高等学校试用教材

数学分析

（下册）

陕西师范大学出版社

高等学校试用教材

数学分析

下册

朱永庚 申启阳 戴文惠 李志毅 曹怀信 合编

陕西师范大学出版社

数 学 分 析

下 册

朱永庚 申启阳
戴文惠 李志毅 曹怀信 合编

*

陕西师范大学出版社出版
（西安市陕西师大120信箱）
陕西省新华书店经销 西安电子科技大学印刷厂印刷

*

开本 850×1168 1/32 印张 13.875 插页 2 字数 316 千
1989 年 6 月第 1 版 1989 年 6 月第 1 次印刷
印数：1—2000

ISBN7-5613-0231-2

G·213 定价：2.80元

前　言

众所周知，数学分析在整个数学中占重要地位，而在大学数学系的教学中则起着举足轻重的奠基作用。目前正在进行的教学改革是一项涉及面很广的复杂工作，而教材改革无疑是其中重要的一环。由此促使我们编写了这本教材，以便更好地进行一些改革试验，探索提高这门课程教学质量的规律。

本书在编写中注意渗透一些现代数学的观点与方法，如介绍并运用了映射、邻域的概念，引入了存在量词 $\exists$ 与全称量词 $\forall$，并用来表示一些基本概念，命题及其对立(否定)命题。

在内容方面竭力贯彻少而精的原则。这一方面考虑到当今整个数学的发展中除去连续数学之外，离散数学亦日益显现其重要性；另一方面数学分析本身也需要不断地更新内容。我们参照1980年高校理科数学教材编审委员会审订的高师《数学分析教学大纲》，较同类教材减少了一定的篇幅，同时增加了向量值函数的微分学。

对于定理的证明，力求博采众书之长，使思路清晰、叙述简明。例如一致连续性定理、可积性定理、隐函数存在定理和重积分的变量代换定理等都着意进行了考虑，尽量使之易为学生所接受。

实数理论概要作为中学数学教师是应该了解的，而上、下极限在一些后继课程中要用到，故作为附录Ⅰ、Ⅱ列于书后，以备查阅。

书中配备的习题大多为基本的且读者有可能在课后独立完成的。个别题有一定的难度，需要在教师的提示或指导下方能完成。书末附有部分习题的答案以供参考。

本教材是为高师数学系本科生编写的，也可作数学系本科函授教材。带*号部分的内容和习题可作为选用，适当删减部分内容(如可积性理论、隐函数存在定理等)亦可作高等师专教材，还可供高校理工科有关专业作教学参考用书。

本书分上、下两册，各部分编写分工如下：一元微分学及附录Ⅱ朱永庚、一元积分学及级数申启阳，多元微分学及隐函数论戴文惠，广义积分及多元积分学李志毅，附录Ⅰ由山西大学师范学院王永明副教授和山西师大数学系副系主任李少琪编写。编写中相互多次交换审阅了初稿和修改稿，最后曾怀信同志通读了全稿，提出了许多修改意见。

本书是在陕西师大数学系原系主任叶彦润教授的直接指导下，原函数论教研室主任王幼鹏副教授倡导下编写的。数学系、校成人教育学院的领导对于编写和试用工作都给予了大力支持。路干亭教授、常心怡副教授和李文同志为提高书稿的质量付出了辛勤的劳动。在此我们一并致谢。

由于时间仓促，加之编者水平有限，错误与疏漏之处在所难免，恳请读者批评指正。

编 者

1989年2月于陕西师大

内 容 简 介

本书分上、下两册出版，下册包括数项级数、函数级数、幂级数、付里叶级数、多元函数的极限与连续、多元函数微分学、隐函数定理、广义积分、含参量积分、重积分、曲线积分与曲面积分等。

本书为高师数学系本科教材，也可作数学系本科函授教材，适当删减部分内容还可作高师师专教材，亦可供高校理工科有关专业作教学参考用书。

目　　录

第十一章 数项级数

前面，以极限概念为基础，建立了丰富的一元微积分理论。就最简单的数列极限而论，乃是用无穷多个数去“逼近”一个定数——极限值。在进一步的研究中，还要求我们利用极限概念，将有限个数相加的加法运算，推广为无穷个数“相加”。正是在突破“有限”这一限制的过程中，产生了研究函数的强有力的新工具——无穷级数。它不仅可以用来研究初等函数，还可以表示一些非初等函数，更便于近似计算。因此，在理论和应用学科中都占有不可或缺的重要位置。

§1 基本概念

一、级数及其敛散性的定义

简单地说，无穷个数“相加”就是无穷级数。比如，将下面两列数 1，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{4^2}$，…，$\frac{1}{4^{n-1}}$，…；1，2，…，n，…之各项分别“相加”得

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{4^{n-1}}+\cdots,$$

$$1+2+3+\cdots+n+\cdots,$$

就是无穷级数的例子。但是，它们的“和”又是什么呢？我们还是用有限来逼近无限。因此考虑两项，三项以致 n 项的和，再让 n 无限增大，求其极限。象第一式的前 n 项和为 $\frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)$，

当 $n\to\infty$ 时极限为$\frac{4}{3}$。显然，我们可以称它为该式的和。而第二式的前 n 项和为$\frac{n(n+1)}{2}$，当 $n\to\infty$ 时发散到∞，于是，可以说它没有和。

一般地，设$\{a_n\}$为一数列，则称表达式

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots \tag{1}$$

为数项级数(无穷级数)，简称级数，缩写为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$或$\sum\limits_{1}^{\infty}a_n$，在不会引起混淆时，简记为$\sum a_n$。其中 a_n 称为级数(1)的通项，称$S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=a_1+a_2+\cdots+a_n$为级数(1)的前 n 项和或部分和(是 n 的函数，即数列)。

11.1 定义　如果级数(1)的部分和数列$\{S_n\}$收敛，极限为S，则称级数(1)收敛，和为S，或称它收敛于S，记为$\sum\limits_{1}^{\infty}a_n=S$。并称 $R_n=S-S_n=\sum\limits_{1}^{\infty}a_n-\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots$为级数(1)的(第 n)余和或余级数。显然，$\lim\limits_{n\to\infty}R_n=\lim\limits_{n\to\infty}(S-S_n)=0$。若部分和数列$\{S_n\}$发散，则称级数(1)发散。此时，它没有和也没有余和。

级数的收敛性或发散性统称为敛散性。

根据 11.1 定义，前面提到的级数$1+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{4^{n-1}}+\cdots$收敛于$\frac{4}{3}$，而 $1+2+\cdots+n+\cdots$是发散的。又由于它的部分和$S_n=\frac{n(n+1)}{2}\to\infty(n\to\infty)$，故有时也称该级数发散到$\infty$。

下面再用定义检验一些级数的敛散性。

例 1.　考察等比(几何)级数

$$\sum_{0}^{\infty} ar^{n} = a + ar + \cdots + ar^{n-1} + \cdots \qquad (2)$$

$(a \neq 0)$的敛散性。

解 由前 n 项和 $S_n = a + ar + \cdots + ar^{n-1} = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ ($r \neq 1$) 可知，$|r|<1$时 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-r}$；$|r|>1$时 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$；$r=1$ 时级数(2)为 $a+a+\cdots+a+\cdots$，部分和 $S_n = na \to \infty (n\to\infty)$；$r=-1$ 时，级数(2)为 $a-a+a-a+\cdots+(-1)^{n-1}a+\cdots$，部分和 $S_n = \dfrac{a}{2}(1-(-1)^n)$ 为发散数列。

综上所述可知，等比级数(2)当公比的绝对值$|r|<1$ 时收敛，和为$\dfrac{a}{1-r}$；$|r| \geqslant 1$ 时发散。特别，级数$\sum(-1)^{n-1}$发散。

例 2 讨论级数

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$$

的敛散性。

解 求 n 项和，$S_n = \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \left(1-\dfrac{1}{2}\right) + \left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right) = 1 - \dfrac{1}{n+1}$. 于是 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right) = 1$。可见所给级数收敛，和为1。

例 3 讨论级数$\sum\limits_{1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \cdots$的敛散性。

解 由于前 n 项和 $S_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} = n\cdot\dfrac{1}{\sqrt{n}} \to \infty (n\to\infty)$。所以，该级数发散(到$\infty$)。

无穷级数与数列有着密切的关系。从 11.1定义看到，给定级数$\sum a_n$，可以得到一个部分和数列$\{S_n\}$。反之，给定一个数列$\{S_n\}$，可以作出一个级数$\sum a_n$，使它的前 n 项和恰是 S_n。为此，只需令 $a_1=S_1$，$a_n=S_n-S_{n-1}$($n=2$，3，…)就行了。

二、级数收敛的必要条件

11.2 定理 设级数$\sum\limits_{1}^{\infty}a_n$收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$。即级数收敛的必要条件是，当 $n\to\infty$ 时通项a_n趋于 0。

证 因为 $a_n=S_n-S_{n-1}$，又已知级数收敛，故有

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}S_{n-1}=\sum\limits_{1}^{\infty}a_n$。所以，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}S_n-\lim\limits_{n\to\infty}S_{n-1}$ $=0$。■

尚须注意，通项趋于 0 是级数收敛的必要条件，但不是充分条件(即通项趋于 0 不足以保证级数收敛)。如前面的例 3，虽有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$，但级数$\sum\frac{1}{\sqrt{n}}$发散。

由 11.2 定理可知，若级数的通项不趋于 0，级数必发散。这是判断级数发散的一个简便方法。

例 4 判定级数$\sum\frac{n^2-5}{(n+1)(2n+1)}$的敛散性。

解 由于$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-5}{(n+1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\neq 0$，所以，此级数发散。

类似地，不难看出$\sum n\sin\frac{\pi}{n}$、$\sum\frac{3+(-2)^n}{2^n}$不满足收敛的必要条件，都是发散级数。

习 题 11.1

1. 写出下列级数的通项并求 n 项和:

(1) $1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots$;

(2) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 9}+\cdots$;

(3) $\frac{2}{1}+\frac{2}{7}+\frac{2}{49}+\frac{2}{343}+\cdots$;

(4) $\frac{3-1}{2}+\frac{3+1}{4}+\frac{3-1}{8}+\frac{3+1}{16}+\cdots$.

2. 判定下列级数的敛散性;并求出收敛级数的和:

(1) $\sum\limits_{1}^{\infty}\frac{n-a}{n+a}$ (a 不为负整数);

(2) $\sum\limits_{1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$; (3) $\sum\limits_{1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{2}$;

(4) $\sum\limits_{1}^{\infty}\frac{1}{4}[1-(-1)^n(2n+1)]$; (5) $\sum\limits_{1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$;

(6) $\sum\limits_{1}^{\infty}\frac{a}{(1+a^2)^n}$ (a 为任何实数);

(7) $\sum\limits_{1}^{\infty}\frac{(\ln n)^2}{(\ln 2)^n}$; (8) $\sum\limits_{0}^{\infty}e^{-na}$ ($a>0$).

3. 将循环小数 $0.\dot{8}$ 表为无穷级数,并证明它收敛于 $\frac{8}{9}$.

4. 设 $a_1=3$, $a_{n+1}=3(a_1+\cdots+a_n)$ ($n=1, 2, \cdots$), 问级数 (1) $\sum\limits_{1}^{\infty}a_n$, (2) $\sum\limits_{1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 是否收敛? 若收敛试求其和.