高等数学 中

电信各专业自学读本

北京邮电学院函授部编 · 人民邮电出版社出版

高等数学

电信各专业自学讀本

中 册

北京邮电学院函授部编

人民邮电出版社

内 容 提 要

《高等数学》自学读本这一套书，是为读者自学或作函授教学用书而编写的，分上中下三册，本书是中册，共十章(第九章到第十八章)；内容包括 9.导数的应用；10.不定积分；11.定积分及其应用；12.空间直角坐标及矢量代数；13.曲面方程与曲线方程；14.空间的平面与曲线；15.几种主要的二次曲面；16.多元函数及其微分法；17.重积分；18.曲线积分与曲面积分。每章、每节都有思考题和习题，并有习题答案。可供科技人员和高中文化程度的读者阅读，大专院校有关专业的师生参考。

高 等 数 学

电信各专业自学读本

中 册

北京邮电学院函授部编

*

人 民 邮 电 出 版 社 出 版

北京东长安街27号

北 京 印 刷 一 厂 印 刷

新华书店北京发行所发行

各 地 新 华 书 店 经 售

*

开本：787×1092 1/32　　1979年8月第一版

印张：16 8/32　页数：260　　1979年8月北京第一次印刷

字数：374 千字　　印数：1-162,100册

统一书号：15045·总2312-有5126

定价：1.30 元

目　录

第二篇　一元函数的微积分学(续)

第三篇　空间解析几何学　矢量代数

第四篇　多元函数微积分学

第二篇　一元函数的微积分学(续)

第九章　导数的应用

本章的主要内容是利用导数来研究函数的增减性、极值、函数图形的凹凸性及函数图形的描绘等。此外，在第一节里介绍了微分中值定理（拉格朗奇定理），这定理在整个数学分析中，起着基础的作用。

学习本章时，要求读者：

1. 了解并熟悉拉格朗奇定理的条件、结论及其几何意义（同时还应当注意拉格朗奇公式的几种表示法）。

2. 了解罗必塔法则的条件，能准确地、熟练地利用它来确定某些类型的极限。

3. 掌握函数增减性的判定法；明确极值的含义，能用所学到的方法解决一些实际问题中的极大、极小的问题。了解闭区间上函数最大值和最小值的求法。

4. 能利用函数的增、减性及凹、凸性的判定法，极值、拐点和渐近线的求法，来研究函数的性态并作出函数的图形。

必须指出：本章里所研究的函数，基本上是指有导数的函数。

第一节　拉格朗奇定理、柯西定理

一、拉格朗奇定理

假设函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，从而 $y=f(x)$ 在该区间上的图形是一条连续的曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$（如图 9.1 所示）。

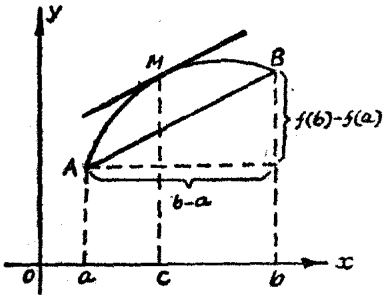

图 9.1

又假设函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导（有导数），这就是说，曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上每一点处的切线都存在而且不平行于 y 轴（在弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的两个端点 A 和 B 处不作这种要求。例如函数 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ 在闭区间 $[-a,a]$ 上连续，在开区间 $(-a,a)$ 内可导，但在 $x=\pm a$ 处不可导）。于是由图形可看出，**在这弧上至少有一点 M，曲线在该点处的切线平行于弦 AB。**

设切点 M 的横坐标为 c，则切线的斜率为

$$f'(c),$$

于是切线与弦 AB 平行这一事实就可以表成

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

或

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c),$$

其中 c 为 a 和 b 之间的一个值。

归纳上述讨论的结果，可以表成如下的定理：

拉格朗奇定理　假设$f(x)$具有下列条件：

1．在闭区间$[a, b]$上连续.

2．在开区间(a, b)内可导.

则在开区间(a, b)内至少有一点c存在，使得

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c) \tag{9.1}$$

成立。

定理的证明从略。

这个定理也叫做**微分中值定理**，公式(9.1)也叫做**拉格朗奇中值公式或微分中值公式**。此处中值的意思是由于c介于a、b之间。

公式(9.1)还可以写成其它的形式，由于c在a、b之间：$a<c<b$，所以可把c写成（参阅图9.2）

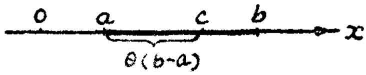

图 9.2

$$c=a+\theta(b-a),$$

其中θ是小于1的正数。于是(9.1)式可以表成

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'[a+\theta(b-a)], \tag{9.2}$$

其中　$0<\theta<1$。

如果令$a=x$，$b=x+\Delta x$，代入(9.2)式，可得

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x, \tag{9.3}$$

或

$$\Delta y=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x,$$

其中$0<\theta<1$。

(9.1)—(9.3)式是常用到的拉格朗奇公式的几种形式。

关于定理的条件的问题　定理中的两个条件是充分的，也就是说，具备这两个条件，定理的结论一定成立。

如果不具备这些条件，定理的结论可能出现，也可能不出现，即定理的结论不一定成立。我们用图形来说明这一点。

(1) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 的端点处不连续时，定理的结论可能出现（图 9.3），也可能不出现（图 9.4）。

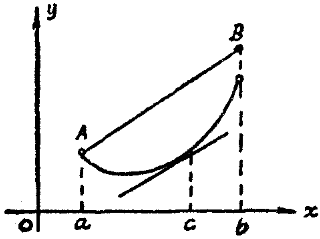

图 9.3

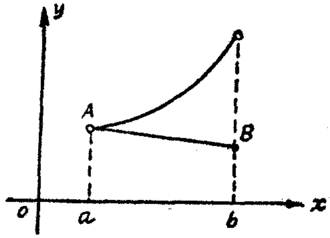

图 9.4

(2) $f(x)$ 在 (a,b) 内某点处不连续时，定理的结论可能出现（图 9.5），也可能不出现（图 9.6）。

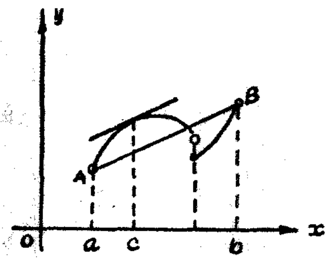

图 9.5

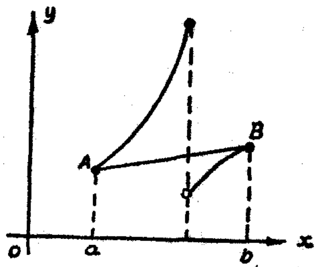

图 9.6

(3) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，但在 (a,b) 内某一点 x_0 处不可导时，定理的结论可能出现（图 9.7），也可能不出现（图 9.8）。

作为一个定理，就必须结论是明确的，不应该可能对也可能不对。既然要求结论必须是肯定的，所以定理中的两个条件不能随意地减去其中一个。

要不要给定理再加上一些条件呢？例如，再假设 $f(x)$ 在

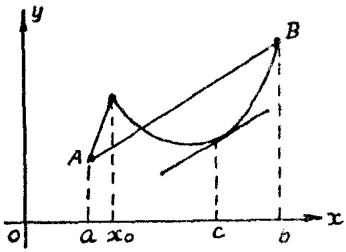

图 9.7

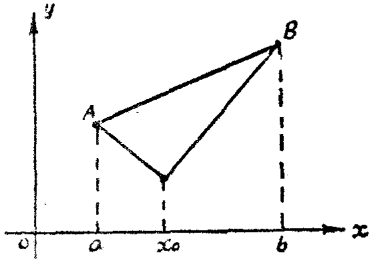

图 9.8

$x=a$、$x=b$ 处也可导呢？这是没有必要的。

关于定理的结论，要注意下列几点：

(1) 结论说：在开区间 (a,b) 内至少有一点 c 存在，使得 (9.1) 式

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$$

成立。至多有几个这样的 c 存在呢？结论没有指明。也许有两个，也许有三个（图 9.9），等等。定理的结论肯定了在 (a,b) 内至少有这样的一个 c 存在，这就已经满足了今后在应用上的需要。所以，进一步研究在 (a,b) 内最多有几个这样的 c 存在是没有必要的（实际上，在定理的条件下，也不可能得到肯定的解答）。

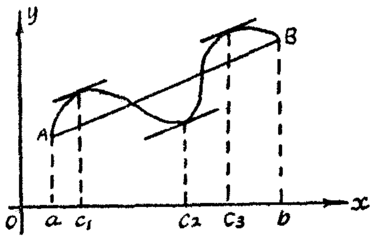

图 9.9

(2) 结论只肯定了在 (a,b) 内至少有一个 c 存在，使 (9.1) 式成立。并没有指明 c 的确实数值，只是肯定了 c 的存在。即使如此，也满足了今后的需要。

拉格朗奇定理是数学分析中最重要的定理之一，以后经常要用到它。

下面，我们应用拉格朗奇定理来证明一个下一章将要用到的事实。

我们已经知道，在某一区间上为常数的函数，在该区间上它的导数恒为零，反之，下面的推论也成立。

推论　如果函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上每一点处的导数都等于零，则函数在该区间上是一个常数。

证　在区间 (a, b) 上任取两点 x_1、x_2。在区间 $[x_1, x_2]$ 上，$f(x)$ 满足拉格朗奇定理的条件，于是应用公式(9.1)，得

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)f'(c),\quad (x_1<c<x_2)。$$

但由假设 $f'(c)=0$，所以

$$f(x_2)-f(x_1)=0,$$

即

$$f(x_2)=f(x_1)。$$

这就是说，在区间上任意两点处的函数值都是相等的，即函数在区间上是一个常数。

读者也许认为上述的证明是多余的，误以为“常数的导数是零，则导数为零的函数一定是常数”。实际上，这种论断的方法是错误的，在思维逻辑上犯了错误。我们知道，一个命题成立，它的逆命题却不一定成立，例如，“牛是有角的动物”这命题成立，但它的逆命题“有角的动物是牛”却不成立；又例如，“可导必定连续”的逆命题“连续必定可导”不成立。由此可见，逆命题的成立是需要证明的，不是“不证而自明的”。

二、柯西定理

拉格朗奇定理的几何意义是：在一段处处具有不平行于 y 轴的切线的曲线弧 $\widehat{AB}$ 上，至少存在着一个点，曲线在这点处的切线平行于连接弧的端点的弦 AB。

如果曲线弧 $\widehat{AB}$ 的参数方程是：

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}, \qquad (1)$$

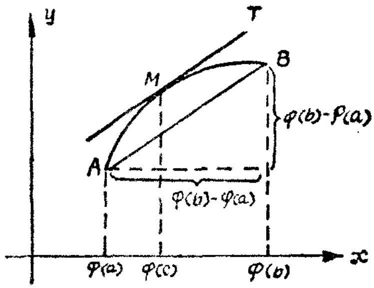

图 9.10

其中 $a \leqslant t \leqslant b$；当 $t=a$ 时，$(\varphi(a),\ \psi(a))$ 是端点 A 的坐标；当 $t=b$ 时，$(\varphi(b),\ \psi(b))$ 是端点 B 的坐标。现在来看一下拉格朗奇定理几何解释的数学式子表达式。如图 9.10 所示，弦 AB 的斜率是

$$k=\frac{\psi(b)-\psi(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}。$$

设在点 M 处的切线 MT 平行于弦 AB，记点 M 所对应的参数值 $t=c$ [点 M 的横坐标为 $\varphi(c)$，纵坐标为 $\psi(c)$]，根据参数方程所确定的函数的导数公式，知点 M 处的切线的斜率是

$$\frac{\psi'(c)}{\varphi'(c)},\ (a<c<b)。$$

因为切线与弦 AB 平行，所以

$$\frac{\psi(b)-\psi(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{\psi'(c)}{\varphi'(c)},\ (a<c<b)。$$

上式就是：当曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 由参数方程 (1) 给出时，拉格朗奇定理几何意义的公式表达式。

我们引入下面的定理：

柯西定理 如果函数 $\psi(t)$ 和 $\varphi(t)$ 满足下列条件：

1. $\psi(t)$、$\varphi(t)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，

2. $\psi(t)$、$\varphi(t)$ 在开区间 $(a,\ b)$ 内可导，而且 $\varphi'(t) \neq 0$,

则在开区间 (a, b) 内至少有一点 c 存在，使得

$$\frac{\psi(b)-\psi(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{\psi'(c)}{\varphi'(c)}, \quad (a<c<b) \tag{9.4}$$

成立。

定理的证明从略。

公式 (9.4) 叫做柯西公式。

如果 $\varphi(t)=t$，则参数方程(1)成为

$$\begin{cases} x=t, \\ y=\psi(t), \end{cases}$$

消去参数 t 就成为 $y=\psi(x)$。另一方面，在 $\varphi(t)=t$ 的情况下，公式 (9.4) 成为

$$\frac{\psi(b)-\psi(a)}{b-a}=\frac{\psi'(c)}{1}, \quad (a<c<b),$$

亦即

$$\psi(b)-\psi(a)=(b-a)\psi'(c), \quad (a<c<b),$$

这是拉格朗奇中值公式。由此可见，拉格朗奇中值定理是柯西定理的一个特殊情形 [当 $\varphi(t)=t$ 时的特殊情形]，所以也可以说，柯西定理是拉格朗奇定理的推广。

在结束本节的叙述之前，应当再一次向读者指出，拉格朗奇中值定理在数学分析中起着重要的作用。其所以如此，粗略地说，是由于有了它就能够根据函数的导函数 $f'(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的性态来估量函数 $f(x)$ 在这区间上的变化。因此，对于那些在区间上可导的函数，就有可能利用中值公式而由导函数的性态去研究函数的性态。本节所讲的推论就是应用拉格朗奇定理的一个例子。

至于柯西定理，我们将在下一节中看到它的应用。

思　考　题

1．试叙述拉格朗奇定理。

2．举出拉格朗奇定理的结论在缺少条件下不能成立的例子（以图形举例）。

3．验证函数 $y=\ln x$ 在区间 $[1,e]$ 上满足拉格朗奇定理的条件而且确实具有定理所述的结论。

4．函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $[-1,1]$ 上能否应用拉格朗奇定理，为什么？

5．试比较拉格朗奇中值公式

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x$$

与微分近似公式

$$f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)\Delta x$$

的异同。

6．中值公式（9.1）中的 c 是不是就是 a、b 的中点？试研究函数 $f(x)=x^8$ 在区间 $[0,1]$ 上的情形。

7．能否用下列方法来证明柯西定理，错误在哪里？

因为 $\psi(x)$ 满足拉格朗奇定理的条件，所以有

$$\psi(b)-\psi(a)=(b-a)\psi'(c),\quad (a<c<b);$$

又因为 $\varphi(x)$ 也满足拉格朗奇定理的条件，所以又有

$$\varphi(b)-\varphi(a)=(b-a)\varphi'(c),\quad (a<c<b)。$$

两式相除即得柯西公式

$$\frac{\psi(b)-\psi(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{\psi'(c)}{\varphi'(c)},\quad (a<c<b)。$$

第二节　罗必塔法则

我们在第六章中求极限时，经常遇到求两个无穷小之比的极限，随着这些无穷小的不同，可以有各种不同的结果。对于

两个无穷大之比的极限也是这样。

在习惯上，如果 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 当 $x \to x_0$（或当 $x \to \infty$）时，同时趋于零或绝对值无限变大，就把比

$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$$

叫做当 $x \to x_0$（或当 $x \to \infty$）时的 $\frac{0}{0}$ 型未定式或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式。求这类未定式的极限时，不能直接应用商的极限运算定理。过去，我们在处理这类极限问题时，常感到困难，没有一个一般的方法来解决它。下面，我们将根据柯西定理推出处理这类极限的一种有效的方法，这就是所谓的罗必塔法则。

一、两个无穷小量之比的极限

定理 1. 假设

1. 函数 $\psi(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在 x_0 的某一邻域内（但点 x_0 除外）即在区间 $(x_0-\delta, x_0)$、$(x_0, x_0+\delta)$ 内有定义，而且是连续的；

2. $\lim\limits_{x \to x_0}\psi(x)=0$, $\lim\limits_{x \to x_0}\varphi(x)=0$,

3. $\psi(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在上述两个区间内可导而且 $\varphi'(x) \neq 0$;

4. $\lim\limits_{x \to x_0}\frac{\psi'(x)}{\varphi'(x)}$ 存在（或为 ∞）；

则 $\lim\limits_{x \to x_0}\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ 存在（或为 ∞），而且

$$\lim_{x \to x_0}\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x \to x_0}\frac{\psi'(x)}{\varphi'(x)}。 \tag{9.5}$$

证 首先，补充函数 $\psi(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在 $x=x_0$ 处的定义，令它们在 x_0 处都等于零，即 $\psi(x_0)=0, \varphi(x_0)=0$[1]。根据条件 2，可知经这样补充定义之后的函数 $\psi(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在 $x=x_0$ 处也连续。