XIANDAI KONGZHI LILUN JICHU XITIJIE

廖桂文　丁仲英　徐心和　编著

现代控制理论基础习题解

辽宁人民出版社

现代控制理论基础习题解

廖桂文　丁仲英　徐心和　编著

辽宁人民出版社
1983年·沈阳

前　言

谢绪恺编著的《现代控制理论基础》（辽宁人民出版社1980年初版）一书出版后，受到有关专业师生和科技工作者的欢迎。也有不少读者来信，询问书中一些习题的解法，希望能将书中的习题解答印发出来，以便学习参考。考虑到初学者常遇到的这种困难，我们在谢绪恺的直接主持下，将原书中的习题全部解出来，编了这本习题解。

这本题解仍按原书各章和附录的顺序安排。各章第一节均为内容提要，简单明了地归纳了原书该章的基本内容和重要公式，这也使得这本习题解有了一定的独立性。

这本题解有个初稿，其中第四、五、七章是丁仲英完成的，余下是徐心和完成的。这次出版时，第一、二、八、九章和附录是廖桂文加工整理的，余下是丁仲英加工整理的。后来，徐心和也参与了各章的整理工作。此外，刘子丰、杨永治、荆海英为本书也做了许多工作，谨此致谢。

编　者

1982年10月

目　录

第一章　状态方程

第一节　内容提要

一、基本概念

1．状态变量　系统的状态变量是确定系统状态的最小一组变量：$x_1(t)$、$x_2(t)$、…、$x_n(t)$．满足下列两个条件：

（1）在任何时刻 $t=t_0$，这组状态变量的值 $x_1(t_0)$、$x_2(t_0)$、…、$x_n(t_0)$都表示系统在该时刻的状态．

（2）当系统在 $t \geqslant t_0$ 的输入和 $t=t_0$ 的初始状态确定的时候，状态变量完全能表征系统在 $t>t_0$ 时的行为．

2．状态方程　描述系统状态变量与系统输入之间关系的一阶微分方程组称为状态方程．

二、化高阶微分方程为状态方程

这可分为两种情况，即输入函数不含有导数项与含有导数项，分别简述如下：

1．输入函数不含有导数项的情况　这时系统的运动方程为

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}\dot{y}+a_ny=u \qquad (1-1)$$

取相变量$y(t)$，$\dot{y}(t)$，…，$y^{(n-1)}(t)$为系统的一组状态变

量，将这些变量相应记为

$$x_1 = y, \quad x_2 = \dot{y}, \quad \cdots, \quad x_n = y^{(n-1)} \qquad (1-2)$$

则可将方程（1）写成状态方程

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\cdots\cdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= -a_n x_1 - \cdots - a_1 x_n + u \end{aligned} \qquad (1-3)$$

其矩阵形式为

$$\dot{X} = AX + bu \qquad (1-4)$$

其中

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathrm{I}_{n-1} & \\ 0 & & & \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} \cdots & -a_1 \end{pmatrix},$$

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (1-5)$$

2. 输入函数含有导数项的情况　这时系统的运动方程为

$$\begin{aligned} & y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y \\ = & b_0 u^{(n)} + b_1 u^{(n-1)} + \cdots + b_{n-1}\dot{u} + b_n u \end{aligned} \qquad (1-6)$$

取下列n个变量

$$x_1=y-\beta_0 u,\quad x_2=\dot{x}_1-\beta_1 u,\ \cdots,x_n=\dot{x}_{n-1}-\beta_{n-1}u \tag{1—7}$$

为一组状态变量，其中

$$\beta_0=b_0,\ \beta_1=b_1-a_1\beta_0,\ \cdots,$$
$$\beta_{n-1}=b_{n-1}-a_1\beta_{n-2}-\cdots-a_{n-2}\beta_1-a_{n-1}\beta_0 \tag{1—8}$$

则可将方程（1—6）写成状态方程

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1&=x_2+\beta_1 u\\
\dot{x}_2&=x_3+\beta_2 u\\
&\cdots\cdots\\
\dot{x}_{n-1}&=x_n+\beta_{n-1}u\\
\dot{x}_n&=-a_n x_1-a_{n-1}x_2-\cdots-a_1 x_n+\beta_n u
\end{aligned} \tag{1—9}$$

其矩阵形式为

$$\dot{X}=AX+bu$$

其中

$$X=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix} 0 & & & \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathrm{I}_{n-1} & \\ 0 & & & \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2}\cdots & -a_1\end{pmatrix},$$

$$b=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix} \tag{1—10}$$

三、由传递函数求状态方程

单输入单输出的线性定常系统的传递函数一般是如下的有理分式函数：

$$T(s)=\frac{Y(s)}{u(s)}=\frac{b_0s^m+b_1s^{m-1}+\cdots+b_{m-1}s+b_m}{s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}$$

$$(n>m) \qquad (1-11)$$

对于这种情况，自然可以先把它还原成微分方程。再用上节介绍的方法将它化为状态方程。下面介绍它所对应的三种标准形式。

1．能控标准形　其矩阵形式是

$$\begin{aligned}\dot{X}&=AX+bu\\ y&=C^TX\end{aligned} \qquad (1-12)$$

其中

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}0 & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & \mathrm{I}_{n-1} & & \\ 0 & & & & \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_2 \quad -a_1\end{pmatrix},$$

$$b=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix},\quad C^T=[b_m\ \ b_{m-1}\cdots\ \ b_0\cdots\ \ 0] \qquad (1-13)$$

2．能观测标准形　其矩阵形式同式（1－12）

其中

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}0\ 0\cdots 0 & -a_n\\ & -a_{n-1}\\ \mathrm{I}_{n-1} & \vdots\\ & -a_2\\ & -a_1\end{pmatrix},$$

$$b=\begin{pmatrix}b_n\\b_{n-1}\\\vdots\\b_2\\b_1\end{pmatrix},\quad C^T=[0\ 0\cdots 0\ 1] \qquad (1-14)$$

3．对角标准形　设传递函数 $T(s)$ 只有简单极点：s_1，s_2，…，s_n，因此可展成如下的部分分式

$$T(s)=\frac{c_1}{s-s_1}+\frac{c_2}{s-s_2}+\cdots+\frac{c_n}{s-s_n}.$$

这时对应于传递函数 $T(s)$ 的状态方程和输出方程仍取（1—12）的形式，其中

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}s_1 & 0 & \cdots & 0\\0 & s_2 & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & & \vdots\\0 & 0 & \cdots & s_n\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix},$$

$$C^T=[c_1\ c_2\ \cdots\ c_n] \qquad (1-15)$$

四、离散系统的状态方程

线性定常离散系统的运动方程是

$$y(k+n)+a_1y(k+n-1)+\cdots+a_{n-1}y(k+1)+a_ny(k)$$
$$=b_0u(k+m)+b_1u(k+m-1)+\cdots+b_mu(k) \qquad (1-16)$$

将它写成状态方程所使用的方法与连续情况基本一样。

第二节　习　题

1．设系统的运动方程为

$$\ddot{y}+7\dot{y}+12y=2u$$

试选相变量作为状态变量，写出系统的状态方程。

2．同上题，试选下列变量

$$x_1=\dot{y}+y,\ x_2=y$$

作为状态变量，写出系统的状态方程。

3．设系统的运动方程为

$$\dddot{y}+2\ddot{y}+4\dot{y}+6y=3u$$

其中$u(t)$是系统的输入，$y(t)$是输出，试选择适当的状态变量将它写成

（1）能控标准形。

（2）能观测标准形。

4．设系统的运动方程为

$$\dddot{y}+18\ddot{y}+192\dot{y}+640y=160\dot{u}+640u$$

试求系统的状态方程。

5．设系统的运动方程为

$$\dddot{y}+5\ddot{y}+\dot{y}+2y=\dot{u}+2u$$

试求系统的状态方程。

6．设系统的运动方程为

$$\dddot{y}+3\ddot{y}+2\dot{y}+y=\ddot{u}+2\dot{u}+u$$

输出为$y(t)$，试写出系统的动态方程。

7．设系统的传递函数为

$$T(s)=\frac{s^2+2s+5}{3s^3+6s^2+9s+15}$$

试写出它的能控标准形和能观测标准形。

8．设系统的传递函数为

$$T(s)=\frac{s^2+4s+5}{s^3+6s^2+11s+6}$$

试写出它的对角标准形。

9．设系统的传递函数为

$$T(s)=\frac{2s^2+6s+5}{s^3+4s^2+5s+2}$$

试写出它的若当标准形。

10．利用第7题的答案求系统的传递函数。

11．利用第8题和第9题的答案求系统的传递函数。

12．设系统的传递函数为

$$T(s)=\frac{2s^2+s+2}{s^3+4s^2+3s+5}$$

画出它的状态变量图，并根据状态变量图写出它的动态方程。

13．设离散系统的运动方程为

$$y(k+2)+3y(k+1)+2y(k)=u(k)$$

试选择下列变量

$$x_1(k)=y(k),\quad x_2(k)=y(k+1)$$

为一组状态变量，写出它的状态方程。

14．设系统的运动方程为

$$y(k+3)+3y(k+2)+2y(k+1)+y(k)$$
$$=u(k+2)+2u(k+1)+u(k)$$

输出为$y(k)$，试写出系统的动态方程。

15. 已知系统的状态方程为

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -1\\ -5 & 4\\ 5 & -3\end{pmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$$

输出方程为

$$\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -2 & -3 & -4\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

试求系统的传递函数矩阵.

第三节　习题解答

1. 解　取 $x_1=y$, $x_2=\dot{y}$, $X^T=[x_1\ \ x_2]$

则

$$\dot{x}_1=\dot{y}=x_2$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_2=\ddot{y}&=-12y-7\dot{y}+2u\\ &=-12x_1-7x_2+2u\end{aligned}$$

状态方程为

$$\dot{X}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -12 & -7\end{bmatrix}X+\begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix}u$$

2. 解　取 $x_1=\dot{y}+y$, $x_2=y$, $X^T=[x_1\ \ x_2]$

则

$$\begin{aligned}\dot{x}_1=\ddot{y}+\dot{y}&=-6\dot{y}-12y+2u\\ &=-6x_1-6x_2+2u\end{aligned}$$

$$\dot{x}_2=\dot{y}=x_1-x_2$$

状态方程为

$$\dot{X}=\begin{bmatrix}-6 & -6\\ 1 & -1\end{bmatrix}X+\begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix}u$$

3．解（1）取 $x_1=y/3$， $x_2=\dot{y}/3$， $x_3=\ddot{y}/3$，
$X^T=[x_1\ x_2\ x_3]$

则

$$\dot{x}_1=x_2$$
$$\dot{x}_2=x_3$$
$$\dot{x}_3=-6x_1-4x_2-2x_3+u$$

系统的能控标准形为

$$\dot{X}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -4 & -2\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}u$$

$$y=[3\quad 0\quad 0]X$$

（2）取 $x_1=\ddot{y}+2\dot{y}+4y$，$x_2=\dot{y}+2y$，$x_3=y$

则

$$\dot{x}_1=3u-6x_3$$
$$\dot{x}_2=x_1-4x_3$$
$$\dot{x}_3=x_2-2x_3$$

系统的能观测标准形为

$$\dot{X}=\begin{pmatrix}0 & 0 & -6\\ 1 & 0 & -4\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}3\\ 0\\ 0\end{pmatrix}u$$

$$y=[0\quad 0\quad 1]X$$

4．解　取 $x_1=y, x_2=\dot{y}$，$x_3=\ddot{y}-160u, X^T=[x_1\ x_2\ x_3]$

则

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{y} = x_3 + 160u$$

$$\dot{x}_3 = \dddot{y} - 160\dot{u} = -18\ddot{y} - 192\dot{y} - 640y + 640u$$

$$= -18(\ddot{y} - 160u) - 192\dot{y} - 640y - 2240u$$

$$= -18x_3 - 192x_2 - 640x_1 - 2240u$$

系统状态方程为

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -640 & -192 & -18 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ 160 \\ -2240 \end{pmatrix} u$$

5。解　取$x_1 = y$，$x_2 = \dot{y}$，$x_3 = \ddot{y} - u$，$X^T = [x_1 \ x_2 \ x_3]$

则

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3 + u$$

$$\dot{x}_3 = \dddot{y} - \dot{u} = -2y - \dot{y} - 5\ddot{y} + 2u$$

$$= -2x_1 - x_2 - 5x_3 - 3u$$

系统的状态方程为

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -5 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} u$$

6。解　取$x_1 = y$，$x_2 = \dot{x}_1 - \beta_1 u = \dot{y} - \beta_1 u$，$x_3 = \dot{x}_2 - \beta_2 u$
$= \ddot{y} - \beta_1 \dot{u} - \beta_2 u$

则

$$\dot{x}_3 = \dddot{y} - \beta_1 \ddot{u} - \beta_2 \dot{u}$$

$$\dot{x}_3 + 3x_3 + 2x_2 + x_1 = \dddot{y} + 3\ddot{y} + 2\dot{y} + y - \beta_1 \ddot{u} - \beta_2 \dot{u} - 3\beta_1 \dot{u} - 3\beta_2 u - 2\beta_1 u$$
$$= \ddot{u} + 2\dot{u} + u - \beta_1 \ddot{u} - (\beta_2 + 3\beta_1)\dot{u} - (3\beta_2 + 2\beta_1) u$$

令

$$\beta_1 = 1, \qquad \beta_2 + 3\beta_1 = 2$$

得

$$\beta_2 = -1$$

由此可得

$$\dot{x}_1 = x_2 + \beta_1 u = x_2 + u$$
$$\dot{x}_2 = x_3 + \beta_2 u = x_3 - u$$
$$\dot{x}_3 = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 2u$$

系统的动态方程为

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} u$$
$$y = [1 \quad 0 \quad 0] X$$

7．解 取 $X(s) = \dfrac{3Y(s)}{s^2 + 2s + 5} = \dfrac{U(s)}{s^3 + 2s^2 + 3s + 5}$

有

$$3Y(s) = (s^2 + 2s + 5) X(s)$$

即

$$y(t) = \frac{1}{3}[\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + 5x(t)]$$

有

$$(s^3 + 2s^2 + 3s + 5) X(s) = U(s)$$

即

$$\dddot{x}(t)+2\ddot{x}(t)+3\dot{x}(t)+5x(t)=u(t)$$

（1）取满足关系式$\dot{x}_1=x_2$，$\dot{x}_2=x_3$的三个变量x_1,x_2,x_3作为一组状态变量，可得能控标准形

$$\dot{X}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-5&-3&-2\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}\frac{5}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}X$$

（2）根据能观测标准形与能控标准形的对偶关系，立即得到能观测标准形

$$\dot{X}=\begin{pmatrix}0&0&-5\\1&0&-3\\0&1&-2\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}\frac{5}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}u$$

$$y=[0\quad 0\quad 1]X$$

8．解　将系统传递函数按部分分式展开，得

$$T(s)=\frac{s^2+4s+5}{s^3+6s^2+11s+6}$$

$$=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s+3}$$

因输出$y(t)$的拉氏变换为

$$Y(s)=T(s)U(s)$$

由此有

$$Y(s)=\frac{U(s)}{s+1}-\frac{U(s)}{s+2}+\frac{U(s)}{s+3}$$

$$=X_1(s)-X_2(s)+X_3(s)$$

式中

$$X_1(s)=\frac{U(s)}{s+1}$$

$$X_2(s)=\frac{U(s)}{s+2}$$

$$X_3(s)=\frac{U(s)}{s+3}$$

两边通分，取拉氏逆变换得

$$\dot{x}_1+x_1=u$$

$$\dot{x}_2+2x_2=u$$

$$\dot{x}_3+3x_3=u$$

由此可得动态方程的对角标准形

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-2&0\\0&0&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}u$$

$$y=[1\quad -1\quad 1]\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

9. 解 将系统传递函数按部分分式展开，得

$$T(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{2s^2+6s+5}{s^3+4s^2+5s+2}$$

$$=\frac{1}{(s+1)^2}+\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s+2}$$

由此有

$$Y(s)=\frac{U(s)}{(s+1)^2}+\frac{U(s)}{s+1}+\frac{U(s)}{s+2}$$