

548490

31
10217
T.2

高等数学 中

电信各专业自学读本

北京邮电学院函授部编 · 人民邮电出版社出版

成都科学大学图书馆

基本馆藏

高等数学

电信各专业自学读本

中册

北京邮电学院函授部编

人民邮电出版社

内 容 提 要

《高等数学》自学读本这一套书，是为读者自学或作函授教学用书而编写的，分上中下三册，本书是中册，共十章(第九章到第十八章)；内容包括 9. 导数的应用；10. 不定积分；11. 定积分及其应用；12. 空间直角坐标及矢量代数；13. 曲面方程与曲线方程；14. 空间的平面与曲线；15. 几种主要的二次曲面；16. 多元函数及其微分法；17. 重积分；18. 曲线积分与曲面积分。每章、每节都有思考题和习题，并有习题答案。可供科技人员和高中文化程度的读者阅读，大专院校有关专业的师生参考。

高 等 数 学

电信各专业自学读本

中 册

北京邮电学院函授部编

*

人民邮电出版社出版

北京东长安街 27 号

北京印刷一厂印刷

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

*

开本：787 × 1092 $\frac{1}{32}$ 1979年8月第一版
印张：16 $\frac{8}{32}$ 页数：260 1979年8月北京第一次印刷
字数：374 千字 印数：1-162,100册

统一书号：15045·总2312-有5126

定价：1.30 元

目 录

第二篇 一元函数的微积分学(续)

第九章 导数的应用	1
第一节 拉格朗奇定理、柯西定理	2
第二节 罗必塔法则	9
第三节 函数的单调增减性的判定法	18
第四节 函数的极值	23
第五节 函数的最大值和最小值及其应用	27
第六节 曲线的凹凸性	32
第七节 极值的第二判定法	35
第八节 函数作图的一般程序、举例	37
*第九节 曲率	43
*第十节 曲率圆、曲率半径、曲率中心	48
*第十一节 方程实根的近似解	49
微分法复习题	59
第十章 不定积分	64
第一节 不定积分的概念	64
第二节 不定积分的性质	68
第三节 基本积分表	69
第四节 换元积分法	75
第五节 分部积分法	85
第六节 有理函数的积分	92
第七节 三角函数的积分	100
第八节 几种简单无理函数的积分	109

第九节	关于积分问题的一些补充说明	118
第十节	积分表的用法	119
第十一章	定积分及其应用	129
第一节	曲边梯形的面积	129
第二节	变力所作的功	132
第三节	定积分的概念	133
第四节	定积分的性质	140
第五节	定积分与不定积分之间的关系	147
第六节	定积分的分部积分法与换元积分法	153
第七节	定积分的近似算法	163
第八节	平面图形的面积	171
第九节	体积	185
第十节	平面曲线的弧长	191
第十一节	定积分在物理学中的应用	196
第十二节	广义积分	203
	不定积分表	219

第三篇 空间解析几何学 矢量代数

第十二章	空间直角坐标及矢量代数	237
第一节	空间点的直角坐标	237
第二节	两个基本问题	243
第三节	矢量概念	248
第四节	矢量的加法、减法、数量与矢量的乘法	249
第五节	矢量的投影表示法	258
第六节	矢量的数量积	268
第七节	矢量的矢量积	273
第十三章	曲面方程与曲线方程	286
第一节	曲面方程的概念	286
第二节	球面方程	289

第三节	母线平行于坐标轴的柱面方程	291
第四节	空间曲线的方程	294
第十四章	空间的平面与直线	298
第一节	平面的方程	298
第二节	平面的一般方程的研究	302
第三节	平面的截距式方程	307
第四节	两平面的夹角和平行、垂直的条件	309
第五节	空间直线的方程	313
第十五章	几种主要的二次曲面	324
第一节	椭球面	324
第二节	椭圆抛物面	328
第三节	锥面	331

第四篇 多元函数微积分学

第十六章	多元函数及其微分法	335
第一节	基本概念	335
第二节	二元函数的极限和连续性	342
第三节	偏导数	345
第四节	全增量与全微分	353
第五节	复合函数的微分法	365
第六节	隐函数的微分法	372
第七节	高阶偏导数	377
第八节	二元函数的极值	382
第十七章	重积分	393
第一节	二重积分的概念	393
第二节	二重积分的性质	399
第三节	二重积分的计算方法——二次积分法	400
第四节	利用极坐标计算二重积分	416
第五节	三重积分概念及算法	423

第六节	利用柱面坐标计算三重积分	431
第七节	利用球面坐标计算三重积分	436
第八节	曲面的面积	442
第十八章	曲线积分与曲面积分	453
第一节	对弧长的曲线积分	454
第二节	对坐标的曲线积分	462
第三节	平面上曲线积分与二重积分之间的关系 格林定理	478
第四节	曲线积分与路径无关的条件	483
第五节	对面积的曲面积分	490
第六节	对坐标的曲面积分	494
第七节	曲面积分与三重积分之间的关系 奥氏公式①	506

第二篇 一元函数的微积分学(续)

第九章 导数的应用

本章的主要内容是利用导数来研究函数的增减性、极值、函数图形的凹凸性及函数图形的描绘等。此外，在第一节里介绍了微分中值定理（拉格朗奇定理），这定理在整个数学分析中，起着基础的作用。

学习本章时，要求读者：

1. 了解并熟悉拉格朗奇定理的条件、结论及其几何意义（同时还应当注意拉格朗奇公式的几种表示法）。

2. 了解罗必塔法则的条件，能准确地、熟练地利用它来确定某些类型的极限。

3. 掌握函数增减性的判定法；明确极值的含义，能用所学到的方法解决一些实际问题中的极大、极小的问题。了解闭区间上函数最大值和最小值的求法。

4. 能利用函数的增、减性及凹、凸性的判定法，极值、拐点和渐近线的求法，来研究函数的性态并作出函数的图形。

必须指出：本章里所研究的函数，基本上是指有导数的函数。

第一节 拉格朗奇定理、柯西定理

一、拉格朗奇定理

假设函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 从而 $y=f(x)$ 在该区间上的图形是一条连续的曲线弧 \widehat{AB} (如图 9.1 所示)。

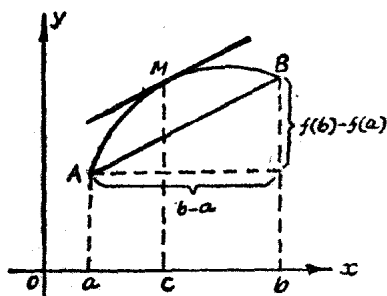


图 9.1

又假设函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a, b) 内可导 (有导数), 这就是说, 曲线弧 \widehat{AB} 上每一点处的切线都存在而且不平行于 y 轴 (在弧 \widehat{AB} 的两个端点 A 和 B 处不作这种要求。例如函数 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ 在闭区间 $[-a, a]$ 上连续, 在开区间 $(-a, a)$ 内可导, 但在 $x=\pm a$ 处不可导)。于是由图形可看出, 在这弧上至少有一点 M , 曲线在该点处的切线平行于弦 AB 。

设切点 M 的横坐标为 c , 则切线的斜率为

$$f'(c),$$

于是切线与弦 AB 平行这一事实就可以表成

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

或

$$f(b)-f(a) = (b-a)f'(c),$$

其中 c 为 a 和 b 之间的一个值。

归纳上述讨论的结果, 可以表成如下的定理:

拉格朗奇定理 假设 $f(x)$ 具有下列条件:

1. 在闭区间 $[a, b]$ 上连续,

2. 在开区间 (a, b) 内可导.

则在开区间 (a, b) 内至少有一点 c 存在, 使得

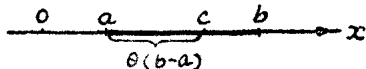
$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c) \quad (9.1)$$

成立。

定理的证明从略。

这个定理也叫做微分中值定理, 公式 (9.1) 也叫做拉格朗奇中值公式或微分中值公式。此处中值的意思是由于 c 介于 a, b 之间。

公式 (9.1) 还可以写成其它的形式, 由于 c 在 a, b 之间, $a < c < b$, 所以可把 c 写成 (参阅图 9.2)



$$c = a + \theta(b - a),$$

图 9.2

其中 θ 是小于 1 的正数。于是 (9.1) 式可以写成

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'[a + \theta(b - a)], \quad (9.2)$$

其中

$$0 < \theta < 1.$$

如果令 $a = x$, $b = x + \Delta x$, 代入 (9.2) 式, 可得

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x + \theta \Delta x) \Delta x, \quad (9.3)$$

或

$$\Delta y = f'(x + \theta \Delta x) \Delta x,$$

其中 $0 < \theta < 1$ 。

(9.1) — (9.3) 式是常用到的拉格朗奇公式的几种形式。

关于定理的条件的问题 定理中的两个条件是充分的, 也就是说, 具备这两个条件, 定理的结论一定成立。

如果不具备这些条件, 定理的结论可能出现, 也可能不出现, 即定理的结论不一定成立。我们用图形来说明这一点。

(1) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 的端点处不连续时, 定理的结论可能出现 (图 9.3), 也可能不出现 (图 9.4)。

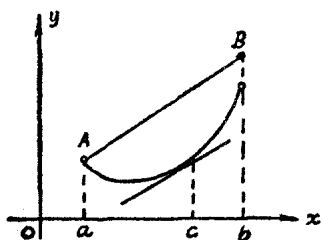


图 9.3

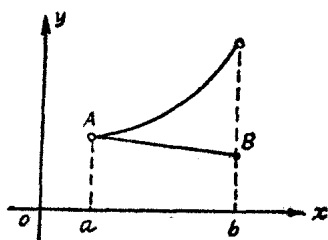


图 9.4

(2) $f(x)$ 在 (a, b) 内某点处不连续时, 定理的结论可能出现 (图 9.5), 也可能不出现 (图 9.6)。

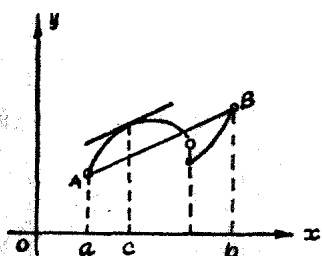


图 9.5

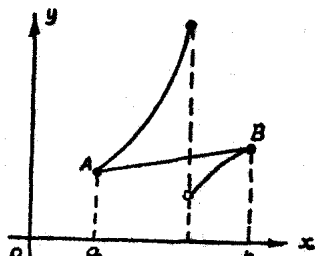


图 9.6

(3) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 但在 (a, b) 内某一点 x_0 处不可导时, 定理的结论可能出现 (图 9.7), 也可能不出现 (图 9.8)。

作为一个定理, 就必须结论是明确的, 不应该可能对也可能不对。既然要求结论必须是肯定的, 所以定理中的两个条件不能随意地减去其中一个。

要不要给定理再加上一些条件呢? 例如, 再假设 $f(x)$ 在

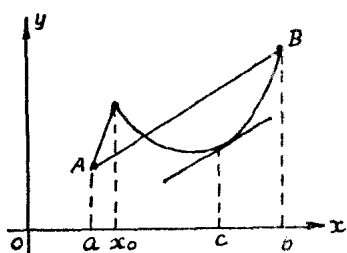


图 9.7

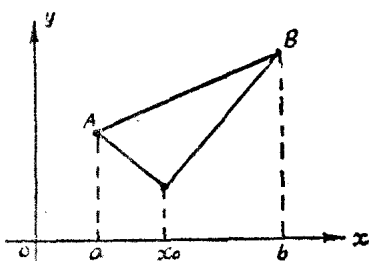


图 9.8

$x=a$ 、 $x=b$ 处也可导呢？这是没有必要的。

关于定理的结论，要注意下列几点：

(1) 结论说：在开区间 (a, b) 内至少有一点 c 存在，使得 (9.1) 式

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$$

成立。至多有几个这样的 c 存在呢？结论没有指明。也许有两个，也许有三个（图 9.9），

等等。定理的结论肯定了 (a, b) 内至少有这样的一个 c 存在，这就已经满足了今后在应用上的需要。所以，进一步研究在 (a, b) 内最多有几个这样的 c 存在是没有

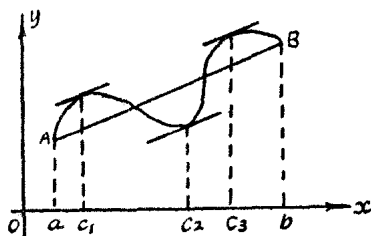


图 9.9

必要的（实际上，在定理的条件下，也不可能得到肯定的解答）。

(2) 结论只肯定了 (a, b) 内至少有一个 c 存在，使 (9.1) 式成立。并没有指明 c 的确实数值，只是肯定了 c 的存在。即使如此，也满足了今后的需要。

拉格朗奇定理是数学分析中最重要的定理之一，以后经常要用到它。

下面，我们应用拉格朗奇定理来证明一个下一章将要用到的事实。

我们已经知道，在某一区间上为常数的函数，在该区间上它的导数恒为零，反之，下面的推论也成立。

推论 如果函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上每一点处的导数都等于零，则函数在该区间上是一个常数。

证 在区间 (a, b) 上任取两点 x_1, x_2 。在区间 $[x_1, x_2]$ 上， $f(x)$ 满足拉格朗奇定理的条件，于是应用公式(9.1)，得

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(c), \quad (x_1 < c < x_2).$$

但由假设 $f'(c) = 0$ ，所以

$$f(x_2) - f(x_1) = 0,$$

即

$$f(x_2) = f(x_1).$$

这就是说，在区间上任意两点处的函数值都是相等的，即函数在区间上是一个常数。

读者也许认为上述的证明是多余的，误以为“常数的导数是零，则导数为零的函数一定是常数”。实际上，这种论断的方法是错误的，在思维逻辑上犯了错误。我们知道，一个命题成立，它的逆命题却不一定成立，例如，“牛是有角的动物”这命题成立，但它的逆命题“有角的动物是牛”却不成立；又例如，“可导必定连续”的逆命题“连续必定可导”不成立。由此可见，逆命题的成立是需要证明的，不是“不证而自明的”。

二、柯西定理

拉格朗奇定理的几何意义是：在一段处处具有不平行于 y 轴的切线的曲线弧 \widehat{AB} 上，至少存在着一个点，曲线在这点处的切线平行于连接弧的端点的弦 AB 。

如果曲线弧 \widehat{AB} 的参数方程是：

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad (1)$$

其中 $a \leq t \leq b$; 当 $t = a$ 时, $(\varphi(a), \psi(a))$ 是端点 A 的坐标; 当 $t = b$ 时, $(\varphi(b), \psi(b))$ 是端点 B 的坐标。现在来看一下拉格朗奇定理几何解释的数学式子表达式。

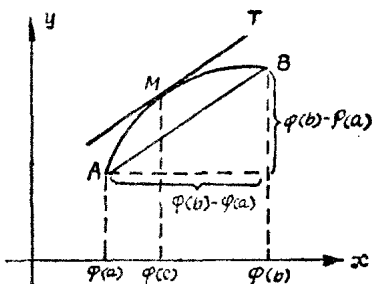


图 9.10

如图 9.10 所示, 弦 AB 的斜率是

$$k = \frac{\psi(b) - \psi(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}.$$

设在点 M 处的切线 MT' 平行于弦 AB , 记点 M 所对应的参数值 $t = c$ [点 M 的横坐标为 $\varphi(c)$, 纵坐标为 $\psi(c)$], 根据参数方程所确定的函数的导数公式, 知点 M 处的切线的斜率是

$$\frac{\psi'(c)}{\varphi'(c)}, \quad (a < c < b).$$

因为切线与弦 AB 平行, 所以

$$\frac{\psi(b) - \psi(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{\psi'(c)}{\varphi'(c)}, \quad (a < c < b).$$

上式就是: 当曲线弧 \widehat{AB} 由参数方程 (1) 给出时, 拉格朗奇定理几何意义的公式表达式。

我们引入下面的定理:

柯西定理 如果函数 $\psi(t)$ 和 $\varphi(t)$ 满足下列条件:

1. $\psi(t)$ 、 $\varphi(t)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续,
2. $\psi(t)$ 、 $\varphi(t)$ 在开区间 (a, b) 内可导, 而且 $\varphi'(t) \neq 0$,

则在开区间 (a, b) 内至少有一点 c 存在，使得

$$\frac{\psi(b) - \psi(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{\psi'(c)}{\varphi'(c)}, \quad (a < c < b) \quad (9.4)$$

成立。

定理的证明从略。

公式 (9.4) 叫做柯西公式。

如果 $\varphi(t) = t$ ，则参数方程 (1) 成为

$$\begin{cases} x = t, \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

消去参数 t 就成为 $y = \psi(x)$ 。另一方面，在 $\varphi(t) = t$ 的情况下，公式 (9.4) 成为

$$\frac{\psi(b) - \psi(a)}{b - a} = \frac{\psi'(c)}{1}, \quad (a < c < b),$$

亦即

$$\psi(b) - \psi(a) = (b - a)\psi'(c), \quad (a < c < b),$$

这是拉格朗奇中值公式。由此可见，拉格朗奇中值定理是柯西定理的一个特殊情形 [当 $\varphi(t) = t$ 时的特殊情形]，所以也可以说，柯西定理是拉格朗奇定理的推广。

在结束本节的叙述之前，应当再一次向读者指出，拉格朗奇中值定理在数学分析中起着重要的作用。其所以如此，粗略地说，是由于有了它能够根据函数的导函数 $f'(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的性态来估量函数 $f(x)$ 在这区间上的变化。因此，对于那些在区间上可导的函数，就有可能利用中值公式而由导函数的性态去研究函数的性态。本节所讲的推论就是应用拉格朗奇定理的一个例子。

至于柯西定理，我们将在下一节中看到它的应用。

思考题

1. 试叙述拉格朗奇定理。
2. 举出拉格朗奇定理的结论在缺少条件下不能成立的例子（以图形举例）。
3. 验证函数 $y = \ln x$ 在区间 $[1, e]$ 上满足拉格朗奇定理的条件而且确实具有定理所述的结论。
4. 函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在区间 $[-1, 1]$ 上能否应用拉格朗奇定理，为什么？
5. 试比较拉格朗奇中值公式

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x + \theta \Delta x) \Delta x$$

与微分近似公式

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x) \Delta x$$

的异同。

6. 中值公式 (9.1) 中的 c 是不是就是 a 、 b 的中点？试研究函数 $f(x) = x^n$ 在区间 $[0, 1]$ 上的情形。

7. 能否用下列方法来证明柯西定理，错误在哪里？

因为 $\psi(x)$ 满足拉格朗奇定理的条件，所以有

$$\psi(b) - \psi(a) = (b-a)\psi'(c), \quad (a < c < b),$$

又因为 $\varphi(x)$ 也满足拉格朗奇定理的条件，所以又有

$$\varphi(b) - \varphi(a) = (b-a)\varphi'(c), \quad (a < c < b).$$

两式相除即得柯西公式

$$\frac{\psi(b) - \psi(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{\psi'(c)}{\varphi'(c)}, \quad (a < c < b).$$

第二节 罗必塔法则

我们在第六章中求极限时，经常遇到求两个无穷小之比的极限，随着这些无穷小的不同，可以有各种不同的结果。对于

两个无穷大之比的极限也是这样。

在习惯上，如果 $q(x)$ 与 $\psi(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ (或当 $x \rightarrow \infty$) 时，同时趋于零或绝对值无限变大，就把比

$$\frac{\psi(x)}{q(x)}$$

叫做当 $x \rightarrow x_0$ (或当 $x \rightarrow \infty$) 时的 $\frac{0}{0}$ 型未定式或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式。

求这类未定式的极限时，不能直接应用商的极限运算定理。过去，我们在处理这类极限问题时，常感到困难，没有一个一般的方法来解决它。下面，我们将根据柯西定理推出处理这类极限的一种有效的方法，这就是所谓的罗必塔法则。

一、两个无穷小量之比的极限

定理 1. 假设

1. 函数 $\psi(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在 x_0 的某一邻域内(但点 x_0 除外)即在区间 $(x_0 - \delta, x_0)$ 、 $(x_0, x_0 + \delta)$ 内有定义，而且是连续的；

2. $\lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = 0, \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0,$

3. $\psi(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在上述两个区间内可导而且 $\varphi'(x) \neq 0$;

4. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\psi'(x)}{\varphi'(x)}$ 存在(或为 ∞)；

则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ 存在(或为 ∞)，而且

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\psi'(x)}{\varphi'(x)}. \quad (9.5)$$

证 首先，补充函数 $\psi(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在 $x = x_0$ 处的定义，令它们在 x_0 处都等于零，即 $\psi(x_0) = 0, \varphi(x_0) = 0$ 。根据条件 2，可知经这样补充定义之后的函数 $\psi(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在 $x = x_0$ 处也连续。