教育部高职高专规划教材

高等数学与工程数学

阎章杭　刘青桂　张卫华　主编

化学工业出版社
教材出版中心

教育部高职高专规划教材

高等数学与工程数学

阎章杭　刘青桂　张卫华　主编

化学工业出版社
教材出版中心
·北　京·

(京)新登字039号

图书在版编目(CIP)数据

高等数学与工程数学/阎章杭,刘青桂,张卫华主编.
北京:化学工业出版社,2003.6
教育部高职高专规划教材
ISBN 7-5025-4458-5

Ⅰ.高… Ⅱ.①阎…②刘…③张… Ⅲ.①高等
数学-高等学校:技术学院-教材 ②工程数学-高等学
校:技术学院-教材 Ⅳ.O1

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第034306号

教育部高职高专规划教材
高等数学与工程数学
阎章杭 刘青桂 张卫华 主编
责任编辑:高 钰
文字编辑:刘志茹
责任校对:李 林
封面设计:郑小红
*
化学工业出版社
教材出版中心 出版发行
(北京市朝阳区惠新里3号 邮政编码100029)
发行电话:(010)64982530
http://www.cip.com.cn
*
新华书店北京发行所经销
化学工业出版社印刷厂印刷
三河市前程装订厂装订
开本787毫米×1092毫米 1/16 印张26 字数720千字
2003年7月第1版 2003年7月北京第1次印刷
ISBN 7-5025-4458-5/G·1193
定 价:38.00元

内 容 提 要

本书融高等数学与工程数学为一体．全书分预备知识、一元函数微积分、多元函数微积分、概率与数理统计基础、线性代数初步、无穷级数、常微分方程与拉普拉斯变换等七篇共十五章．其内容涵盖了高职高专院校各工程类专业所必需的数学知识以及如何利用这些知识解决实际问题的方法．另外，本书还以数学实验的形式，增设了利用数学软件解决实际计算的内容，以供有条件的院校选学．

该教材突破传统教材体系，精选内容，主次分明，删减枝节，注重使用，讲究实效．

本教材可根据工程类不同专业，不同的学生类别选学不同的内容，供选学的面宽．

所选的例题和习题均以帮助学生理解概念掌握方法为目的，删除单纯性技巧和难度较大的习题，增加富有启发性，应用性，为工程类专业服务的题目．

在出版该教材同时，还编写并出版了与该教材配套的教材《高等数学与工程数学习题课指导》，内容包括每章小结、常见问题分类及解法，习题答案及典型习题解答、自我测验等．

本书可作为高职高专院校，成人高校和本科院校开办的二级院校工科各专业的数学教材，同时对经管类各专业以及工程技术人员也有较高的参考价价值．

出版说明

高职高专教材建设工作是整个高职高专教学工作中的重要组成部分。改革开放以来，在各级教育行政部门、有关学校和出版社的共同努力下，各地先后出版了一些高职高专教育教材。但从整体上看，具有高职高专教育特色的教材极其匮乏，不少院校尚在借用本科或中专教材，教材建设落后于高职高专教育的发展需要。为此，1999年教育部组织制定了《高职高专教育专门课课程基本要求》（以下简称《基本要求》）和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》（以下简称《培养规格》），通过推荐、招标及遴选，组织了一批学术水平高、教学经验丰富、实践能力强的教师，成立了“教育部高职高专规划教材”编写队伍，并在有关出版社的积极配合下，推出一批“教育部高职高专规划教材”。

“教育部高职高专规划教材”计划出版500种，用5年左右时间完成。这500种教材中，专门课（专业基础课、专业理论与专业能力课）教材将占很高的比例。专门课教材建设在很大程度上影响着高职高专教学质量。专门课教材是按照《培养规格》的要求，在对有关专业的人才培养模式和教学内容体系改革进行充分调查研究和论证的基础上，充分吸取高职、高专和成人高等学校在探索培养技术应用性专门人才方面取得的成功经验和教学成果编写而成的。这套教材充分体现了高等职业教育的应用特色和能力本位，调整了新世纪人才必须具备的文化基础和技术基础，突出了人才的创新素质和创新能力的培养。在有关课程开发委员会组织下，专门课教材建设得到了举办高职高专教育的广大院校的积极支持。我们计划先用2～3年的时间，在继承原有高职高专和成人高等学校教材建设成果的基础上，充分汲取近几年来各类学校在探索培养技术应用性专门人才方面取得的成功经验，解决新形势下高职高专教育教材的有无问题；然后再用2～3年的时间，在《新世纪高职高专教育人才培养模式和教学内容体系改革与建设项目计划》立项研究的基础上，通过研究、改革和建设，推出一大批教育部高职高专规划教材，从而形成优化配套的高职高专教育教材体系。

本套教材适用于各级各类举办高职高专教育的院校使用。希望各用书学校积极选用这批经过系统论证、严格审查、正式出版的规划教材，并组织本校教师以对事业的责任感对教材教学开展研究工作，不断推动规划教材建设工作的发展与提高。

教育部高等教育司

2001年4月3日

前　言

当前，我国高职高专教育成为社会关注的热点，面临大好的发展机遇.同时，国家的经济、科技和社会发展也对高职高专教育人才的培养提出了更高要求.根据教育部关于加强高职高专人才培养工作的意见："课程和教学体系的改革是高职高专教育教材建设规划的重点和难点，要切实做好高职高专教育教材的建设规划，加强文字教材、实物教材、电子网络教材的建设和发行工作".在教育部高职高专规划教材专家组关怀和指导下，开封大学、河南大学、洛阳大学、包头职业技术学院、石家庄职业技术学院、漯河职业技术学院、南阳理工学院、商丘职业技术学院、徐州建筑职业技术学院、天津渤海职业技术学院、石家庄铁路职业技术学院、无锡职业技术学院、河北科技大学理学院、合肥学院、厦门鹭江职业大学、三门峡职业技术学院等院校的优秀教师和专家，经过长时间的酝酿和研究，编写了一套面向21世纪比较符合当前高职高专院校，特别是高等职业院校工程类专业教学实际的数学教材《高等数学与工程数学》和配套的习题课指导教材.

主教材《高等数学与工程数学》内容包括：一元函数微积分、多元函数微积分、概率与数理统计基础、线性代数初步、无穷级数、常微分方程与拉普拉斯变换.

配套教材《高等数学与工程数学习题课指导》，其内容包括：每章内容小结、常见问题的分类及解题方法、典型习题解答与提示、自我测验、往届试卷等.

该教材所用的学时数约为110～140学时左右，比较贴近各高职高专校工程类专业的教学实际.

在该教材的编写中，我们以国家教育部关于三年制高职高专教育的教学大纲为重要依据来组织教学内容的编写，同时又进一步结合当前高等职业教育发展趋势及学校自身的状况，力争使教材更具有科学性、基础性和使用性.

在编写《高等数学与工程数学》的过程中，编者充分的吸收了当前我国现有的高职高专工程类数学教材的长处，密切结合当前高职高专教学改革的实际，努力编出具有自身特色的高水平的高职高专教材.

1.依据《高职高专数学课程的基本要求》内容，该教材满足了高职高专工程类各专业对数学课程的要求.

2."努力贯彻、拓宽基础、强化能力、立足应用"的原则，结合高职高专教学特点，淡化数学理论.对一些较繁琐的定理、公式及明显的结论，或者只给出结果，或者以几何直观予以说明.

3.所选的例题和习题均以帮助学生理解概念，掌握方法为目的，删掉单纯性的技巧和难度较大的习题，增加富有启发性、应用性、为工程类专业服务的题目.

4.本教材能够注意根据高职高专工程类各专业的特点，设定多种教学内容的模块，可供工程类所有不同专业，不同的学生类别选学不同的模块内容，供选学的面宽，而所有模块的内容均比较精炼，因而所用的学时数少，在内容的编排上能够突破传统教材体系，"精选内容、主次分明、删减枝节、注重使用、讲究实效"，其采取的主要措施如下.

(1) 考虑到高职学生、成教学生基础知识相当薄弱，本教材专门增设第一篇预备知识：

初等数学提要及重要公式，为后续高等数学的学习打下较好的基础.

(2) 在除第一篇外的每篇的篇头，都有一个短小精致的“引子”，用于激发学生学习有关数学知识的兴趣. 另外，针对学生容易出现的问题，本书还刻意用冠以符号$\boxed{?}$，$\boxed{!}$提出思考问题或指出问题的原因，帮助学生正确理解有关知识，提高学习效果.

(3) 考虑到在学时上，各个学校有差异，不同的专业有差异，故增大了选修的内容，以满足不同学校，不同专业的需求.

(4) 为使该教材更具有使用性和前瞻性，并考虑到计算机已经越来越普及，以及 Mathematica 软件广泛的使用，本书以数学实验的形式，将 Mathematic 软件的应用穿插到有关的章节中去，以供有条件的学校选学.

该书由阎章杭总策划，负责组织实施. 该套书的副主编为崔树祥、杨建法、哈斯、王灵色。其中本册书主编为阎章杭、刘青桂、张卫华.

参加每一篇编审人员有（按章节顺序排列）

第一篇（与第二篇）　杨保成　李媛媛　拜云胜　郭建萍　韩成标　祁建华　吴素敏　王灵色　杨建法

第三篇　牛　铭　崔树祥　刘青桂　张卫华　辛自立

第四篇　李希洛　白景华　庞进生　阎章杭

第五篇　刘青桂　路世英　辛自立　黄士林

第六篇　白水周　哈　斯

第七篇　拜云胜　白水周　胡艳玲　杜跃鹏

在本书编写过程中，曾得到有关学校的领导、系部领导和有关专家大力支持和帮助，杜跃鹏和杨菲老师积极参与了利用 Mathematica 软件进行数学实验内容的编写和审核，河南大学的教授、专家阎育华、王国胜曾对本书的应用数学部分进行了认真的审核，并提出了许多宝贵的意见，在此一并表示衷心的谢意！

由于我们水平有限，错误和不足之处在所难免，恳请广大读者批评指正.

《高等数学与工程数学》教材编委会

2003 年 3 月

目　　录

第一篇　预备知识

第二篇　一元函数微积分学

第三篇　多元函数微积分基础

第四篇　概率论与数理统计基础

第五篇　线性代数初步

第六篇　无穷级数初步

第七篇　常微分方程与拉普拉斯变换

注明：* 为选学内容

第一篇　预备知识

第一章　初等数学提要及重要公式

第一节　初 等 代 数

一、实数

人类对数的认识来源于实践，最早认识的数是自然数．自然数是数东西时“实物个数”的表示．从 0 开始，依次为 1，2，3，…，n，…，其中 n 表示任意一个自然数．后来记账中又引入了负整数；分数概念产生的也很早；像$\sqrt{2}$这样的无理数的出现，曾引发了数学史上的第一次危机．这种关于数概念的逐步延伸拓展，一方面是出于实践的需要，另一方面也完善了数的理论．在高等数学这门课程中，我们主要限制在实数范围内讨论问题．

实数由有理数和无理数组成，有理数包括整数和分数．如果用十进位小数来表示，则有理数包括有限小数和无限循环小数；无理数是指无限不循环小数，如$\sqrt{2}$，π 等．实数按照以下方法分类，形成实数系表如下．

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数}\\\text{负整数}\\\text{零}\end{cases}\\\text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\\text{负分数}\end{cases}\end{cases}\\\text{无理数}\begin{cases}\text{正无理数}\\\text{负无理数}\end{cases}\end{cases}$$

实数有加、减、乘、除、乘方、开方等运算，其中加法和减法、乘法与除法、乘方与开方互为逆运算．实数运算符合以下规则：

（1）交换律　　$a+b=b+a$

$ab=ba$

（2）结合律　　$(a+b)+c=a+(b+c)$

$(ab)c=a(bc)$

（3）分配律　　$a(b+c)=ab+ac$

如果引入数轴的概念，则实数还可用数轴上的点表示：

我们把规定了原点、正方向和长度单位的直线称为**数轴**，如图 1-1 所示．

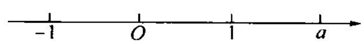

图 1-1　数轴

任意给定一个实数 a，按照下列规则在数轴上表示 a 的点：如果 a 是正数，则这点在数轴的正方向上，它与原点 O 的距离为 a；如果 a 是负数，则这点在数轴的负方向上，它与原点 O 的距离为 $-a$. 这样，就可以建立起实数的全体和数轴之间的一一对应关系. 基于这种一一对应关系，可以把实数 a 和数轴上与之对应的点 a 不加区别地看待.

二、乘法公式及分解因式

由实数概念及运算性质很容易得到下面常用的公式.

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab;$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3;$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b);$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2);$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})\text{（}n\text{ 为正整数）}$$

还可以利用以上公式来分解因式，如 x^3+8y^3 很容易利用公式分解为 $(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)$.

三、一元二次方程

含有一个未知数，且未知数最高次数为二次的方程，叫做一元二次方程. 如 $x^2+2x+3=0$、$x^2=2x$ 等都是一元二次方程.

一元二次方程均可化为 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）的形式. 称 $ax^2+bx+c=0$ 为一元二次方程的一般形式.

若把方程的两个根设为 x_1 和 x_2，则一元二次方程有求根公式为

$$x_{1,2} = (-b \pm \sqrt{b^2-4ac})/2a$$

根与系数之间关系有

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},\quad x_1x_2 = \frac{c}{a}$$

且有下列判别式，$\Delta = b^2-4ac$，如 $b^2-4ac>0$，方程有两个不等实根；$b^2-4ac=0$，有两个相等实根；$b^2-4ac<0$，有两个共轭复根（?试写出这对共轭复根）.

例 1 已知方程两根之和为 5，两根之积为 3. 求两根的平方和.

解 设 x_1，x_2 为方程两根. 则有 $x_1+x_2=5$，$x_1x_2=3$，所以

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = 5^2 - 2\times3 = 19$$

四、不等式

1. 基本性质

如果 $a>b$，则 $a\pm c>b\pm c$；

如果 $a>b$，$c>0$，则 $ac>bc$；

如果 $a>b$，$c<0$，则 $ac<bc$；

如果 $a>b>0$，$n\in\mathbf{N}$ 则 $a^n>b^n$，$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$.

2. 重要不等式

设以下各量均取正值，则必有$\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$，$\dfrac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$.

一般地$\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdot\cdots\cdot a_n}$（$n\in\mathbf{N}$）即算术平均值不小于几何平均值.

3. 绝对值不等式

绝对值定义

$$|a|=\begin{cases}a, & a\geqslant 0\\ -a, & a<0\end{cases}$$（☐注意绝对值几何解释！）

$|a+b|\leqslant|a|+|b|$；　　$|a-b|\leqslant|a|+|b|$；

$|a-b|\geqslant\big||a|-|b|\big|$；　　$-|a|\leqslant a\leqslant|a|$；

$\sqrt{a^2}=|a|$；　　$|ab|=|a||b|$；

$\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$　$(b\neq 0)$；　　$|-a|=|a|$；

$|a|<b(b>0)\Leftrightarrow -b<a<b$，$|a|>b(b>0)\Leftrightarrow a<-b$ 或 $a>b$.

例 2　求解 $|2x-3|<7$.

解　因为 $|2x-3|<7$　所以 $-7<2x-3<7$，所以得 $-2<x<5$.

五、指数与对数

1. 指数

正整数指数幂　$a^n=\underbrace{aaa\cdots a}_{n\text{个}}$（$n\in\mathbf{N}$，$n>1$）；$a^1=a$；

零指数幂　$a^0=1$（$a\neq 0$）；

负指数幂　$a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$（$a\neq 0$，$n\in\mathbf{N}$）；

有理数指数幂　$a^{\frac{n}{m}}=\sqrt[m]{a^n}$，（$a\geqslant 0$，$m$，$n\in\mathbf{N}$，$m>1$）.

幂指数的运算法则有　$a^\alpha a^\beta=a^{\alpha+\beta}$，（$a>0$，$\alpha$，$\beta\in\mathbf{R}$）；$(a^\alpha)^\beta=a^{\alpha\beta}$，（$a>0$，$\alpha$，$\beta\in\mathbf{R}$）；$(ab)^\alpha=a^\alpha b^\alpha$（$a>0$，$\alpha\in\mathbf{R}$）.

2. 对数

如果 $a^b=N$（$a>0$，$a\neq 1$），那么 b 叫做以 a 为底 N 的**对数**，记作 $\log_a N=b$，其中 a 叫做**底数**，N 叫做**真数**.（☐对数的定义来源于指数.）

对数的性质：

① 零和负数没有对数；　　② 底的对数等于 1，即 $\log_a a=1$；

③ 1 的对数等于 0，即 $\log_a 1=0$；　　④ $a^{\log_a N}=N$，$\log_a a^b=b$.

运算规则：

$\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$　$(M>0,\ N>0)$；$\log_a\dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$　$(M>0,\ N>0)$；

$\log_a M^n=n\log_a M$　$(M>0)$；$\log_a\sqrt[n]{M}=\dfrac{1}{n}\log_a M$　$(M>0)$；

换底公式:

$$\log_a N=\frac{\log_b N}{\log_b a}\quad (N>0, b>0 \text{ 且 } b\neq 1)$$

常用对数：以 10 为底的对数叫做**常用对数**，$\log_{10}N$ 通常又记作 $\lg N$.

自然对数：以 e 为底的对数叫做**自然对数**，$\log_e N$ 通常又记为 $\ln N$. 其中数 e 为一无理数，$e=2.718281828459045\cdots$.

例 3 求 $\log_8 9\times\log_{27}32$ 的值.

解 $\log_8 9\times\log_{27}32=\frac{\lg 9}{\lg 8}\times\frac{\lg 32}{\lg 27}=\frac{2\lg 3}{3\lg 2}\times\frac{5\lg 2}{3\lg 3}=\frac{2}{3}\times\frac{5}{3}=\frac{10}{9}$

例 4 求证 $\log_x y\log_y z=\log_x z$.

证 把 $\log_y z$ 化成以 x 为底的对数，则

$$\log_x y\log_y z=\log_x y\times\frac{\log_x z}{\log_x y}=\log_x z.$$

例 5 若 $2<\log_n 47<3$，求正整数 n.

解 当 $n\neq 1$ 时，因为 $\log_n n=1$，所以 $2\log_n n<\log_n 47<3\log_n n$，$\log_n n^2<\log_n 47<\log_n n^3$，所以 $n^2<47<n^3$，故整数 n 应取为 4，5，6.

六、集合初步

1. 集合的基本概念

(1) 集合　把一些确定的对象看成一个整体，就形成了一个**集合**. 一般用大写字母 A，B，C 等来表示.

(2) 元素　集合里的各个对象叫做集合的**元素**. 一般用小写字母 a，b，c 等表示. $a\in A$ 表示 a 是集合 A 的元素，读作"a 属于 A"；$a\notin A$ 读作"a 不属于 A"，表示 a 不是集合 A 的元素.

(3) 空集　不含任何元素的集合叫做**空集**，记作 $\varnothing$.（? $0\in\varnothing$ 吗?）

(4) 常见的数集

自然数集：全体自然数的集合，通常记作 $\mathbf{N}$；（! 注意 $0\in\mathbf{N}$.）

整数集：全体整数的集合，通常记作 $\mathbf{Z}$；

有理数集：全体有理数的集合，通常记作 $\mathbf{Q}$；

实数集：全体实数的集合，通常记作 $\mathbf{R}$；

复数集：全体复数的集合，通常记作 $\mathbf{C}$.

2. 集合的表示法

(1) 列举法　把集合中的元素一一列举出来，写在大括号内，如 $\{a, b, c\}$.

(2) 描述法　把集合中元素的共同性质用式子或语言描述出来，写在大括号内，如

$$\{x\mid x^2-5x+6=0\}, \{\text{长方形}\}, \{\text{三角形}\}\text{等}.$$

有时也用图形表示集合.

3. 集合与集合的关系

(1) 子集　对于两个集合 A 与 B，如果集合 B 的任何一个元素都是集合 A 的元素，那么集合 B 叫做集合 A 的**子集**，记作：$B\subseteq A$ 或 $A\supseteq B$，读作"B 含于 A"或"A 包含 B"，

易见 $A \subseteq A$，$\varnothing \subseteq A$.

如果集合 B 是集合 A 的子集，并且 A 中至少有一个元素不属于 B，那么集合 B 叫做集合 A 的**真子集**，记作 $B \subset A$ 或 $A \supset B$. 如图 1-2 所示.

(2) 集合相等　对于两个集合 A 与 B，如果 $A \subseteq B$，同时 $B \subseteq A$ 那么称集合 A 与集合 B **相等**，记作 $A = B$.

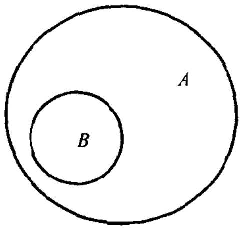

图 1-2　$B \subset A$ 示意

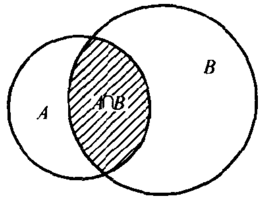

图 1-3　$A \cap B$ 示意

(3) 交集　由集合 A 与集合 B 的所有公共元素组成的集合，叫做 A 与 B 的**交集**，记作 $A \cap B$，如图 1-3 所示，$A \cap A = A$，$A \cap \varnothing = \varnothing$.

(4) 并集　把集合 A 与 B 的所有元素并在一起所组成的集合，叫做 A 与 B 的**并集**，记作 $A \cup B$. 如图 1-4 所示，易见 $A \cup A = A$，$A \cup \varnothing = A$.

(5) 全集与补集　在研究集合与集合之间的关系时，这些集合常常是某一个给定集合的子集，这个给定的集合叫做**全集**，用符号 Ω 表示；已知全集 Ω，集合 $A \subseteq \Omega$，由 Ω 中所有不属于 A 的元素所组成的集合，叫做集合 A 在全集 Ω 中的**补集**，记作 $\bar{A}$. 如图 1-5 所示，$A \cap \bar{A} = \varnothing$，$A \cup \bar{A} = \Omega$.

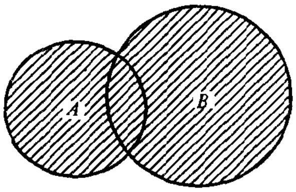

图 1-4　$A \cup B$ 示意

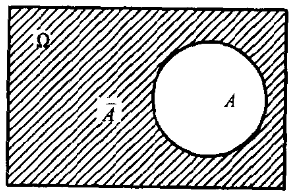

图 1-5　$\bar{A}$ 示意

在研究实数集时，常用到区间的概念.

设 a，b 是两个实数，且 $a < b$. 把满足 $a \leqslant x \leqslant b$ 的实数 x 的集合叫做**闭区间**，表示为 $[a, b]$；把满足 $a < x < b$ 的实数 x 的集合叫做**开区间**，表示为 (a, b)；把满足 $a \leqslant x < b$，$a < x \leqslant b$ 的实数 x 的都叫做**半开半闭区间**，分别表示为 $[a, b)$，$(a, b]$. 这里的实数 a 与 b 都叫区间的端点.

实数集 $\mathbf{R}$ 也可以用区间表示为 $(-\infty, +\infty)$，"∞"读作"无穷大"，"$-\infty$"读作"负无穷大"，"$+\infty$"读作"正无穷大". 我们还把满足 $x \geqslant a$，$x > a$，$x \leqslant b$，$x < b$ 的实数 x 的集合分别表示为 $[a, +\infty)$，$(a, +\infty)$，$(-\infty, b]$，$(-\infty, b)$.

例 6　用适当的符号 ($\in$，$\notin$，$=$，$\subset$，$\supset$) 填空.

(1) 1 __ $\mathbf{N}$;　(2) 0 __ $\varnothing$;　(3) $\{0\}$ __ $\varnothing$.

(4) $\mathbf{R}$ __ $\mathbf{N}$;　(5) 0 __ $\{0\}$;　(6) $\{1, 2\}$ __ $\{2, 1\}$.

解　(1) $1 \in \mathbf{N}$;　(2) $0 \notin \varnothing$;　(3) $\{0\} \supset \varnothing$

(4) $\mathbf{R} \supset \mathbf{N}$;　(5) $0 \in \{0\}$;　(6) $\{1, 2\} = \{2, 1\}$.

例 7　设$A=\{(x,\ y)\mid 2x-3y=1\}$，$B=\{(x,\ y)\mid x+y=3\}$，求 $A\cap B$.

解　$A\cap B=\{(x,y)\mid 2x-3y=1\}\cap\{(x,y)\mid x+y=3\}$

$=\{(x,y)\mid 2x-3y=1$ 并且 $x+y=3\}$

$=\{(x,y)\mid x=2,y=1\}=\{(2,1)\}$

本节关键词

实数　乘法公式　不等式　指数　对数　集合

第二节　常用的初等几何公式

(1) 三角形面积 $S=\frac{1}{2}ab\sin c$.

特别情况：若 $c=\frac{\pi}{2}$，即直角三角形面积 $S=\frac{1}{2}ab$.

(2) 梯形面积 $S=\frac{1}{2}(a+b)h$，其中 a、b 为上下底，高为 h.

(3) 圆周长 $l=2\pi r$，圆弧长 $l=\theta r$；

圆面积 $S=\pi r^2$；圆扇形面积 $S=\frac{1}{2}r^2\theta$，其中 r 为圆半径，θ 为圆心角，以弧度计.

(4) 圆柱体体积 $V=\pi r^2h$，侧面积 $S=2\pi rh$，全面积 $S=2\pi r(h+r)$，其中 r 为圆柱底面半径，h 为圆柱的高.

(5) 圆锥体体积 $V=\frac{1}{3}\pi r^2h$，侧面积 $S=\pi rl$，其中 r 为圆锥底面半径，l 为母线的长.

(6) 球体积 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$，表面积 $S=4\pi r^2$.

本节关键词

面积　体积

第三节　三角函数

一、角的度量

(1) 角度制　圆周角的$\frac{1}{360}$叫做 **1 度的角**，记作 1°，用度作量角的单位.

(2) 弧度制　等于半径长的圆弧所对的圆心角叫做 **1 弧度的角**，用弧度作度量角的单位.（!弧度制是用实数表角度.）角度与弧度的换算：

$$360^\circ=2\pi\text{ 弧度},\ 180^\circ=\pi\text{ 弧度};$$

$$1^\circ=\frac{\pi}{180}\text{弧度}\approx0.017453\text{ 弧度},$$

$$1\text{ 弧度}=\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ\approx57^\circ17'44.8''.$$

二、任意角的三角函数

设 α 为一个任意角，角 α 的终边上任一点 P 的坐标为 (x, y)，它与原点的距离为 r（图 1-6），那么角 α 的六种三角函数定义如下：

正弦函数　$\sin\alpha=\dfrac{y}{r}$，**余弦函数**　$\cos\alpha=\dfrac{x}{r}$；

正切函数　$\tan\alpha=\dfrac{y}{x}$，**余切函数**　$\cot\alpha=\dfrac{x}{y}$；

正割函数　$\sec\alpha=\dfrac{r}{x}$，**余割函数**　$\csc\alpha=\dfrac{r}{y}$.

特殊角的三角函数值见表 1-1.

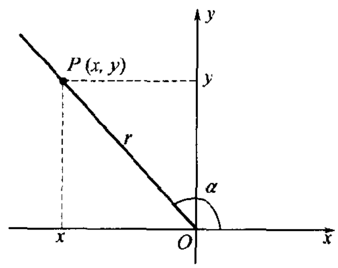

图 1-6　三角函数定义示意

表 1-1　特殊角三角函数值

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	不存在	0
$\cot\alpha$	不存在	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	不存在	0	不存在

三、同角三角函数的基本关系（表 1-2）

表 1-2　同角三角函数关系

倒 数 关 系	商 的 关 系	平 方 关 系
$\sin\alpha\csc\alpha=1$ $\cos\alpha\sec\alpha=1$ $\tan\alpha\cot\alpha=1$	$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$	$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ $1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$ $1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha$

四、三角函数式的恒等变换（表 1-3）

表 1-3　三角函数式的恒等变换

加法定理	$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$ $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$ $\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$	半角公式	$\cos\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$ $\tan\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$
倍角公式	$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ $\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$ $\tan2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$	积化和差公式	$\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$ $\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$ $\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$ $\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$
半角公式	$\sin\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$		

续表

和差化积公式	$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$	万能公式	$\sin\alpha=\dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$ $\cos\alpha=\dfrac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$ $\tan\alpha=\dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$

三角形内的边角关系：

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R \qquad \text{（正弦定理）}$$

$$\left.\begin{aligned}a^2&=b^2+c^2-2bc\cos A\\ b^2&=c^2+a^2-2ca\cos B\\ c^2&=a^2+b^2-2ab\cos C\end{aligned}\right\} \qquad \text{（余弦定理）}$$

其中 a、b、c 分别是角 A、B、C 所对的边，R 为三角形 ABC 的外接圆的半径.

五、三角函数的图像及性质

正弦函数、余弦函数[图 1-7(a),(b)]；正切函数、余切函数的图像见图 1-8(a),(b).

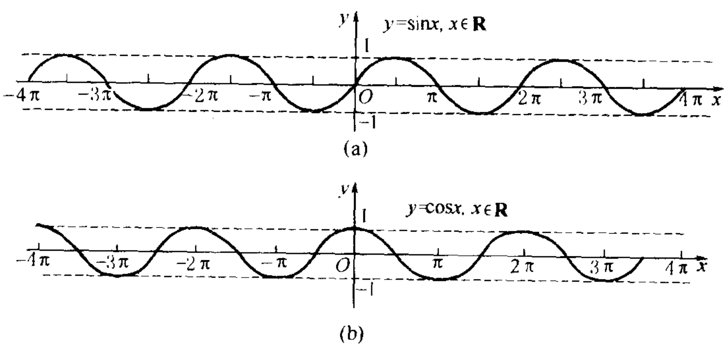

图 1-7　正弦函数与余弦函数

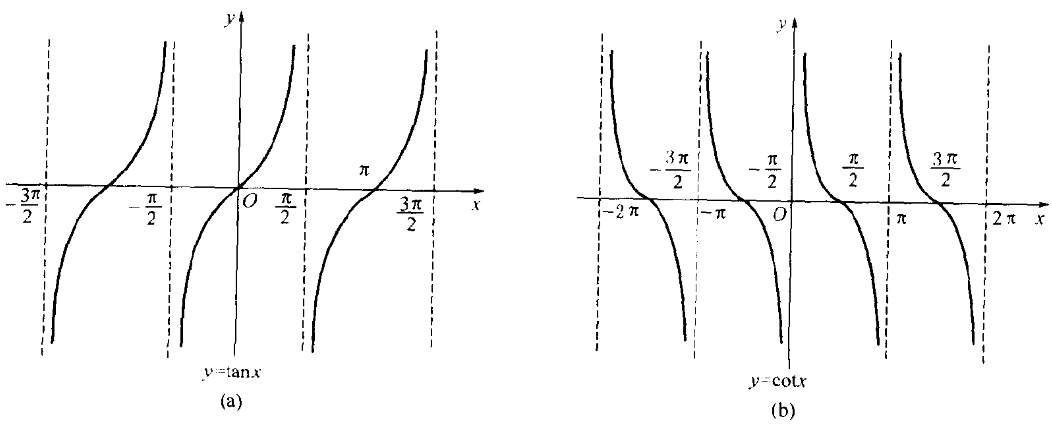

图 1-8　正切函数与余切函数