in E_0$。由于 E_0 也是超图 $K_n^h(x_0)=H'$ 中的一条边，对 H' 应用引理，则(3)，(4) 中等号均成立。注意到

$$\frac{\beta(E_0)}{|E_0|}=\frac{1}{m(H')}\sum_{E'\in H'}\frac{\beta(E')}{|E'|}=\frac{n!}{m(H')}=n!\binom{n-1}{|E_0|-1}^{-1}$$

代入(4)，可得

$$\sum_{E\in H}\binom{n-1}{|E|-1}^{-1}=\frac{1}{n!}\sum_{E\in H}\frac{\beta(E)}{|E|}\leqslant\frac{n!}{n!}=1$$

因此，(1) 成立。

最后对任一 $E\in H$ 均满足 $|E|\leqslant r\leqslant\frac{n}{2}$，于是有

$$m(H)\binom{n-1}{r-1}^{-1}\leqslant\sum_{E\in H}\binom{n-1}{|E|-1}^{-1}\leqslant 1$$

故(2) 成立。

定理 5 的各种推广可参见 Schönheim [1968]，Hilton 和 Milner [1967]，Hilton [1979]，Erdös, Chao-Ko, Rado [1961]，Bollobás [1974]，Frankl [1975]，Frankl [1976]。

若对秩不加限制，则用类似的方法可得：

推广定理(Greene, Katona Kleitman[1976])　H 是 n 阶的简单超图，如果 H 是交簇，则

(1) $\sum\limits_{\substack{E\in H\\|E|\leqslant n/2}}\binom{n}{|E|-1}^{-1}+\sum\limits_{\substack{E\in H\\|E|>n/2}}\binom{n}{|E|}^{-1}\leqslant 1$

(2) $m(H)\leqslant\binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]+1}$

此外，当 $H=K_n^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}$ 时，(2) 中等号成立。

注　由定理 5 可得

$$\Delta_0(K_n^r)=\begin{cases}\dbinom{n-1}{r-1} & \text{若 } r\leqslant\dfrac{n}{2}\\[2ex] \dbinom{n}{r} & \text{若 } r>\dfrac{n}{2}\end{cases}$$

更确切地说，r- 一致完全超图 K_n^r 的最大交簇是：当 $r<\frac{n}{2}$ 时为星 $K_n^r(x)$；当 $r=\frac{n}{2}$ 时为最大交簇；当 $r>\frac{n}{2}$ 时为 K_n^r 的整个边集合。

· 当 $r < \frac{n}{2}$ 时，定理 5 的证明蕴含着 K_n^r 的最大交簇是星。

· 当 $r = \frac{n}{2}$ 时，令 H_0 是 K_{2r}^r 的一个最大交簇，若 $E \in H_0$，则 $X - E \notin H_0$。若 $E \notin H_0$，则由于 H_0 的极大性，H_0 中存在一条与 E 不相交的边E_j，这蕴含着 $X - E = E_j \in H_0$，故

$$|H_0| = \frac{1}{2} m(K_{2r}^r)$$

因此所有极大交簇有相同的基数。

定理 6 (Bollobás[1965]) 设 $H = (E_1, E_2, \cdots, E_m, F_1, F_2, \cdots, F_m)$ 是有 n 个顶点 $2m$ 条边的超图，且满足 $E_i \cap F_j = \varnothing$ 当且仅当 $i = j$，则

$$(1) \sum_{j=1}^{m} \binom{|E_j| + |F_j|}{|E_j|}^{-1} \leqslant 1$$

此外，如果整数 r, s 满足 $r + s = n$，且有

$$(E_1, E_2, \cdots, E_m) = K_n^r, \qquad (F_1, F_2, \cdots, F_m) = K_n^s$$

则(1) 式等号成立。

(*) **证** 这里用 Katona 的思路证明这结果。设 X 是H 的顶点集，记

$$Y = \{(S_j, T_j) | (S_j, T_j) \text{是一个有序对}; S_j, T_j \subset X; S_j, T_j \neq \varnothing; S_j \cap T_j = \varnothing\}$$

以 Y 为顶点集构造图G：两顶点(S_i, T_j)和(S_k, T_k)相邻，当且仅当 $S_j \cap T_k = \varnothing$ 或 $S_k \cap T_j = \varnothing$。令 π 是X 上的一个置换，$S \subset X$，用 $\bar{S}$ 表示$\sigma = (\pi(1), \pi(2), \cdots, \pi(n))$ 中包含 S 的最小区间，并令

$$Y(\pi) = \{(S, T) | (S, T) \in Y, \bar{S} \cap \bar{T} = \varnothing, \text{且在 } \sigma \text{ 中} \bar{S} \text{ 前于} \bar{T}\}$$

如果 $Y(\pi)$ 中的两顶点(S_j, T_j)与(S_k, T_k)不相邻，则 $\bar{S}_j \cap \bar{T}_j = \varnothing, \bar{S}_k \cap \bar{T}_k = \varnothing, \bar{S}_j \cap \bar{T}_k \neq \varnothing, \bar{S}_k \cap \bar{T}_j \neq \varnothing$，矛盾，因此 $Y(\pi)$ 是 G 的一个团。

在 Y 上的图 G 中，我们考虑 p 个团 $C_1, C_2, \cdots, C_p$ 和独立集 $S \subset Y$，对 $\{(y, C_i) | y \in C_i, \text{且 } y \in S\}$，用两种不同的方法进行计数：

$$\sum_{y \in S} |\{i | y \in C_i\}| = \sum_{i=1}^{p} |C_i \cap S| \leqslant p$$

由于$\{(E_j, F_j) | j = 1, 2, \cdots, m\}$是$G$ 的独立集，于是有

$$(2) \sum_{j=1}^{n} |\{\pi | (E_j, F_j) \in Y(\pi)\}| \leqslant n!$$

此外，对 X 中两个不相交集合E, F，有

$$|\{\pi | (E, F) \in Y(\pi)\}| = \binom{n}{|E \cup F|} (n - |E \cup F|)! |E|! |F|!$$
$$= n! \binom{|E| + |F|}{|E|}^{-1}$$

由上式及(2) 式，得(1) 式成立。

4　边着色性质和 Chvátal 的猜测

设 $H=(E_1,E_2,\cdots,E_m)$ 是一个超图，用 k 种不同的颜色对 H 的边着色。若任意两条相邻的边都着不同的颜色，则这种着色称为**正常的** k- 边着色。对 H 进行正常边着色所需最少的颜色数称为 H 的**边色数**，记为 $\boldsymbol{q(H)}$。$q(H)$ 是图的边色数的推广。

若 $\Delta_0(H)=k$，则在 k 交簇中至少要用 k 种不同的颜色对这些边着色，因此

$$q(H)\geqslant\Delta_0(H)\geqslant\Delta(H)$$

若 H 满足 $q(H)=\Delta(H)$，就说 H 具有**边着色性质**，即 H 可用 $\Delta(H)$ 种颜色进行正常边着色。

例 1　设 X 是一个会议代表的集合，这些代表每天参加某些会议，第 j 次会议的代表构成 X 的一个子集 E_j。假设每位代表参加其中的 k 次会议，则当且仅当超图 $H=(E_1,E_2,\cdots)$ 有边着色性质（每一种颜色的边可安排为对应一天的会议），才能在 k 天中安排完这些会议。

例 2　**二部图**。设 H 为二部多重图，其顶点集 X 分划为 (X_1,X_2)，使得 H 中每条边 E 均有 $|E\cap X_1|=1$，$|E\cap X_2|=1$。由著名的 König 定理知，H 具有边着色性质。

例 3　**图**。设 G 是一个简单图，用 $\hat{G}$ 表示在 G 中每个顶点加一个环所得到的多重图。由 Vizing 定理 $q(G)\leqslant\Delta(G)+1=\Delta(\hat{G})$，可得 $\hat{G}$ 的正常 $\Delta(\hat{G})$- 边着色，所以 $\hat{G}$ 具有边着色性质。

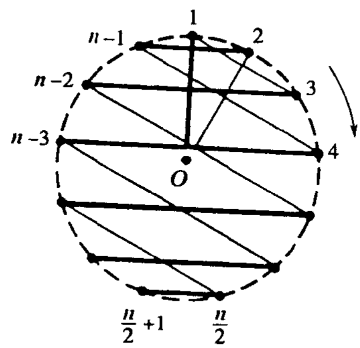


图 3

例 4　**阶为 r 的倍数的 r- 完全超图**。所有 $2p$ 阶完全图 K_{2p} 都有边着色性质，这是由 Lucas[1892] 所解决的一个古老定理。这个问题表述如下：某校有 $2p$ 个女生，每天两人一组出去散步，问是否存在一种散步的配对方案，使得在 $2p-1$ 天中，每个女生恰好与所有的其他女生一起散步一次？每一次这样的散步对应完全图 K_{2p} 的一些同色边集合。把顶点 $1,2,\cdots,n-1=2p-1$ 按图 3 围成一个圈，O 为圆心，第一种颜色的边由图中粗边组成，其余颜色的边由上述这些边绕中心 O 旋转产生。1936 年在柏林 Schur 的学生 R. Peltesohn 提交的学位论文中证明了：某个学校有 $3p$ 个女生，假如每天 3 个一组去散步，使得在 $\binom{3p-1}{2}$ 天中任意 3 个女生恰好在一起散步一次，也就是完全 3-一致超图 K_{3p}^3 具有边着色的性质。

对 $p=3$，上述结果在 40 年前就由 Walecki 所发现。他得到 9 个女生 $P,Q,a,$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com