罗巴切夫斯基几何浅说

陆欽軾編著

江苏人民出版社

~~罗巴切夫~~斯基几何淺説

陆 欽 軾 編 著

江 苏 人 民 出 版 社

• 內容提要 •

罗巴切夫斯基几何是一种非欧几里得几何。本書先介紹这种几何发現的經过，然后用中学生所熟悉的証题方法，來証明它的若干基本命題，并且叙述它的主要內容。可供高中学生、中学数学教师閱讀，也可作为高等学校数学系“几何基础”課程的参考書。

罗巴切夫斯基几何淺說

陆欽軾編著

*

江苏省书刊出版营业許可証出〇〇一号
江苏人民出版社出版
南京湖南路十一号
新华书店江苏分店发行　江苏新华印刷厂印刷

*

开本 850×1168 耗1/32 印張 6 5/16 插 1 字数 161,000
一九五八年三月第一版
一九五八年三月南京第一次印刷
印數 1—6,000

罗巴切夫斯基(1792–1856)

Н. И. Лобачевский

序

罗巴切夫斯基几何是一种非欧几里得几何，是高等学校“几何基础”課程的主要內容之一。本書編写的目的是使更多的人們，尤其是一部分中学数学教师、高等学校某些理工科的学生以及中学高年級的学生，也能够获得这种几何的初步知識，所以本書在編写的方式上尽量使用初等几何的綜合形式。同时，为了使师范学院数学系的师生在使用苏联科士青(В. И. Костин)的著作“几何学基础”时可在这里找到一些資料起見，本書在編排的內容上尽量依照該書的体系，并且精簡了某些难懂的部分，而增添了一些在整个系統上必需补充的資料。这样做，或許能够滿足各方面讀者的要求。

第一章的內容是根据作者于1956年春季的兩次講稿改写的。这兩次講話：一次是在江苏省苏州高級中学“苏中青年数学家协会”上，另一次是在江苏师范学院附屬工农速成中学数学教研組会議上。主要是說明一个中心問題：罗巴切夫斯基几何有着必然发現的原因以及必然发現的时期，并且指出有关的历史人物对此所起的重大作用。

第二章在叙述了希尔伯特的公理系統后，接着邏輯地导出罗巴切夫斯基几何与欧几里得几何所共有的許多定理。使讀者通过具体內容的深入学习，認識到这兩种几何究竟有着哪些共同的性質，并且体会到邏輯地建立几何学，这是可能的。

第三章在引进罗巴切夫斯基的平行公理之后，專門討論了罗巴切夫斯基几何所独有的性質。为了照顧各方面讀者的不同水平，我們把它的三角和分析部分一并略去了。关于罗巴切夫斯基几何的实用价值及現实空間是否罗巴切夫斯基空間等等，这些都是讀

者在閱讀中必然提出的問題。我們在第三章的結尾里作了必要的叙述。

江苏师范学院数学系蔡介福教授曾經看过第一章的原有講稿，提出了宝貴的意見；江苏师范学院本年度数学系四年級同学們对于某些定理提供了簡捷的証法。我在这里向他們致以深切的謝意。

陆欽軾

1957年3月28日于苏州

目　录

序

第一章　罗巴切夫斯基几何的发现……………………………………1

第二章　罗巴切夫斯基几何的基础……………………………………17

結合公理 I_{1-10} 及其定理……………………………………18

順序公理 II_{1-4} 及其定理……………………………………23

(1)共綫点的順序定理……………………………………24

(2)共面点的配置定理……………………………………35

(3)共面綫的順序定理……………………………………43

(4)空間里点的配置定理……………………………………47

运动公理 III_{1-10} 及其定理……………………………………49

(1)图形的运动……………………………………52

(2)綫段的比較及角的比較……………………………………55

(3)全等的三角形……………………………………63

(4)鄰补角和对頂角　直角、銳角和鈍角……………………………………64

(5)綫段的中点及角的平分綫……………………………………68

(6)三角形外角的定理及其推論……………………………………71

(7)全等的直角三角形……………………………………73

(8)薩开里四角形的性質及其推論……………………………………74

(9)空間的一些定理……………………………………77

連續公理IV及其定理……………………………………88

(1)綫段的測量……………………………………90

(2)角的測量……………………………………100

(3)直綫交圓圓交圓……………………………………………… 101
(4)薩开里和勒戎得耳的角和定理……………………………… 104

罗巴切夫斯基平行公理 ……………………………………… 109

第三章 罗巴切夫斯基几何的主要內容 ………………………… 110

(1)平行綫的定义…………………………………………………… 110
(2)平行綫的性質…………………………………………………… 114
(3)分界直綫………………………………………………………… 121
(4)罗巴切夫斯基函数……………………………………………… 125
(5)关于角和的定理………………………………………………… 129
(6)平面上二綫的位置……………………………………………… 131
(7)三角形的面积…………………………………………………… 144
(8)空間的一些定理………………………………………………… 151
(9)等距綫和极限綫………………………………………………… 162
(10)球面和等距面…………………………………………………… 174
(11)极限面…………………………………………………………… 177
(12)极限面与平面之間的映象……………………………………… 183
(13)罗巴切夫斯基三角法…………………………………………… 185
(14)微小区域里的罗巴切夫斯基几何……………………………… 188
(15)罗巴切夫斯基几何的相容性…………………………………… 191
(16)罗巴切夫斯基几何与現实空間………………………………… 193

第一章　罗巴切夫斯基几何的发現

罗巴切夫斯基（Николай Иванович Лобачевский，1792—1856，俄人）发現非欧几里得几何，当初也象已往的数学家一样，他想解决一个历史性的問題：欧几里得(E'νkλεί δηs，公元前約330—275年，希臘人）“几何原本”的第5公設❶是否可从其他命題引証出来的。要是可能的話，应該把它改做定理而不該象欧几里得一样把它当做公設看待。为了要使讀者了解这个历史性的問題，我們先从欧几里得几何的起源談起。

我們知道，几何学起源于古埃及的测地术。埃及尼罗河的定期氾濫，使两岸田地肥沃得很。古埃及人利用这个优越的自然条件，在那里耕种生活。可是，尼罗河的氾濫却冲毁了疆界阡陌，使古埃及人每年不得不把土地重新丈量一下，因而逐漸建立起測地术来。根据古埃及人阿密斯（俄譯名 Ахмес，英譯名 Ahmes，公元前約1550年）的紙草卷（現存英国不列顛博物館）及莫斯科紙草卷（現存苏联莫斯科美术博物館，卷首早已散失，原名不可考），我們知道在公元前2000—1700年古埃及人已能計算某些图形的面积和体积。恩格斯（Friedrich Engels，1820—1895，德人）在“反杜林論”里說过：“数学是从人类的需要上产生出来的，即是从地段面积及器物容积的測量，从时間及机械学的計算等产生出来的。”

后来，希臘人吸收了埃及的測量技术，扩大了应用的范圍，并且逐漸走向理論方面去。关于这一段时期（公元前七世紀到三世紀）的发展过程，古希臘的数学史家欧德謨（E'ύδημos，公元前

---

❶ 欧几里得第5公設的全文見第6頁第17—19行。

約 335 年)詳細記載在他的著作“几何史”里，可是这个著作已經失傳了，現在只存片紙只字。幸而古罗馬的蒲罗克魯(πρókλos Διάδoxos，公元后412？—485)在为欧几里得“原本”作注解时曾摘录欧德谟“数学史”的大要，而“原本”卷Ⅰ的蒲罗克魯注解还流傳到現在。根据这一个主要的及其他次要的文献，我們知道在公元前650—300年的时期中，古希臘的数学家們提供了許多几何事实，闡明了几何事实之間的关系，創用了各种証明的方法，拟定了某些概念的定义。借苏联亞·达·亞历山大洛夫(А.Д. Александров，1912—　　)的話来說，“这个过程終于导引到質的突变。”(見“苏联大百科全書”，卷10，第534頁，1949。)这就是：几何变成独立的科目，出現了它的系統性，其中各个定理都有証明，而以定义、公設和公理为推理的基础。

所以到了公元前第三世紀的时代，当欧几里得在亞历山大城講学的时候，他决定整理前人的資料，按照邏輯相关的次序排列起来，而完成他的杰作“几何原本”十三卷(后人續补二卷，共十五卷)。这个著作的出現，压倒了当时同一类型的其他作品。“几何原本”里对于命題之間力求有着严密的邏輯系統。这是欧几里得在編写时所追求的目标，也是后来数学家們所效法的。我們可以說，欧几里得“原本”标志着：邏輯地創立几何学初度尝試成功了。

由于欧几里得竭力想構成命題之間的邏輯系統，所以在他的“原本”里，不論命題的本身是否淺显，凡是可以証明的命題，都不厌其煩地加以証明。例如“原本”卷Ⅲ的第2命題“如在圓周上任取二点，那末通过这二点的直綫必通过圓的內部。”从图形的直观性来說，这是十分淺显明白的几何事实。但是为了避免直观地接受这个事实，欧几里得也給以証明了，因为从其他早已証明的定理和沒有証明而可以采用的命題(公設和公理)，是可以用邏輯推理的方式导出它的。这种完全出于邏輯推导的形式，正是欧几里得渴望能够彻底实現的。但是欧几里得在这方面做得很不够，因为“原本”的許多論証还或明或暗地引进了直观行动。

現在举例来指出他的直观行动。

〔例1〕 在一已知的有限直綫上作一等边三角形。(見“原本”卷I的第1命題)

下面是欧几里得的証明：

設 AB 是已知的有限直綫。在直綫 AB 上求作等边三角形。

以 A 为中心、AB 为距离画一个圆 BCD；且以 B 为中心、BA 为距离又画一个圆 ACE；从这兩圓的交点 C 連至点 A 和点 B。由于点 A 是圓 BCD 的中心，故 $AC=AB$；由于点 B 是圓 ACE 的中心，故 $BC=BA$；所以 $CA=BC=AB$。因此，三角形 ABC 是等边的，并且它是在已知的有限直綫 AB 上的，这就是所求的。

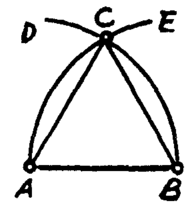

图 1

在上面的証明里，必須注意：当兩圓中的一圓通过另一圓的中心时，为什么这兩圓必有交点？它的邏輯根据是什么？从什么命題可以导出这个結論？假使接受圓是破裂的曲綫(沒有連續性的）而且上面所提到的点 C 不存在兩圓之上的話（卽点 C 与兩圓的任何一圓不相銜接的話)，那末欧几里得的証明就失效了。所以交点 C 的存在必須以圓的連續性为前提。但是直綫与圓的連續性在“原本”里沒有提到过，而欧几里得在这个命題里就作为論証的根据了。

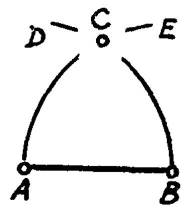

图 2

〔例2〕 如果一个三角形的兩边及其夾角对应地等于另一个三角形的兩边及其夾角，那末这兩个三角形相等。(見“原本”卷I的第4命題)

欧几里得証明这一命題和現在中学課本里所叙述的方法完全相同，就是应用一个三角形迭合到另一个上面去。由于迭合法以运动为前提，所以欧几里得在这里利用了运动。但是欧几里得預先沒有叙述过运动的概念，而且他所使用的运动乃是直綫的笔直性以及長度和角度都保持不变的剛体运动（現代称做欧几里得运

动）。讓我們設想一下，要是在运动的时候，笔直的直綫变成弯曲的，而且長度和角度也要改变，很明显，我們就不能象欧几里得那样証明这一个命題了。

必須指出，欧几里得已尽了最大的努力来避免运动。只在非有不可的場合中（在三个定理即卷Ⅰ的第4和第8命題以及卷Ⅲ的第24命題的証明里）才依賴于运动的。假使不要运动而可以証明各个定理的話，我深信欧几里得决不求助于它。可是，在上述的三个場合中，他就无法避免而引用它了。

〔例3〕 欧几里得依靠图形的直覌性来引用“介于”的概念。例如卷Ⅰ的第18命題：每个三角形的大边对着大角。

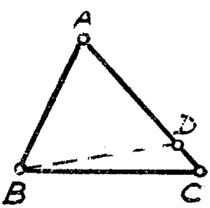

图 3

欧几里得的証法也和现在中学課本里的相同。先在三角形 ABC 的大边 AC 上取 AD 等于 AB，而后連接 B，D。由于外角 ADB 大于內对角 DCB，而 $\angle ADB$ 等于 $\angle ABD$，故 $\angle ABD$ 也大于 $\angle ACB$，从而 $\angle ABC$ 大于 $\angle ACB$。

值得注意的是上面証明的最后一句話。实际上，欧几里得是根据 BD 介于 BA 与 BC 之間的事实，判断出 $\angle ABC$ 大于 $\angle ABD$，从而 $\angle ABC$ 大于 $\angle ACB$ 的。但为什么从点 D 介于 A 与 C 之間的事实（这是从大小綫段 $AC>AD$ 的定义中得来的），就能获得 BD 介于 BA 与 BC 之間的結果呢？欧几里得对此不仅沒有邏輯上的証明，而且連“介于”的概念也含糊地隐藏在他的証明里了。

讀者可能要說：“从点 D 介于 A 与 C 之間的事实，获得 BD 介于 BA 与 BC 之間的結果，这还不够明白嗎？”問題不在于命題本身的明白与否。几何里有許多定理比我們在証明里所引用到的还要明白一些。但是我們必須証明这些定理，因为用邏輯推理的法則可以导出它們的。

总之，欧几里得在編写“原本”时，常常要脫离邏輯推导所应有的步驟。上面仅仅举出了三个实例，就可以說明：欧几里得沒有完

全实现他的理想而达到邏輯上的完美。其根本缺点在于他的公理系統是不完备的。要在“原本”所列举的公理和公設的基础上邏輯地展开几何学是不可能的，这就无可避免地引进了直观行动。經过十九世紀許多数学家的不断努力，这个缺点終于消灭了；在完备的、彼此相容而独立的公理系統上，可以邏輯地展开几何学而不再乞助于图形的直观性。我們在第二章里將提到希尔伯特（David Hilbert，1862—1943，德人）的公理系統，这一个系統載于希尔伯特的著作“几何基础”（1899年）里。

我們已經看到，欧几里得对于某些概念——連續、运动、“介于”——在“原本”里幷未作过任何解釋，虽然“原本”开宗明义地下着許多定义，而这些定义也是值得評論的。他采用部分、長度、寬度等等概念作为基本（原始）的概念。又利用这些基本概念来說明点、綫、面的概念，再进一步下着直綫和平面的定义。他这样选擇基本概念不是偶然的。按照几何发展的过程来說，長度和寬度的概念确实发生在点、綫、面的概念之前。我們說过，几何学起源于测地术。用繩索、鎖鏈、或者步弓来丈量田疇界域，从而形成長度和寬度的概念，进而导引到沒有寬度的綫的概念，最后导引到沒有寬度和長度的点的概念。欧几里得下着这些定义，确实反映了抽象化的历史过程。但按严格的邏輯結構来說，这些定义却是不适当的：一則長度的概念实际上可从完备的公理系統推导出来的㊀，而不需要取做基本的概念；二則这些定义在整个邏輯推导的过程中幷沒有起过什么作用，甚至欧几里得自己在“原本”里也沒有利用这些定义。举例来說，对于直綫的概念，他下着这样的定义：“直綫是在它的各点上一样地放置着的。”（“原本”卷Ⅰ的定义4。）这有什么意义呢？这句話可以解釋为直綫在它的所有各点上有着同一方向。这样一来，这个定义必須建筑在以方向为基本概念的基础上。也可理解为这样的事实：如把直綫看做具体的旋轉軸，那末

㊀ 見本書第90頁。

在空間的旋轉运动之下，它与自身是一致的。这样一来，又要选取运动来做基本概念了。至于欧几里得所下平面的定义："平面是在它的各条直綫上一样地攤放着的。"也是同样可以評論的。必須指出，这些缺点可以归結到基本概念的选擇以及說明一个概念所采用的方式。說明一个概念，通常采用"定义"的方式。但下定义的时候，必須用到另一个概念，而这一个概念要先有它的定义。这样追溯而上，是不可能无止境的追究下去的。事实上，我們可以先从某些概念里选定几个作为基本的。譬如說，选定点、直綫、平面作为基本形象并且把形象之間的銜接性、"介于"、运动作为基本关系。这就是說，基本形象和基本关系是基本概念。然后使用它們下着其他概念的定义。至于这些基本形象和基本关系，不再使用定义的方式来說明它們，而用完整的一套公理来約制它們的意义。这就是近代的公理法。

欧几里得"原本"有着邏輯上的缺陷，这是从古希臘人亞几默德（’Αρχιμήδης，公元前287—212）起，早就注意到了。历代数学家們也注意到另一个問題：欧几里得的第5公設是否能从其他命題邏輯地推导出来。要是可能的話，就該从公設系統里抽出来，而安排到定理的系統里面去。他的第5公設說："如果二直綫和第三直綫相交而且同側內角之和小于二直角，那末这二直綫向該側适当延長之后一定相交。"由于第5公設的內容不象欧几里得的其他公設和公理一样地淺显明白，而且第5公設在"原本"里使用很迟，只在卷Ⅰ的第29命題里使用了一次。这說明欧几里得是处于非有不可的情况下才把它当做公設看待的。于是引起了历代数学家們想要証明这一个命題的尝試。自从公元前一世紀直到公元后十八世紀，許多人使用不同的方法在这方面努力着，可是都失败了。因为在他們的每一个所謂"証明"里或明或暗地引进了一个新的假定，而每一个新假定却是同价于第5公設的，所以本質上他們并沒有証明这个命題，只不过在整个系統里把第5公設的原有位置換上一个同价命題罢了。(所謂第5公設的同价命題就是在其他公理和

公設之外加上第5公設就可以导出这一命题来，而加上这一命題也可以导出第5公設来。第5公設的同价命題很多●。例如：(1)“在一平面上通过已知直綫外的一点只可引一条直綫，使与已知直綫不相交。”(2)“三角形的內角之和等于二直角。”(3)“四角形的內角之和等于四直角”等等。

不过正是由于二千年来各个尝試都失敗了，才使人們怀疑到这个問題解决的可能性。欧几里得把它安排在公設的系統里，大概是正确的高見了。瑞士数学家蘭佩尔(Johann Heinrich Lambert，1728—1777)説得好：“欧几里得預先写下这許多定义〔公設和公理〕，决不是象辞汇一样堆砌起来的。原来欧几里得所进行的工作，是象鐘表工人或其他技工給学徒介紹自己的技术工具一样进行的。”为了查明这个問題解决的可能性，人們就不用前人尝試过的方法，而改用反証法从第5公設的相反情况着手，追究它能否达到謬誤的結論？如果不能的話，它会得到怎样的結果？这样的思想方法就开辟了一条道路，一直通到1826年的罗巴切夫斯基几何的发現。但是这一条道路，从它的发展过程来說，却是迂回曲折的。

为了了解这一个迂回曲折的过程，必須提到几个有关的人物。首先是意大利数学家薩开里(Gerolamo Saccheri，1667—1733)。他在毕生的最后一年(1733年)出版了他的著作“肃清一切污点的欧几里得”。这里他没有否定欧几里得的第5公設，而想用反証法来証明它。他的方法是这样的：首先选定“原本”卷Ⅰ的最初26个命題作为論証的基础，然后研究底边AB上的兩角都是直角而侧边BC和AD相等的四角形。(这样的四角形就叫做薩开里四角形)。他証明这个四角形的上下兩底中点的連綫垂直于双方底边，并且上底的兩角C和D是相等的。其次，他提出三种假設：(1)D是鈍角，(2)D是直

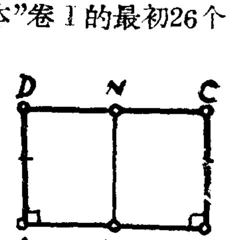

图 4

● 参考科士靑著“几何学基础”，中譯本，第167—180頁，商务印書館，1954。

角，(3) D是銳角。他駁斥了鈍角的假設，因为根据有限直綫可以无限延長的話，这个假設就会招致矛盾的結論。至于直角的假設正是說明矩形的存在，也就是四角形的內角之和等于四直角，由此便能导出欧几里得的第5公設。为了要使直角的假設成立，他就使用反証法想在銳角的假設之下导出矛盾的結論来。可是他导出了一系列的互相諧和的命題。直到在他所导出的第33个命題里，他認为招致了謬誤的結論。其实，这里的結論并沒有什么謬誤，而謬誤的却是他自己的見解，因为他毫无根据地把有限图形的性質应用到无限的領域里去了。事实上，他所导出的一系列命題，正是屬于罗巴切夫斯基几何的。他获得了新几何的根源，而自己却不知道；否則，罗巴切夫斯基几何的幼芽在这个时期已經出土了，一經培养就可以及时的开花結果。对于这个史实，有人作出这样的比拟：薩开里和同一国籍的哥倫布（Christopher Columbus，1451—1506）一样；哥倫布在探求一条新路綫使能重臨旧地的过程中，发現了新大陆，而自己还不知道哩！

其次要提到蘭佩尔。蘭佩尔的著作“平行綫理論”与薩开里的“肅清一切污点的欧几里得”有着类似的思想方法。首先他研究具有三个直角的四角形。（事实上，这就是薩开里四角形的一半，这样的四角形就叫做蘭佩尔四角形。）对于这个四角形的第四角D，他同样提出了三种假設：D是鈍角、直角、或者銳角。在鈍角和銳角的假設下，他所研究的程度比薩开里深入一步了。他知道，在鈍角的假設下三角形的內角之和（簡称角和）一定大于兩直角，而超出兩直角的数量就叫做这个三角形的角盈；在銳角的假設下三角形的角和一定小于兩直角，而短少的数量就叫做这个三角形的角亏。蘭佩尔証明了三角形的面积与角盈或角亏成比例。他又知道，在銳角的假設下不仅角度有着絕对的單位（直角），而且長度也可能有絕对的單位❶，不象欧几里得几何里的長度單位是相对的——

❶ 見本書第127頁。

也就是人为的而且可以任意給定的。事实上，在銳角的假設下蘭佩尔所指出的事实都是屬于罗巴切夫斯基几何的，而在鈍角的假設下他所指出的事实是屬于黎曼几何（另一种非欧几里得几何）的。但是他也象薩开里一样默認了有限直綫可以无限延長，由此他駁斥了鈍角的假設。另一方面，在銳角的假設下，他的最后結論还不够明确，因而不能令人滿意的。

其次要提到法人勒戎得耳（Adrien Marie Legendre，1752—1833）。勒戎得耳在他的著作“几何原本”（与欧几里得“原本”同名而結構不同的作品）里，对于欧几里得第5公設試用了各种証法，而且在各个修訂版里有着不同的証法。虽然这些証法沒有一个是对的，但是他的研究結果也引向到新几何的一些事实。他知道从“三角形的角和等于兩直角”这一个命題可以导出欧几里得的第5公設。为了要使这一个命題成立，他也使用反証法来駁斥三角形的角和大于兩直角及小于兩直角的兩种假設。他也象薩开里和蘭佩尔一样默認了有限直綫可以无限延長，由此駁斥了角和大于兩直角的假設，而得到这样一个命題：“三角形的角和不能大于兩直角。”他又証明了“如果某一个三角形的角和等于兩直角，那末所有三角形的角和都等于兩直角。”由此得到“如果某一个三角形的角和小于兩直角，那末所有三角形的角和都小于兩直角。”（这些事实，薩开里也早就知道。）但他終究不能駁斥三角形的角和确实可能小于兩直角的假設，而且在这方面所导出的內容沒有象薩开里和蘭佩尔一样地深入。

其次我們要提到德人須外卡尔特（Ferdinand Karl Schweikart，1780—1859）和托里努斯（Franz Adolph Taurinus 1794—1874）。須外卡尔特在馬得堡求学的时候，听了哈夫教授（J. K. F. Hauff）关于平行綫理論的几次演講而感到极大的兴趣。从此，他在1807年出版了他的“平行綫理論”，这里总結了前人的許多成就。不久他自己也探得新几何的一些內容，而称这个几何为“幽冥中的几何”。正象汉文里所說“幽明異途”似的，他認为这些事实不适用