566 　　　　O13-44
C46

# 高等数学典型题精解

## ——解题思路、方法、技巧


主编：同济大学数学教研室陈兰祥教授

编委：（按姓氏笔画为序）

东 南 大 学　王海燕

同 济 大 学　刘庆生

上海交通大学　李　铮

同 济 大 学　陈兰祥



学苑出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

高等数学典型题精解:解题思路、方法、技巧/陈兰祥主编. —北京:学苑出版社,2000.10

ISBN 7－5077－1779－8

Ⅰ.高…　Ⅱ.陈…　Ⅲ.高等数学－解题　Ⅳ. 013－44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 71399 号

学苑出版社出版发行

北京市万寿路西街 11 号　100036

北京市通县长凌营印刷厂印刷　新华书店经销

850×1168 开本　23.75 印张　594 千字

2001 年 9 月北京第 1 版　2001 年 9 月北京第 1 次印刷

印数:0001－5000 册　定价:22.00 元

# 前言

高等数学课程对于大学生的重要性是不言而喻的，已出版的多种高等数学复习参考书和习题解答曾给予了广大学生众多的帮助。然而，一方面近年来由于教学改革的实施，高等数学授课时间有所减少，受到时间限制，概念的深入探讨，知识点的融会贯通，知识面的拓展势必受到一定影响；另一方面后续课程以及研究生入学考试对高等数学的要求在教学大纲范围内有深化的趋势。如何解决这一新的矛盾，我们根据在同济大学、上海交通大学、东南大学多年的教学实践以及研究生高等数学入学考试辅导的经验，听取了广大学员的意见，决定编写一套把大学期间高等数学的学习与研究生入学考试复习紧密衔接的新的高等数学复习资料，在“恩波二十一世纪考试辅导丛书”编辑部的支持、组织和策划下，这套复习资料终于出版了，如果这套复习资料能对广大读者在高等数学学习和复习过程中达到节约复习时间，加深理解基本概念，拓宽解题思路和提高分析解决问题的能力有所帮助，就是对我们的工作的最大安慰。

本套复习资料由《高等数学复习指南》和《高等数学典型题精解——解题思路、方法、技巧》两本书组成，它们各成体系又紧密联系。

《高等数学复习指南》是与大学生学习同济大学数学教研室编写的《高等数学》教材同步配套的复习参考书，其章节次序、术语、符号均参照该书。

《高等数学复习指南》以讲清讲透基本概念为主线，并介绍与其相关的各种典型例题，并通过综合例题的讲解和综合练习的训练提高学生分析解决问题的能力。

在使用该书时我们有以下建议：

1. 本书“基本概念”以框图形式列出，是全书的精髓，要求逐字逐句深刻理解，并在理解基础上随时都能正确表达。

2. 各章节的“知识网络图”指出了各知识点的有机联系，应该予以充分理解。

3.“概念的内涵，重点和难点”在于帮助学员深入理解基本概念，抓住事物的主要矛盾，理清思路。

4.“典型例题解析”中介绍了与基本概念有关的各种题型。在学习时应带着三个问题去思考：

① 这种题型是怎样提出的？

② 它反映了基本概念的什么内涵？

③ 用什么途径解决的。

5.“综合例题”是涉及多个知识点的题目，在学习时应着重考虑该题目究竟与那些知识点相关连，是如何解决的，这对于基本概念的融会贯通，提高分析问题的能力起到十分重要的作用，其中包括了同济教科书中的大部分难题和部分研究生入学试题。

6.“综合练习”是供学员自我考核的。“参考答案及其提示”应该在独立思考解题以后再予以核对检查。

《高等数学典型题精解——解题思路、方法、技巧》仍按相同的章排列，但“节”的编写有所变动，它是以题型为主线，介绍解决此种题型的各种方法和有关概念的灵活运用。目的在于拓宽解题思路，提高分析解答的能力。

在使用该书时我们有以下建议：

1. 由于本书是以“题型”为主线，涉及的概念包含高等数学教材中各个章节的知识点，应积极探索一个题目的多种解法，它往往使您对各个有关概念的相互关系有更深刻的理解，通过各种解法的比较，掌握如何用最简捷的方法去解决问题。

2. 针对各种题型，本书还介绍了许多新的更简捷的解题方法（在大纲知识点要求范围内）这些内容对提高解题能力十分有帮助

的。

3. 本书中大部分例题都有一定的难度，它包括了大部分历届研究生入学考试试题。“解题思路”和“分析”能帮助您迅速地找到解决问题的关键，应仔细体会并学会这些思维方法。

由于这两本书是同步编写的。两本书的相应章是紧密联系，难度由浅入深。但由于主线不一样，可以帮助学员从不同侧面深入理解基本概念并达到知识点的融会贯通。

两本书可以分别使用。然而同时两本书在手更为有利，对于在学读者来说通过后面一册可及时了解到研究生入学时应达到的要求；而对于报考研究生的学生在复习过程中能随时从前面一册中查找需要的基本概念和基本例题，减少下册中学习的困难。

本套复习资料由同济大学数学系陈兰祥教授主编。负责全书的统一协调、编纂和定稿，由同济大学陈兰祥、刘庆生、上海交通大学李铮、东南大学王海燕共同编写。

其中第一、四、十一章由李铮执笔；第二、三、十二章由陈兰祥执笔，第五、六、十章由王海燕执笔，第七、八、九章由刘庆生执笔。

由于四位同志分别撰写，各自章节安排和风格可能略有不同，虽经协调，存在一定差异仍在所难免。另外由于编者的水平所限，难免有错误与不妥之处。欢迎来信批评指正。

本套复习资料属于恩波二十一世纪考试辅导丛书系列，对于恩波编辑部的大力支持，编者表示衷心的感谢。

编者

# 目　　录

# 第一章　函数与极限

**考研大纲要求**

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示方法.

2. 了解函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性.

3. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.

4. 掌握基本初等函数的性质及其图形.

5. 会建立简单应用问题的函数关系式.

6. 理解极限的概念，理解函数左、右极限的概念，以及极限存在与左、右极限之间的关系.

7. 掌握极限的性质及四则运算法则.

8. 掌握极限存在的两个准则，并会利用它们求极限，掌握利用两个重要极限求极限的方法.

9. 理解无穷小、无穷大的概念，掌握无穷小的比较方法，会用等价无穷小求极限.

10. 理解函数连续性的概念(含左、右连续)，会判别函数间断点的类型.

11. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，了解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理)，并会应用这些性质.

## 第一节　函　数

**题型(一)　求函数的定义域**

**例 1.1**　下列函数的定义域：

(1) $y = \dfrac{1}{\sqrt{2x - x^2}} + \arcsin \dfrac{2x+1}{3}$;

(2) $y = \dfrac{1}{\ln|x-1|}$.

**【解题思路】**　熟记下列简单函数的定义域：

$y=\dfrac{1}{x},x\neq 0;y=\sqrt{x},x\geqslant 0;y=\log_a x,x>0;$

$y=\arcsin x,y=\arccos x,|x|\leqslant 1$

求较复杂函数的定义域，就是求解各个简单函数的定义域所应满足的不等式组的解集.

**解**：(1) $\begin{cases}2x-x^2>0\\ \left|\dfrac{2x+1}{3}\right|\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0<x<2\\ -2\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$

定义域为：$0<x\leqslant 1$ 或$(0,1]$.

(2) $\begin{cases}\ln|x-1|\neq 0\\ |x-1|\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\neq 0,x\neq 2\\ x\neq 1\end{cases}$

定义域为：$x\neq 0,x\neq 1,x\neq 2$，或$(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$.

**例 1.2** 设 $f(x)=e^{x^2},f(\varphi(x))=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$ 的定义域.

(1998 年数学一考研题)

**【解题思路】** 解出 $\varphi(x)$ 然后确定其定义域.

**解**：$f(x)=e^{x^2}$，所以 $f(\varphi(x))=e^{\varphi^2(x)}$

又因为 $f(\varphi(x))=1-x$，所以 $e^{\varphi^2(x)}=1-x$

所以 $\varphi^2(x)=\ln(1-x)$ 由 $\varphi(x)\geqslant 0$ 可得

$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$

因此 $\varphi(x)$ 的定义域为：$\ln(1-x)\geqslant 0$

即 $x\leqslant 0$ 或$(-\infty,0]$.

**例 1.3** 已知 $f(x)=\sin x,f(\varphi(x))=1-x^2$，则 $\varphi(x)=\arcsin(1-x^2)$ 的定义域为________.

(1992 年数学五考研题)

**【解题思路】** 此题由于是填空题，所以已给出了 $\varphi(x)$ 的表达式.

**解**：定义域为 $|1-x^2|\leqslant 1$

即 $0\leqslant x^2\leqslant 2$ 或 $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

**例 1.4** 设 $y=f(x)$ 的定义域为$(0,1]$，$\varphi(x)=1-\ln x$，求复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 的定义域.

**【解题思路】** $y=f(x)$ 的定义域是指 $x$ 的变化范围，$y=f(\varphi(x))$ 的定义域同样也是指 $x$ 的变化范围，已知 $y=f(x)$ 的定义域求 $y=f(\varphi(x))$ 的定义域的一般方法令 $t=\varphi(x)$，解出 $x$ 的变化范围.

**解**:令 $t=\varphi(x)$,由题意知 $f(t)$ 的定义域为 $(0,1]$

即　$0<1-\ln x\leqslant 1$　解得 $1\leqslant x<\mathrm{e}$

所以 $f(\varphi(x))$ 的定义域为 $[1,\mathrm{e})$.

**例 1.5** (选择题)设 $f(x-1)$ 的定义域为 $[0,a](a>0)$,则 $f(x)$ 的定义域为(　　).

(A) $[1,a+1]$　　(B) $[-1,a-1]$

(C) $[a-1,a]$　　(D) $[a,a+1]$

**【解题思路】** 已知 $f(\varphi(x))$ 的定义域求 $f(x)$ 的定义域的一般方法,从 $x$ 的变化范围解出 $t=\varphi(x)$ 的变化范围.

**解**:$f(x-1)$ 的定义域为 $[0,a]$　则 $0\leqslant x\leqslant a$

$t=x-1$　则 $-1\leqslant t\leqslant a-1$

故 $f(x)$ 的定义域为 $[-1,a-1]$ 故选(B).

**【常见错误】** 选(A)原因概念不清,混淆定义域所指 $x$ 的变化范围这一重要概念.

**例 1.6** 设 $f(x)$ 的定义域为 $[-1,1]$,求 $f(x+a)+f(x-a)$ $(a>0)$ 的定义域.

**解**:分别考虑 $f(x+a)$ 和 $f(x-a)$ 的定义域再解联立不等式,由于 $f(x)$ 的定义域为 $[-1,1]$

所以 $-1\leqslant x\leqslant 1$,故由 $-1\leqslant x+a\leqslant 1\Rightarrow -1-a\leqslant x\leqslant 1-a$

由　$-1\leqslant x-a\leqslant 1\Rightarrow a-1\leqslant x\leqslant 1+a$

因此 $\begin{cases}-1-a\leqslant x\leqslant 1-a\\ a-1\leqslant x\leqslant 1+a\end{cases}$

由于 $a>0$　所以　当 $a-1<1-a$　即 $a<1$ 时,定义域为 $[a-1,1-a]$,

当 $a-1>1-a$ 即 $a>1$ 时定义域为空集 $\Phi$,

$a-1=1-a$,即 $a=1$ 时,定义域为 $x=0$.

## 题型(二)　求函数 $f(x)$ 的表达式

**例 1.7** 设 $f(x)$ 满足 $af(x)+bf(\frac{1}{x})=\frac{c}{x}$ ($a,b,c$ 均为常数,且 $|a|\neq|b|$,求:$f(x)$.

**【解题思路】** 函数定义的两个要素:定义域和对应规律,当两个函数定

义域相同、对应规律一致时，这两个函数表示同一个函数．如：$y=f(x)$，$s=f(t)$ 均表示同一函数，这一性质又称为函数表示法的“变量无关性”．

**解**：$af(x)+bf(\frac{1}{x})=\frac{c}{x}$ (1)

取 $x=\frac{1}{t}$，则 $t=\frac{1}{x}$ 故

$af(\frac{1}{t})+bf(t)=ct$

所以 $af(\frac{1}{x})+bf(x)=cx$ (2)

联立(1)、(2) 解得 $f(x)=\frac{1}{a^2-b^2}(\frac{ac}{x}-bcx)$

**例 1.8** 设 $f(x)$ 满足 $2f(x)+f(1-x)=x^2$，求：$f(x)$．

**解**：$\begin{cases}2f(x)+f(1-x)=x^2\\2f(1-x)+f(x)=(1-x)^2\end{cases}$

解得 $f(x)=\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x-1$．

**例 1.9** （选择题）设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\0, & |x|>1\end{cases}$ 则 $f\{f[f(x)]\}$ 等于（　　）．

(A) 0　(B) 1　(C) $\begin{cases}1,|x|\leqslant 1,\\0,|x|>1\end{cases}$　(D) $\begin{cases}0,|x|\leqslant 1,\\1,|x|>x\end{cases}$

（2001 年数学二考研题）

**【解题思路】** 分段函数一般说来不是初等函数，分段函数的讨论是高等数学的重点之一，分段函数的复合函数一般采用分层次讨论的方法．

**解**：$f(f(x))=\begin{cases}1, & 当\ |f(x)|\leqslant 1\\0, & 当\ |f(x)|>1\end{cases}$

而 $|f(x)|\leqslant 1$，　$x\in(-\infty,+\infty)$

$\therefore$ $f(f(x))=1$ 应选 (B)．

**例 1.10** （选择题）设 $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0,\\x+2, & x>0.\end{cases}$

$f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\-x, & x\geqslant 0\end{cases}$ 则 $g(f(x))=$（　　）．

(A) $\begin{cases}2+x^2, & x<0\\2-x, & x\geqslant 0\end{cases}$　　(B) $\begin{cases}2-x^2, & x<0\\2+x, & x\geqslant 0\end{cases}$

(C) $\begin{cases} 2 - x^2, & x < 0 \\ 2 - x, & x \geqslant 0 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} 2 + x^2, & x < 0 \\ 2 + x, & x \geqslant 0 \end{cases}$

（1997 年数学二考研题）

**解**：$g(f(x)) = \begin{cases} 2 - f(x), & f(x) \leqslant 0 \\ f(x) + 2, & f(x) > 0. \end{cases}$

而 $x \geqslant 0, f(x) = -x \leqslant 0$

$x < 0, f(x) = x^2 > 0$

所以 $g(f(x)) = \begin{cases} 2 + x, & x \geqslant 0 \\ x^2 + 2, & x < 0. \end{cases}$

故选(D).

**例 1.11** 设 $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & |x| \leqslant 2 \\ 0, & |x| > 2 \end{cases}$ 求：$f(f(x))$.

**解**：$f(f(x)) = \begin{cases} 4 - f^2(x), & |f(x)| \leqslant 2 \\ 0, & |f(x)| > 2 \end{cases}$

当 $|x| > 2$ 时，$f(x) = 0$. $|f(x)| \leqslant 2$.

当 $|x| \leqslant 2$ 时，$f(x) = 4 - x^2$.

① 由 $|4 - x^2| \leqslant 2$ 可解得 $\sqrt{2} \leqslant |x| \leqslant \sqrt{6}$

$\begin{cases} \sqrt{2} \leqslant |x| \leqslant \sqrt{6} \\ |x| \leqslant 2 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{2} \leqslant |x| \leqslant 2$

② 由 $|4 - x^2| > 2$ 可解得 $|x| < \sqrt{2}$ 或 $|x| > \sqrt{6}$

$\begin{cases} |x| < \sqrt{2} \\ |x| \leqslant 2 \end{cases} \Rightarrow |x| < \sqrt{2}$ 或 $\begin{cases} |x| > \sqrt{6} \\ |x| \leqslant 2 \end{cases}$ 无解.

因此 $f(f(x)) = \begin{cases} 0, & |x| < \sqrt{2} \\ 4 - (4 - x^2)^2, & \sqrt{2} \leqslant |x| \leqslant 2 \\ 4 - 0^2, & |x| > 2. \end{cases}$

**例 1.12** （选择题）设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leqslant 0, \\ x^2 + x, & x > 0. \end{cases}$ 则（ ）.

(A) $f(-x) = \begin{cases} -x^2, & x \leqslant 0, \\ -(x^2 + x), & x > 0 \end{cases}$

(B) $f(-x) = \begin{cases} -(x^2 + x), & x < 0, \\ -x^2, & x \geqslant 0 \end{cases}$

(C) $f(-x)=\begin{cases} x^2, & x\leqslant 0, \\ x^2-x, & x>0 \end{cases}$

(D) $f(-x)=\begin{cases} x^2-x, & x<0, \\ x^2, & x\geqslant 0 \end{cases}$

**解**:$f(-x)=\begin{cases} (-x)^2, & -x\leqslant 0 \\ (-x)^2+(-x), & -x>0 \end{cases}$

$=\begin{cases} x^2, & x\geqslant 0 \\ x^2-x, & x<0 \end{cases}$

故选(D).

**例 1.13** 设$f(x)$对任意非零数$x_1,x_2$有:$f(x_1\cdot x_2)=f(x_1)+f(x_2)$,且$f'(1)=1$.求:$f(x)$.

**【解题思路】** 高等数学的重要研究对象是函数,因此求函数的表示式的内容可以遍及高等数学的各个章节,此例为利用导数定义求$f(x)$.

**解**:当$x\neq 0$时,

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f[x\cdot(1+\frac{\Delta x}{x})]-f(x\cdot 1)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)+f(1+\frac{\Delta x}{x})-f(x)-f(1)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\frac{\Delta x}{x})-f(1)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\frac{f(1+\frac{\Delta x}{x})-f(1)}{\frac{\Delta x}{x}} \\
&= \frac{1}{x}f'(1)=\frac{1}{x}
\end{aligned}
$$

所以 $f(x)=\ln|x|+c$

由于 $f(1)=f(1)+f(1)$

$\therefore\ f(1)=0 \qquad \therefore\ c=0$

故 $f(x)=\ln|x|$.

**例 1.14** 已知$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有定义,$f'(0)$存在,且对任意的$x,y\in(-\infty,+\infty)$,恒有

$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$,求:$f(x)$.

**解**:此题也是利用导数定义求 $f(x)$ 的例子.注意:不能直接对 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$ 两边求导.

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)+f(\Delta x)+2x\Delta x-f(x)-f(0)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}+2x\right)=f'(0)+2x.$$

所以 $f(x)=f'(0)x+x^2+c$

令 $y=0$ 则 $f(x)=f(x)+f(0)+0$ $\therefore f(0)=0$

$\therefore$ $c=0$. 故 $f(x)=f'(0)x+x^2$.

**例 1.15** 设 $f(x)$ 是连续函数,且

$f(x)=\cos^4 x+x\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x$,求:$f(x)$.

**【解题思路】** 利用连续函数必可积,求 $f(x)$ 的关键点是定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x$ 为一常数.

**解**:设 $A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x$

则 $f(x)=\cos^4 x+x\cdot A$

所以 $A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\mathrm{d}x+A\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\mathrm{d}x$

$$=\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}+A\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$$

故 $A=\dfrac{\dfrac{3\pi}{16}}{1-\dfrac{\pi^2}{8}}=\dfrac{3\pi}{2(8-\pi^2)}$

因此 $f(x)=\cos^4 x+\dfrac{3\pi}{2(8-\pi^2)}x$.

**例 1.16** 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可导,$g(x)$ 是 $f(x)$ 的反函数,满足方程:$\int_0^{f(x)}g(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}(x^{\frac{3}{2}}-8)$,求:$f(x)$.

**【解题思路】** 对于积分方程通常通过求导化为微分方程来求解.

**解**:方程两边对 $x$ 求导

$$g(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x} \quad \text{注意 } g(f(x)) = x.$$

$$\therefore \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{所以 } f(x) = \sqrt{x} + c.$$

**例 1.17** 设 $f(x)$ 可导且存在反函数 $g(x)$，$f(0)=0$，且有 $\int_0^{f(x)} g(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{t\cos t}{\sin t + \cos t}\mathrm{d}t$，求：$f(\frac{\pi}{2})$.

**【解题思路】** 一般求函数值 $f(\frac{\pi}{2})$ 总是先求出 $f(x)$ 的表达式，但具体问题要具体分析，由于只要求 $f(\frac{\pi}{2})$，所以，不一定要求 $f(x)$.

**解**：方程两边求导得

$$xf'(x) = \frac{x\cos x}{\sin x + \cos x}$$

$$\text{所以} \quad f'(x) = \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}$$

$$\therefore \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{即} \quad f(\frac{\pi}{2}) - f(0) = \frac{\pi}{4} \quad \therefore f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{4}.$$

**例 1.18** 求连续函数 $f(x)$，使它满足

$\int_0^1 f(tx)\mathrm{d}t = f(x) + x\sin x.$ （1992 年数学五考研题）

**解**：令 $u = tx$，则

$$\int_0^1 f(tx)\mathrm{d}x = \int_0^x f(u)\cdot\frac{\mathrm{d}u}{x} = \frac{1}{x}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$$

$$\therefore \quad \int_0^x f(u)\mathrm{d}u = xf(x) + x^2\sin x$$

$$\therefore \quad f(x) = f(x) + xf'(x) + 2x\sin x + x^2\cos x$$

$$\therefore \quad f'(x) = -2\sin x - x\cos x$$

$$\therefore \quad f(x) = \cos x - x\sin x + c.$$

## 题型(三)　函数的奇偶性

**例 1.19** 判定下列函数的奇偶性：

(1) $y = \ln\frac{x-1}{x+1}$；　　(2) $y = \frac{a^x - 1}{a^x + 1}$ $(a > 1)$；

(3) $y=f'(x)$ 其中 $f(x)$ 为奇函数且可导；

(4) $y=F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 其中 $f(x)$ 为偶函数且连续.

**【解题思路】** 奇偶性的判定一般从 $f(-x)$ 出发

**解**：(1) $f(-x)=\ln\dfrac{-x-1}{-x+1}=\ln\dfrac{x+1}{x-1}=-\ln\dfrac{x-1}{x+1}$

$\therefore$ $f(x)$ 为奇函数.

(2) $f(-x)=\dfrac{a^{-x}-1}{a^{-x}+1}=\dfrac{1-a^x}{1+a^x}=-\dfrac{a^x-1}{a^x+1}=-f(x)$

$\therefore$ $f(x)$ 为奇函数.

(3) 已知 $f(-x)=-f(x)$.

$$f'(-x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-x+\Delta x)-f(-x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{-\Delta x}=f'(x)$$

$\therefore$ $f(x)$ 为偶函数.

(4) 已知 $f(-x)=f(x)$

$$F(-x)=\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t\xlongequal{\text{令 } u=-t}\int_0^x f(-u)(-\mathrm{d}u)$$

$$=-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=-F(x)$$

$\therefore$ $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 为奇函数.

## 题型(四)　函数的有界性

**例 1.20** (选择题) 函数 $f(x)=\dfrac{\lg x}{x}$ 在$[\dfrac{1}{2},1]$上为(　　).

(A) 有上界无下界　　(B) 有下界无上界

(C) 有界且 $2\lg\dfrac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant 0$　　(D) 有界且 $\lg\dfrac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant -\dfrac{1}{4}$

**解**：因为 $f(x)=\dfrac{\lg x}{x}$ 在$[\dfrac{1}{2},1]$上连续

所以　$f(x)$ 在$[\dfrac{1}{2},1]$上必有界

而　$f'(x)=\dfrac{1}{x^2}(\lg e-\lg x)>0$

所以　$f(x)$ 单调增，所以

$$2\lg\frac{1}{2}\leqslant\frac{\lg x}{x}\leqslant 0,$$ 故选(C).

**例 1.21** (选择题)设数列的通项为

$$x_n=\begin{cases}\dfrac{n^2+\sqrt{n}}{n}, & 若 n 为奇数\\ \dfrac{1}{n}, & 若 n 为偶数\end{cases}$$

则当 $n\to+\infty$ 时,$x_n$是(　　).　　　　(1991 年数学五考研题)

(A) 无穷大量　　　　(B) 无穷小量

(C) 无界变量　　　　(D) 有界变量

**【解题思路】** 要正确区分什么是无穷大量,什么是无界变量,无穷大量必为无界变量,而无界变量不一定是无穷大量.

**解**:由于 $|x_{2n}|<1$ 　而 $n\to+\infty, x_{2n+1}\to\infty$

故 　$x_n$ 为无界但非无穷大量. 故选(C).

**例 1.22** (选择题)当 $x\to 0$ 时,变量$\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ 是(　　).

(A) 无穷小量　　　　(B) 无穷大量

(C) 有界、但非无穷小量　　　　(D) 无界但非无穷大量

(1993 年数学三考研题)

**解**:因 $x\to 0$ 时,$\frac{1}{x}\to\infty$,

因为 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi+\pi/2}$ 时 　$\dfrac{1}{x_n^2}\sin\dfrac{1}{x_n}\to\infty$

而 　$x_n=\dfrac{1}{2n\pi}$ 时 　$\dfrac{1}{x_n^2}\sin\dfrac{1}{x_n}\to 0$.

所以 　$\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$ 　无界但非无穷大,故选(D).

## 题型(五)　函数的单调性

**例 1.23** 　验证函数:$y=\sin x$ 在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上单调增加.

**【解题思路】** 证明函数单调的两种常用方法:① 用定义证明,② 利用导数来证明.

**证明**:(证法一) $\forall x_1,x_2\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 　$x_1<x_2$

$$\because\quad \sin x_2-\sin x_1=2\sin\frac{x_2-x_1}{2}\cos\frac{x_1+x_2}{2}$$