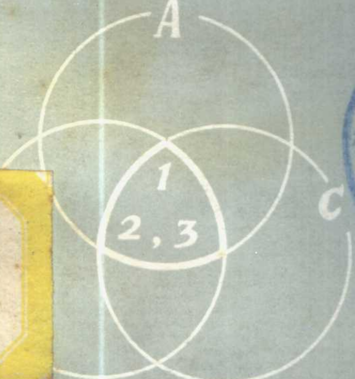
方嘉琳 编著

集合論

JIHELUN



吉林人民出版社

集 合 论

方嘉琳 编著

吉林人民出版社

集 合 论

方嘉琳 编著

*

吉林人民出版社出版 吉林省新华书店发行

长春新华印刷厂印刷

*

787×1092毫米32开本 8½印张 178,000字

1982年4月第1版 1982年4月第1次印刷

印数：1—9,050册

书号：7091·1280 定价：0.72元

序　言

集合论，自从一八九二年著名的德国数学家康托（Georg Cantor 1845—1918）作奠基性工作以来，集合论思想的应用愈来愈广泛。在现代数学各种课题的论述中，集合论语言精确简捷，叙述过程经济，深入问题本质，其观点方法已渗透到所有数学科目，以致在现代数学的发展进程中贡献卓著，现已成为学习现代数学所不可缺少的一个基础数学工具。

近年来，随着科学技术的飞速发展，生产建设的突飞猛进，作为共基础的数学科学的面貌也日新月异，数学教育现代化的呼声日趋高涨。世界上一些国家，诸如美、英、法、日、苏等，对中小学数学教育现代化都进行了一系列探索、研究和试验，尽管效果不一、众说纷纭，但中学数学增加集合、微积分、数理逻辑初步、概率统计等内容，并把这些内容同传统数学有机地结合起来，已成主流。在我国，为适应四个现代化的需要，在中学数学课程中已增添了部分集合内容或渗透了集合思想，这些不仅是完全必要的，也是切实可行的。

本书是介绍集合论的观点、方法的一本入门书，可供中学数学教师自修参考，也可供大学数学系学生选修集合论做为教材。在编写中注意和临近学科的联系，力求通俗、易于理解、便于自学。为了掌握方法，配有大量习题并附题解。

长春市教育学院张善才同志、东北师范大学许凤同志、四平师范学院阎长明同志等曾对本书原稿提出一些宝贵意

见，在此表示感谢。

由于笔者水平所限，本书在体系上、题材处理上、方法选择上，定有不妥之处，望读者批评指正。

编 著 者

一九八〇年八月于四平

目　　录

第一章　集合 …………………………………………………………（ 1 ）
§1. 元素和集合 ………………………………………………（ 1 ）
§2. 包含关系 …………………………………………………（ 10 ）
§3. 集合的并和交 ……………………………………………（ 17 ）
§4. 补集及对称差 ……………………………………………（ 22 ）
§5. 集族 ………………………………………………………（ 29 ）
§6. 直并与直积 ………………………………………………（ 36 ）
§7. 集列的极限 ………………………………………………（ 40 ）
第二章　关系与映射………………………………………………（ 48 ）
§1. 二元关系 …………………………………………………（ 48 ）
§2. 等价关系 …………………………………………………（ 55 ）
§3. 序关系 ……………………………………………………（ 59 ）
§4. 映射 ………………………………………………………（ 65 ）
§5. 满射、单射…………………………………………………（ 73 ）
第三章　基数 ………………………………………………………（ 80 ）
§1. 等势性 ……………………………………………………（ 80 ）
§2. 基数的比较 ………………………………………………（ 83 ）
§3. 可列集 ……………………………………………………（ 87 ）
§4. 连续集 ……………………………………………………（ 91 ）
§5. 不同基数的存在 …………………………………………（ 98 ）
§6. 基数的运算 ………………………………………………（102）
第四章　序数 ………………………………………………………（109）
§1. 序型 ………………………………………………………（109）
§2. 序型的运算 ………………………………………………（115）
§3. 良序集 ……………………………………………………（123）
§4. 序数 ………………………………………………………（129）

§5. 可列超限数 …………………………………………………… (134)
第五章 极大原理 …………………………………………………… (138)
§1. 极大原理 …………………………………………………… (138)
§2. 良序原理与超限归纳法 …………………………………… (142)
§3. 极大原理的应用 …………………………………………… (146)
第六章 格 ……………………………………………………… (152)
§1. 格的各种性质 ……………………………………………… (152)
§2. 完备格 ……………………………………………………… (163)
§3. 模格 ………………………………………………………… (169)
§4. 分配格 ……………………………………………………… (174)
§5. Boole 代数 ………………………………………………… (180)
第七章 代数系 ………………………………………………… (185)
§1. 代数运算 …………………………………………………… (185)
§2. 代数系 ……………………………………………………… (190)
§3. 自由代数系 ………………………………………………… (197)
§4. 范畴 ………………………………………………………… (200)
§5. 函子 ………………………………………………………… (203)

参考文献 ……………………………………………………… (207)
习题解答 ……………………………………………………… (210)
符号索引 ……………………………………………………… (241)
名词索引 ……………………………………………………… (243)

第一章 集　　合 (set)

§1. 元素和集合(elements and sets)

众所周知，数学有两个特点，一是抽象性，一是精确性。而数学概念的抽象总是由低级到高级、由特殊到一般地发展着。最原始的数学概念是数和几何图形，以后发展为函数、变换、对应、复数、微分、矩阵、泛函、环、域，以至无穷维空间、范畴、函子、层……。现在早已抽象到如此高度，初看起来它们似乎和实际失去了一切联系，只是感到莫明其妙、难于理解。但其实它们却都有着丰富的、十分现实的实际意义。正因它有高度的抽象性，才得以广泛的应用。

在抽象概念的描述和逻辑推理的过程中，数学的精确性自然要求运用准确的专门术语和记号，似是而非、含混其词的现象是绝对不能容许的。对于希望掌握现代数学的学者来说，必须熟练地准确地掌握这些专门术语和记号。为此，我们将严谨地定义每个新概念，仔细地说明每个新记号。读者一定要十分小心地运用这些概念和记号，千万不要发生任何丝毫的含混。尤其集合论的观点和方法，早已成为由具体到抽象的有力工具之一，它是现代数学各个分支的基础，更应十分熟练。

集合的概念是数学的一个基本概念，很难用更简单的概念来给它下定义，只能给予一种描述。关于集合的描述是多种多样的，诸如：

“凡说到集指的就是某些对象的汇集。”（*Н. А. Фролов: Теория функций действительного переменного*, 1953. 中译本：*Н. А.* 福罗洛夫：《实变函数论》）。

“凡是具有某种特殊性质的东西的全体即称之为集。”（*И. П. Натансон: Теория функций вещественной переменной*. 1950. 中译本，*И. П.* 那汤松：《实变函数论》）。

“所谓集合乃是可以互相区别的事物的汇集”，（河田敬义：《集合·位相·测度》，1957·中译本：《集合·拓扑·测度》）

“若干个（有限或无限多个）固定事物的全体叫做一个集合”。（张禾瑞著：《近世代数基础》，1978年修订本）。

“某些指定的‘东西’集在一起就成为集合”。（欧阳光中编《集合和映射》，1978）。

看一些参考书会发现集合的概念各有不同的描述。由于描述方式不同，对于集合可以有不同的理解。显然这是不能容许的。关于什么是集合，必须有一个确切的不容模糊的描述。例如

“相当大的数的全体”

是不是集合呢？“相当大的数”虽然也是一种特殊性质，但它是不确定的。所谓相当大的数是大到什么程度呢？是无法断定的，界限是不清的。一万是否在这个集合里？一亿是否在这个集合里？都无从得知。因此它不能做为我们讨论的对象——集合。同样的

“充分接近于某点 p 的点全体”

也是不确定的。接近到什么程度才算是充分接近是无法判定的。可见，关于集合的描述只强调特殊性是不够的，必须注意“确定”二字。任何事物对于一个集合来说，或者是该集

合的事物，或者不是，二者恰有一个成立。由该集合的性质完全确定，决不容许有界限不清、无法判断的现象。

“当a，b为实数，不等式$ax>b$的实数解全体”这个性质是确定的性质，当然它是一个集合。而

“$ax>i$的解全体”

是否是集合呢？这不能是集合。因为复数是不能比较大小的，$ax>i$并不能刻划一种性质，这个不等式本身是没有意义的，无法判定一个数是否满足这个关系。因而也不能是集合。

关于集合的描述还要注意事物的区别性，否则在讨论集合的基数以及集合的并集时将产生混乱。为此，我们给予集合的描述是：

“凡是具有某种性质的、确定的、有区别的事物的全体就是一个集合(set)或简称为集”。

集合的概念在数学中是到处可见的。如

“自然数的全体”。

“平面上过某点的一切直线”。

“某几何图形上的点全体”。

“平面上和已知点的距离为定长的点的轨迹”。

“方程$ax^2+bx+c=0$的根的全体”。

“区间（a，b）内点的全体”。

“以11为模剩余为7的自然数全体”。

“从七个事物中每次取二个的组合全体。”

“n维$Euclid$空间中线性变换的全体”。

“〔0，1〕上连续实值函数的全体”。

“1的n次根的全体”。

“某批产品中次品的全体”。

“某项随机试验所有可能的结果”。

“实数域上$m \times n$矩阵的全体”。

“实数收敛序列的全体”。

在各个学科中都可以举出大量的集合的例子。

“设n为自然数，在n^2与$(n+1)^2$之间没有质数的n的全体”是否是集合呢？尽管这个问题直到现在还没有解决，但它是集合。完全符合集合概念的要求。只是人们的科学水平的限制，到现在还不认识集合中有哪些元素而已。

“长春市十年来平均气温的全体”

根据气象台的记载，这显然是一个集合，而

“长春市年平均气温的全体”

是否是集合呢？是集合。所有可能成为年平均气温的数都属于这个集合，而不是有记录记载的那些数据。因为明年年平均气温是多少，在记录上未必查得到。在数理统计中常遇到这类集合。

由于构成集合的事物可以是任何事物，以致集合的观点可以广泛地应用到各个学科中去。研究集合时，不考虑构成集合的事物的特殊性质，而仅仅研究集合本身的一般性质的数学分支称为**集合论**（*set theory*）。

类（*class*），**族**（*family*），**丛**（*collection*），**汇集**（*aggregate*）等都是集合的同义语。

设A是集，a是一个事物。若a是A的一个事物，则称a为A的**元素**（*element*）或a**属于**（*belong*）A，或者A**含有**（*contain*）a。

一般地，我们用大写字母A，B，C，M，N，X，Y，……表示集合；而用小写字母a，b，c，m，n，x，y，……表示元素。A的元素也称为A的**点**（*point*）或A的**元**（*mem-*

ber)。

元素和集合间的属于关系常应用$G.Peano$记号表示，a属于A记作

$$a\in A \qquad \text{或} A\ni a.$$

若a不是A的元素，则称为a不属于A，或A不含有a，记作

$$a\overline{\in} A,\ a\notin A \qquad \text{或} A\not\ni a。$$

若集合A含有四个点a，b，c，d，则写做

$$A=\{a,\ b,\ c,\ d\}。$$

$\{a\}$与a的含义是不同的，a是一个元素，而$\{a\}$是由a一个元素组成的集合。

还应注意$\{a,\ a,\ a\}$是否是三个元素a的集合呢？不是，它只有一个元素a，只能记做$\{a\}$，不能表示为$\{a,\ a,\ a\}$，否则在讨论集合的运算时，将发生混乱。

当集合A的元素可以全部列出时，则可将它全部列出，用花括号括起来表示这个集合。如记作

$$A=\{a_1,\ a_2,\cdots\cdots,a_n\}.$$

这类集只含有有限个元素，称之为有限集($finite\ set$)。

当集合含有无限多个元素时，不可能将它全部排列出来，为了表示这种集合，常在符号上明确表示出元素的特性，而以

$$\{x:x\text{具有性质}P\}$$

或

$$\{x\mid x\text{具有性质}P\}$$

表示具有性质P的事物的全体。如集合

$$\{x:x>0\}$$

表示正数集；集合

$$\{x \mid a \leqslant x < b,\ a, b\text{为实数}\}$$

表示区间 $[a, b)$；集合

$$\{x:\ x \in [a, b] \text{ 且 } f(x) \geqslant g(x)\}$$

表示在区间$[a, b]$中，满足$f(x) \geqslant g(x)$的点全体；集合

$$\{(x, y):\ x^2 + y^2 = 1,\ x, y\text{为实数}\}$$

表示平面上的单位圆周；集合

$$\{(x, y, z):\ x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1,\ x, y, z\text{为实数}\}$$

表示三维空间中的单位球体；集合

$$\{x:\ x = 11n + 7,\ n = 0, 1, 2, \cdots\cdots\}$$

表示以11为模、剩余为7的自然数集。

上述这些集合都不是有限集,称为无限集(*infinite set*)。但这个记号也适用于有限集。如

$$\{x_i:\ i = 1, 2\}$$

表示 $\{x_1, x_2\}$。

再举些较为复杂的例子：

例 1：在三维空间中，集合

$B(P, \alpha) = \{(x, y, z):\ P = (a, b, c),\ \alpha$为正实数，$\sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2} \leqslant \alpha\}$

表示以P点为球心，以α为半径的球体。集合

$$\{B(P, \alpha):\ \alpha\text{为某正实数},\ P\text{为三维空间的任一点}\}$$

表示三维空间中，所有以α为半径的球为元素的集合。而集合

$$\{B(P, \alpha):\ P\text{为三维空间的定点},\ \alpha\text{为任意正实数}\}$$

表示三维空间中，所有以P点为心的球为元素的集合。

例 2：设P为取定的自然数，集合

$$A_K^{(p)} = \{x:\ x = np + k,\ o \leqslant k < p,\ n\text{ 为任意非负整数}\}$$

为以P为模、剩余为k的自然数集。而集合

$$\{A_K^{(p)}:\ k=0,\ 1,\cdots\cdots,\ p-1\}$$

为以P为模的剩余类集。这个集合的元素不是数而是数集。这样的以集合为元素的集合常称为集族(*family of sets*)，它本身也是集合。

例 3：集合

$$\{(x,\ y,\ z):x^2+y^2=z^2,\ x,\ y,\ z\text{为自然数}\}$$

表示满足不定方程

$$x^2+y^2=z^2$$

的自然数解，通常叫做勾股数。如(3，4，5)，(5，12，13)，(7，24，25)，(8，15，17)，(20，21，29)都属于这个集合。但想将这个集合的所有元素全部列出来是不可能的。而集合

$$\{(x,\ y,\ z):\ x^n+y^n=z^n,\ x,\ y,\ z\ \text{为自然数}\}$$

表示满足不定方程

$$x^n+y^n=z^n$$

的自然数解。当$n=4k$时，这个方程没有解，故这个集合不含有元素。而对任意自然数n，这个方程是否有解，对于$n>7000$至今还不了解。*Fermat*曾经猜测这种方程当$n>2$时没有自然数解，人们将此猜测称为**Fermat 大定理**。集合

$$\{n:\ x^n+y^n=z^n\text{有自然数解}\}$$

表示使不定方程$x^n+y^n=z^n$有自然数解的n的集合。能否说这个集合只含有1和2呢？不能。因*Fermat*猜测还没能证明，没有证明的猜测是不能做为论证问题的依据的。那么它是否是集合呢？它是集合，完全符合集合的要求。不过这个集合含有哪些数还不能回答。

最后，应当指出集合的概念本身是蕴含着矛盾的。如第三章§6一切基数的集合以及第四章§4一切序数的集合都是

不可想像的。今再举一个例子。集合

$$Q=\{x: x\notin x\}。$$

是 *Russell*（1872—1970）举出的例子，这个有名的例子称为 Russell 悖理。他把所有集合分为两类，如果集合A是A的一个元素，即 $A\in A$，称A为第一类的集合，否则称为第二类的集合。则Q为所有第二类的集合所组成的集合。那么，Q是第一类集合还是第二类集合？

如果Q是第一类的集合，即 $Q\in Q$。但因Q的任何元素x，都具有性质$x\notin x$，故必有$Q\notin Q$即产生矛盾，故Q不能是第一类的集合。

如果Q是第二类的集合，即$Q\notin Q$。由Q的做法知，Q应该是Q的元素。即$Q\in Q$，矛盾。故Q不能是第二类的集合。

这个反例说明集合概念本身是蕴含矛盾的。

集合论作为纯粹数学的一个分支，已有一百多年的历史。首先由德国数学家 *G. Cantor* 在19世纪末导入集合的概念。之后，集合的观点和方法迅速地渗透到数学的所有分支，而改变了数学的面貌。对现代数学的发展，起着巨大的作用。集合的概念在数学的任何部门中都是最重要的基础。因此 *Russell* 悖理在数学界引起了极大的反响，从而诞生了数学基础论。为了避开悖理而建立了所谓公理集合论。本书不做进一步的介绍，只须注意我们思考的对象都是事前完全确定的范畴之内的事物，不能虚幻渺茫，漫无边际，否则将陷入矛盾百出的境地。

总之，我们讨论的集合是朴素意义下的集合，为了避开悖理而要加以限制，即在确定的范围内展开讨论。这个范围通常称为全域（*universe*）。

习　　题

1．试用集合的记号表示下列各集合：

a．偶数集。

b．以７除余５的自然数集。

c．在a_1，a_2，……，a_n中每次取两个构成的集合。

d．不等式$ax+b>0$的解集。

e．正切为１的角集。

f．实二阶非蜕化矩阵集。

g．比１大，比20小被３整除的整数全体的集合。

2．判定下列各事物的全体是否是集合：

a．$\{x: x+2>x$，x为实数$\}$。

b．$\{x: |x-a|$为充分小数，a为实常数，x为实数$\}$。

c．$\{x: x>n$，n为任意自然数，x为实数$\}$。

d．$\{x: \sin x=0$，x为实数$\}$。

e．$\{a, b, c, a\}$。

f．$\{x: x^n=a\}$。

3．说明下列各集合的意义：

a．$\{x: f(x)\geqslant g(x), h(x)=0\}$。

b．$\{(x, y): x+y=1$，x，y均为非负实数$\}$。

c．$\{x: x=a\}$。

d．$\{x: x=a$或$x=b\}$。

e．$\{x: x\neq x\}$。

f．$\{(x, y): (x-a)^2+(y-b)^2=1, x-y=a-b\}$。

g．$\{x: x\backsim s$，s为某平面图形$\}$。

h．$\{x_i: i=1, 2, \cdots\cdots, n\}$。

i．$\{(x_i, y_j): i=1, 2, 3, j=1, 2\}$。

j．$\{x_i: i=1, 2, \cdots\cdots\}$。

k．$\{x: x|a$，a为某自然数，x为自然数$\}$。

l. 设N为自然数集，$\{n: n\in N, 7\backslash n\}$。

m. $[x]$表示不超过 x(实数)的最大整数，$\{x: x\in R, [x]=8\}$。

4. 试区别下列二集：

a. $F_1=\{f(x)$: 当$a<x<b$时，有$|f(x)|<K$。K为常数$\}$。

b. $F_2=\{f(x)$: 存在正整数K，当$a<x<b$时，$|f(x)|<K\}$。

5. 试表出下列各种实数序列的集合：

a. 有界数列全体组成的集合。

b. 收敛数列全体组成的集合。

c. 平方和收敛的数列全体组成的集合。

d. 绝对值级数是收敛的数列全体组成的集合。

6. 在确定的平面上，用集合表示下列各种图形的全体：

a. 平行四边形。

b. 正三角形。

c. 菱形。

7. 以 (x, y) 表示平面上点的坐标，试用图形表示下列各点集：

a. $\{(x, y): 2x-y<1\}$。

b. $\{(x, y): x+y>0, x-y>0\}$。

c. $\{(x, y): x^2+(y-1)^2=1\}$。

d. $\{(x, y): (x-1)^2+(y-2)^2\leqslant 1, y>x\}$。

§ 2. 包含关系(relation of inclusion)

先介绍一些在我们叙述中常用的一些术语。

“当且仅当”表示在这个时候而且仅在这个时候；

“要充条件”表示必要和充分条件；

设α，β 为两个数学命题，则下述的各种说法是等价的，即那些叙述中的任意两个都恰有相同的意义：