

329557

成都工学院图书馆
基本馆藏

电子学译丛

上海市电子学会编译委员会编



14

上海市科学技术编译馆

9
011
4

电 子 学 译 丛

(14)

上海市电子学会编译委员会编

*

上海市科学技术编译馆出版

(上海南昌路59号)

商务印书馆上海厂印刷 新华书店上海发行所发行

*

开本 787×1092 1/16 印张 6 1/2 字数 201,000

1965年8月第1版 1965年8月第1次印刷

印数 1—2,400

编号 15·308 定价(科七) 0.95元

目 录

1. 非綫性电磁介质中电磁波的傳播	1
2. 两平行平板間电磁波束模式的导向傳輸	7
3. YIG 可調滤波器的理論与設計	15
4. 寬頻帶可調行波脉澤	23
5. 4.6 千兆赫寬頻帶参量放大器	29
6. 固体微波发生器的設計	32
7. 測量鉄氧体磁极化率張量所用諧振腔的設計和构造	38
8. 微波相移精密測量	49
9. 标准衰减器及精密衰减測量	58
10. 用“混附振蕩”測定介电常数和損耗正切	67
11. 一种自动微波相位測量装置	73
12. 頻率接近 1 千兆赫的同軸毫伏/毫瓦計	81
13. 准确測定毫米波段相对表面損耗的仪器	88
14. IRE 标准(天綫和波导部分)——波导和波导元件測量	93

1. 非綫性电磁介质中电磁波的傳播

N. Bloembergen

«PIEEE» 1963, 1, pp. 124~131 (英文)

引 言

本文着重描述从声頻到可見光範圍內电磁介质非綫性电极化率和磁化率的物理基础。用少量經典模型來說明物质的普遍非綫性。由于在毫米波、紅外線与光波範圍內非綫性介质的尺寸比波长为大,因而在非綫性导磁率較小的介质中傳播的电磁波是从一个普遍观点来討論的。这包括非綫性介质交界面的边界效应在內。这个理論可适用于一些特殊情况,例如微波中的光調制器,微波的諧波发生器,或者光的参变轉換等等。

非綫性的經典模型

A. 自由电子

現在来研究单个电子在入射电磁波作用下的运动,此电磁波是綫性极化且在 z 方向傳播:

$$E_x = E_0 \cos(kz - \omega t)$$

$$B_y = B_0 \cos(kz - \omega t)$$

$$E_z = B_0$$

而

$$k = \omega c^{-1}$$

电子运动方程为:

$$m\ddot{x} = eE_x - ec^{-1}v_z B_y$$

$$m\ddot{y} = 0$$

$$m\ddot{z} = ec^{-1}v_x B_y \quad (2)$$

洛倫茲力引起在 x 方向与 z 方向运动的諧波。

如将下列富氏級数的解

$$x = \sum (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

$$z = \sum (c_n \cos n\omega t + d_n \sin n\omega t)$$

代入式(2),則未定系数可用电磁場幅度 E_0 或 B_0 的升幂級数来表示。假如仅保留三次幂以下的級数,而 $\cos(kz - \omega t)$ 的空間变化次数也只考虑到三次,我們可得到下列近似解:

$$\begin{aligned} \Delta x = & -\left(1 - \frac{1}{8} \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right) \frac{eE_0}{m\omega^2} \cos(kz - \omega t) \\ & + \frac{1}{24} \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \frac{eE_0}{m\omega^2} \cos(3kz - 3\omega t) \\ \Delta z = & -\frac{1}{8} \frac{\omega_c}{\omega} \frac{eE_0}{m\omega^2} \sin(2kz - 2\omega t) \end{aligned} \quad (3)$$

式中 $\omega_c = eB_0/mc$ 为磁場强度等于 B_0 时的电子回旋頻率。这种非綫性的确是非常小。当可見光脉冲光束能流密度为 2.5 兆瓦/平方厘米时,人們才能得到 $\omega_c/\omega \sim 0.5 \times 10^{-3}$ 。感应的偶极矩 $e\Delta x$ 与 $e\Delta z$ 所辐射的諧波功率与基波散射性的辐射功率相較可以忽略不計。此种基波 ω 的辐射可由著名的湯姆遜散射公式求得。我們的兴趣不在于由能量密度变化引起的不相干散射上,而主要在于单位体积中具有 N_0 个电子的集集体的共同作用。全部散射的子波与入射波的相干迭加与干扰作用可以方便地用熟知的等离子区的介电常数(或极化率)来描述*,

$$\epsilon - 1 = 4\pi x = -4\pi N_0 e^2 / m\omega^2 \quad (4)$$

同样,諧波頻率的极化作用也用一個非綫性极化率来描述。这类宏观量将在 II-B 节中加以較充分的討論。

如果把推导(3)式的方法用于頻率 ω_1 与 ω_2 的两个入射波,則在 z 方向感应的偶极矩将具有两种頻率的和与差的頻率。基波与諧波的其他組合頻率出現在 x 方向。假如一个直流磁場 H_{dc} 是加在 y 方向,这相当于令 $\omega_2 = 0$ 。在这种情况下,一个頻率 2ω 的諧波偶极矩呈现在 x 方向。此时在式(3)中的 $(\omega_c/\omega)^2$ 因子为下列因子所代替,

$$e^2 H_{dc} H(\omega_1) / m^2 c^2 \omega^2$$

在实际的等离子区中,除了洛倫茲力以外尚有其他原因引起非綫性。电子密度中的流体动压力梯度与感应梯度以及碰撞所产生的阻尼作用都需加以考虑。这些項可合并到运动方程中,这方面較全面的討論已由 Whitmer 与 Barrett 作出。

* 本文全部采用 C. G. S. 静电单位制

B. 磁共振

用激励磁共振来产生微波谐波的作用在理論^[6]与实验上都已得到証明。对于一个原子磁自旋系統(这个系統由一个直流磁場 $H_z^{loc} = h_0$ 作用产生靜磁化强度 M_0 , 另外还加上一个綫极化高频場 $H_z^{ac} = h_1 \cos \omega t$, 頻率 ω 接近于磁共振頻率 $\omega_0 = \gamma h_0$) 可用下列 Bloch 方程来描述其运动:

$$\begin{aligned} M_x &= \gamma M_y h_0 - M_z / T_2 \\ M_y &= -\gamma M_x h_0 + M_z \cos \omega t - M_y / T_2 \\ M_z &= \gamma M_y h_1 \cos \omega t - (M_z - M_0) / T_1 \end{aligned} \quad (5)$$

M 的分量也用富氏級数表示, 將級数表示式代入上式, 則例如 M_z 分量将有二次諧波項 $\Delta M_z(2\omega)$

$$= Re \left[\frac{\gamma^2 h_1^2 (i\omega + T_2^{-1})}{(\omega_0^2 - \omega^2 + T_2^{-2} + 2i\omega T_2^{-1})(2i\omega + T_1^{-1})} M_0 e^{2i\omega t} \right] \quad (6)$$

上式中仅保留幂次数到 h_1^2 的項。必須注意, 这个感应的磁偶极矩分母具有諧振特性, 且与作用的高頻場幅度平方成比例, 这是頻率为 2ω 的輻射源。

C. 非簡諧振子

最經常用的經典模型是把电子看作簡諧运动的束縛粒子。Drude 对介电常数与光的折射系数的早期理論就建筑在这样一个模型上。但是很清楚, 电子不是严格的簡諧振子。它們是在原子核与晶格或分子的其他电子的庫倫場中运动, 因而其电位不是位置的严格的二項式函数。原子或分子中的能級不象純簡諧运动的振子那样有着严格相等的能級差別, 它們的頻譜比純簡諧运动的振子所发射的单一譜綫要复杂得多。

假如我們研究下列周期場激发且受阻尼作用的非簡諧振子的运动方程,

$$m\ddot{x} + m\alpha_0^2 x + \alpha' x^2 + \Gamma \dot{x} = eE_{loc} \cos(k \cdot r - \omega t)$$

其結果仍然是: 偏移 Δx 的富氏級数包含諧波分量。假如仅保留激发場的平方項, 則頻率为 2ω 的感应偶极矩为:

$$\begin{aligned} e\Delta x(2\omega) &= Re \left[\frac{\frac{1}{2} (e/m) \alpha' E_{loc}^2}{(\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\Gamma)^2 (\omega_0^2 - 4\omega^2 + 2i\omega\Gamma)} \right. \\ &\quad \left. \cdot \exp\{2i(k \cdot r - 2\omega t)\} \right] \end{aligned} \quad (7)$$

如果非簡諧振子为 $E_1 \cos \omega_1 t + E_2 \cos \omega_2 t$ 場所激发, 則將感应出頻率為两頻率之差与两頻率之和的偶极矩。假如保留場强的更高次幂以及电位的更高次非簡諧項, 就会出現更高次諧波。这些偶极矩是諧波頻率与和差組合頻率的輻射源。

用量子力学处理这一問題表明, 頻率为 2ω 与頻

率為 ω 的感应偶极矩之比具有下列数量級:

$$P^{NL}(2\omega)/P^L(\omega) = eE_{loc} x/h |\omega - \omega_0 + i\Gamma| \quad (8)$$

其中 $x \sim 10^{-8}$ 厘米为原子系統的尺寸范围, 而 $h\omega_0$ 則为原子系統能級之差。設若 $\omega \rightarrow \omega_0$ 以至达到頻寬 Γ 的范围, 則此时非綫性將迅速增加, 而且將如綫极化时一样表現出色散特性。

若基波与諧波頻率都不接近于原子系統的共振頻率, 則即使在場强很强的情况下, 非綫性也是很小的。对場强为 $E_{loc} \approx 30$ 千伏/厘米, 而 $h(y - y_0) \sim 2.5$ 电子伏特的光子能量, 式(8)的比值为 10^{-5} 。

若原子是在对称的中心位置, 則位能必然是位移的偶函数。在这种情况下, 作用力只能有 x 的奇次方項。如果把 $\exp(ik \cdot r)$ 展成 x 的幂級数, 非綫性仅在較高次項 $\alpha'' x^3$ 而不是在 $\alpha' x^2$ 項得到, 或者仅由較高的多重偶极子項得到。对于这些現象更詳細的討論以及用量子力学处理非綫性极化, 讀者可參閱有关文献。这些例子說明电磁非綫性在原子結構上的根源。下一节將給出宏觀性的描述。

宏觀非綫性导磁率

若介质不是光学稠密的, 亦即 $\epsilon - 1 \ll 1$, 則作用在原子系統上的(本地)場与在麦氏方程中的 E 与 B 的宏觀場没有什么区别。这时非綫性极化可以直接从单位体积中粒子数 N_0 以及它們的非綫性偶极矩求出。由于頻率 ω_1 与 ω_2 的两个場 E_1 及 E_2 作用而产生的和頻 ω_3 的极化作用可写出如下:

$$\begin{aligned} P_z^{NL}(\omega_3) &= x(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) : E_1(\omega_1) E_2(\omega_2) \\ &\quad \cdot \exp[i(k_1 + k_2) \cdot r - \omega_3 t] \end{aligned} \quad (9)$$

式中 x 是与三个矢量有关的三阶張量, 它也象压电現象的張量一样具有对称性质。在具有逆对称中心的系統中, 此張量为零。此时, 非綫性仅在高次近似中存在。

在这一点上, 讀者可能会提出这样一个問題: 在光波場矢量分量 E_{1x} 及 E_{2x} 作用下, 为何自由电子气体能具有非綫性极化 P_z^{NL} , 此非綫性极化按式(3)写成下式:

$$\begin{aligned} P_z^{NL} &= -\frac{1}{8} N_0 (e^3/m^2 c \omega^3) E_{1x} E_{2x} \\ &\quad \cdot \sin\{(k_1 + k_2)z - \omega_3 t\} \end{aligned} \quad (10)$$

进一步的研究表明, 极化的方向是与入射波傳播方向有关, 而且也关系到一个磁偶极矩陣元。人們应当写 $P_z^{NL} = x(E_1 \times H_2)$ (其中 x 为一标量值), 其完全对称性质可由下列四阶張量表示出来:

$$P^{NLS} = x(\cdot) : K^0 E_1 E_2 \quad (11)$$

式中 K^0 为上述两个电磁波传播方向的单位矢量。在各向同性介质中, 此张量具有不为零的分量如 x_{zzzz} 。在磁共振实验中由 $H_{z1} H_{z1}$ 感应出的磁极化二次谐波 z 分量也由类似的矩陣元给出。此时单位矢量 K^0 取在样品的直流磁化 M_0 的方向。

在这种磁的非线性模型中, 和在非简谐振子的組成体(此組成体可作为非线性介质晶体的模型)中一样, 本地场会与宏观场有相当大的差别, 这时必须考虑介质中强的线性极化与弱的非线性极化之间的相互作用。这可以象在稠密的线性介质中推导洛伦兹——洛伦兹公式那样来考虑。我们可写出下式:

$$E_{loc} = E + L(P^L + P^{NL}) \quad (12)$$

式中 $P^L + P^{NL}$ 为全部极化, L 为洛伦兹本地场张量。在立方体对称时, 此张量等于标量 $4\pi/3$ 。此时介质电位移为:

$$D = E + 4\pi(P^L + P^{NL}) \quad (13)$$

经过一些运算后, 此式可写为下列形式,

$$D = \epsilon E + 4\pi P^{NLS} \quad (14)$$

式中 ϵ 为线性介电张量, 而其非线性项仍能以式(9)形式表示。非线性磁化率仍然与此非线性极化有关, 但此时比例因子不仅仅为 N_0 。在稠密的立方体介质中, 此比例因子为:

$$\frac{1}{27} N_0 [\epsilon(\omega_1) + 2][\epsilon(\omega_2) + 2][\epsilon(\omega_3) + 2]$$

在不太完全对称的情况下, 该因子为一较复杂的张量函数。

n 阶非线性磁化率张量表明频率为 ω_n 的极化(它是 $n-1$ 个入射波的 $n-1$ 个频率的组合)是如何产生的(该极化在空间的变化是由 $n-1$ 个入射波的场矢量的线性组合所决定)。例如三次谐波的产生是由四阶张量所描述。它是来自三个相等的入射波, $\omega_4 = 3\omega_1 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$, 其感应的三次谐波极化的空间变化则为 $\exp(3k_1 \cdot r)$ 。

非线性张量的色散是所有 n 个频率的函数。除了晶格对称性质外, 此张量还具有下列轮换对称性质:

$$x_{ijkl}(\omega_i = \omega_j + \omega_k + \omega_l) = x_{kjil}(\omega_k = -\omega_j + \omega_l - \omega_i) \quad (15)$$

如果相应地将频率互换, 则上列张量元素的指数是可以互换的。若在包括 ω_1, ω_j 等频率的频率范围内介质没有色散特性, 则张量对其全部指数都是对称的。如果我们以光的微波调制为例, 则上列叙述的物理意义就会立即变得很明显。设若在 y 方向极化

的光波与一个在 z 方向极化的微波在一非线性介质中传播, 则由这些电磁波所产生的频率为 $\omega_1 + \omega_n$ 的 x 方向极化可由决定两个入射光波拍频所产生的 z 方向微波极化的同一常数所决定(此二光波中, 一个光波频率为 ω_1 , 极化于 y 方向, 另一个光波频率为 $\omega_1 + \omega_n$, 极化于 x 方向)。

非线性介质中电磁波的产生与传播

方程式(14)具有由式(9)那样的非线性磁化率张量所决定的非线性源时, 可与麦氏方程联立。为了简单起见, 导磁率取作线性标量。

$$\nabla \times H = + \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t} = + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon E) + \frac{4\pi}{c} \frac{\partial P^{NLS}}{\partial t} \quad (16a)$$

$$\nabla \times E = - \frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} \quad (16b)$$

由此所得的波动方程具有下列形式:

$$\nabla \times \nabla \times E + \frac{\mu}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = - \frac{4\pi\mu}{c} \frac{\partial^2 P^{NLS}}{\partial t^2} \quad (17)$$

若设式(17)右边为零, 则将得到线性介质中的齐次波动方程。在无穷大的各向异性的介质中, 其解为线极化平面波。其次我们来研究频率为 ω_3 的这种平面波与非线性项 $P^{NLS}(\omega_3)$ 的相互作用(此非线性项是由频率为 ω_1 与 ω_2 的两个电磁波所产生)。此时单位体积中所储能量的变化量为:

$$\frac{1}{2} \text{Re} [E_3^* \cdot P^{NLS}]$$

这是由 P^{NLS} 与电场同相位部分的作用所致。这会引起电磁场的相速微小变化。 P^{NLS} 与电场相位不同部分对电磁波所作的功率将为下式给出:

$$- \frac{1}{2} \omega_3 \text{Re} \int_{-\text{周期}} E_3^* \cdot \frac{\partial P^{NLS}(\omega_3)}{\partial t} dt$$

若非线性极化的相位超前, 则对电磁波所作的功为正值, 因而电磁场幅度会逐渐增大。若非线性极化的相位滞后, 则 ω_3 的电磁场幅度会减小。在后一种情况下, ω_1 与 ω_2 的电磁波幅度会增大。频率为 ω_3 与 ω_3 的电磁波同时存在时会产生频率为 ω_1 的非线性极化, 而此非线性极化会对电场 E_1 作正功。三个频率 ω_1, ω_2 与 ω_3 的电磁波之间由非线性极化项构成彼此之间的耦合。

因为非线性作用很小, 因而电磁波的相位与幅度都为缓变函数。我们可推导出得到一组复数形式的幅度耦合方程。当基波与二次谐波全都在 z 方向传播, 且各自的单位极化矢量为 $\hat{a}_1$ 与 $\hat{a}_2$ 时, 则该方

程为下列形式:

$$\begin{aligned} \frac{dA_1^*(\omega)}{dz} &= 4\pi\omega^2 c^{-2} k_1^{-1} (\hat{a}_1 \cdot x(\omega_1 = \omega_2 - \omega_1) : \hat{a}_2 \hat{a}_1) A_2^* A \\ &\quad \cdot \exp\{i(2k_1 - k_2)z\} \\ \frac{dA_2(2\omega)}{dz} &= 8\pi\omega^2 c^{-2} k_2^{-1} (\hat{a}_2 \cdot x(\omega_2) : \hat{a}_1 \hat{a}_1) A_1^2 \\ &\quad \cdot \exp\{i(2k_1 - k_2)z\} \end{aligned} \quad (18)$$

由于式(15)轉換对称的关系,上式中包含 x 的因子是相同的。注意式中具有相位因子 $\exp\{i(2k_1 - k_2) \cdot r\}$ 。故仅在相速完全匹配,亦即 $2k_1 = k_2$ 时,所有体积化单元才能同相辐射。在电子等离子区情况下,在 z 方向感应的二次谐波极化由式(3)决定,此极化是不能辐射的。频率为 2ω 的电磁波本身必须沿 z 方向传播。因此 P^{NLS} 没有平行于电场矢量的分量,而其纵向分量也就没有作用。

由于光学介质的色散特性,一般二次谐波在经过一段距离 z 后与基波形成 180° 的相移,此距离由下式给出:

$$2\omega c^{-1} \{ \epsilon^{1/2}(2\omega) - \epsilon^{1/2}(\omega) \} z = \pi$$

若非线性源与电磁场的相对相位改变符号,则其幅度就得到一个极值。图(1)所示为产生二次谐波的装置。若旋转其中的非线性晶体,则经过此非线性介质的距离就变化。此时会出现最大值与最小值,并为 Terhune 等所观察到。该最大值与最小值的图形如图(2)所示。变更不匹配程度时所产生的二次谐波幅度如图(3)所示。其幅度大小有振荡特性的情况由行波参量放大器理论来看是大家熟知的。Giordmaine 和 Terhune 已经证明,虽然有自然色散现象,基波与谐波的相速在单晶体中是可以匹配的。可以在各向异性的晶体中,用寻常光作一个频率,用非寻常光作另一频率。另外一些使 P^{NLS} 的相位超前于谐波的相位的相位校正方法也已被提出。

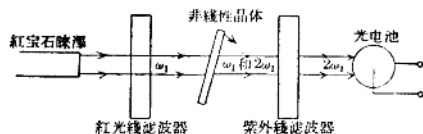


图1 观察产生光波谐波的装置

由理論观点来看,值得指出的是,相位完全匹配时,全部能量可由基波轉到二次谐波。大約百分之七十的能量得到轉換的距离可以称为作用距离 l ,此距离与基波的起始幅度成反比,

$$l = \frac{\epsilon_2 \epsilon_1 \pi}{8\pi^2 E(\omega)} \quad (19)$$

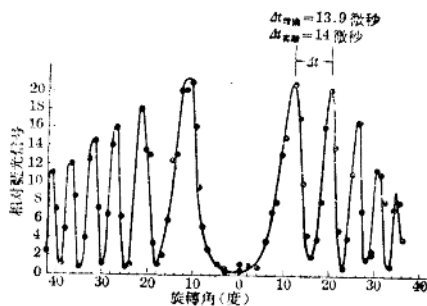


图2 0.0308 吋厚的晶体与紅寶石晶體光束的傾斜角变化所得的二次谐波发生图

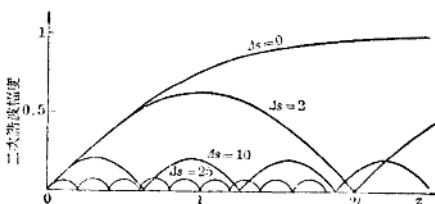


图3 不同程度相位不匹配时所得的二次谐波波幅理論增长图

因为 $K. D. P.$ 的 $\alpha = 6 \times 10^{-10}$ 靜电单位,我們求得在入射光束場强 $E = 30$ 千伏/厘米时, $l = 20$ 厘米。在实际情况下,轉換因光束的面积有限以及晶体的光学性质(它們限制了能保持相位匹配的距离)关系而受到限制。

对三个电磁波的幅度耦合方程組的完全解已被求得。解的两个积分等效于門雷-罗斯关系式

$$\begin{aligned} \frac{(E_1 \times H_1)_z}{\hbar \omega_1} + \frac{(E_3 \times H_3)_z}{\hbar \omega_3} &= \text{常数} \\ \frac{(E_2 \times H_2)_z}{\hbar \omega_2} + \frac{(E_3 \times H_3)_z}{\hbar \omega_3} &= \text{常数} \end{aligned} \quad (20)$$

假如能流密度用每平方厘米每秒通过的光量子数目来表示,上述关系式的物理意义就很清楚了。若由 ω_1 与 ω_2 电磁波各取一个量子, ω_3 电磁波的量子数就增加一个。因此,对各向异性的无损耗介电介质,門雷-罗斯关系式的推导是非常普遍的。

具有非线性源项的非齐次波动方程频率 ω_3 的通解可表示为具有场矢量 K_3 的齐次波动方程的通解与非齐次方程的特解之和,后者具有和非线性源项一样的傳播矢量 $K_1 + K_2$ 。齐次方程解的幅度由边界条件决定。此問題已被綫性化。这是可能的,因为相位近似匹配的获得至多是对频率及其极化的一个組合而言。其它频率的波的幅度很小,其相互作用

* K. D. P. 为 KH_2PO_4 結晶体 — 譯者注

用可忽略不計。本节的考虑可推广到更高次諧波或四个电磁波相互作用的情况。

非綫性介质交界面的电磁波

在光波范围,介质的尺寸一般比波长为大。从一个无穷大平面的交界面的性能可得到綫性介电体中的反射定律与折射定律。而面对一个非綫性介质,使諧波频率的 E 与 H 的切綫分量匹配时就会导致反射以及透射的諧波。

图4表示两个平面波投射在一个非綫性介质上。当平面波透射入介质后,就产生非綫性极化。下面来研究和频率的情况。由于麦氏方程(16a)的结果,将产生一个此频率的磁場,而由于麦氏方程(16b)的结果,则将产生一个此频率的电場。边界条件仅仅在有一个反射諧波时才能得到满足。这些边界条件必須在边界上任何地点都同时有效,因而全部电磁波幅度必須在边界上有象非綫性源一样的空間变化。因此动量矢量的切綫分量保持下来,这种情况如图4所示。这样,均匀反射和透射波的方向就可决定了。

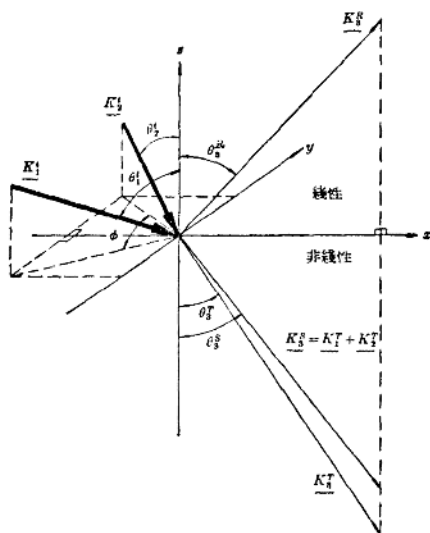


图4 频率为 ω_1 与 ω_2 的入射光波在靠近綫性介质与非綫性介质的边界上产生一反射波、和频率为 $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ 的均匀和非均匀的透射波

这些电磁波的幅度是由 E 与 H 的切綫分量連續所决定。在介质内,均匀电磁波与非均匀的电磁波的干扰产生了諧波,它的幅度是随着离开交界面的距离 z 而綫性增大的。垂直极化于反射面而且沿

k^N 传播的反射波的幅度的解为:

$$E_1^R = 4\pi P_{NL}^N [\epsilon_1^{1/2} \cos \theta_T + \epsilon_2^{1/2} \cos \theta_R]^{-1} \cdot [\epsilon_1^{1/2} \cos \theta_T + \epsilon_2^{1/2} \cos \theta_R]^{-1} \quad (21)$$

式中的角度表明于图4。而 ϵ_2 则由下式决定:

$$\epsilon_2^{1/2} \sin \theta_S = \epsilon_1^{1/2} \sin \theta_T$$

沿 k_S 与 k_T 传播的两个电磁波在垂直极化时可联合为一个沿 z 方向传播的电磁波,其幅度为,

$$E_1^T = E_1^R + 4\pi P_{NL}^N (\epsilon_S - \epsilon_T)^{-1} \cdot [\exp\{i\omega c^{-1}(\epsilon_S^{1/2} \cos \theta_S - \epsilon_T^{1/2} \cos \theta_T)z\} - 1] \quad (22)$$

这个表示式表明,此电磁波有一个与 P_{NL}^N 相位差 90° 的分量(此 P_{NL}^N 沿 z 轴成綫性关系)。距离較大时,当下列表示式接近 π 值时,

$$\omega c^{-1}(\epsilon_S^{1/2} \cos \theta_S - \epsilon_T^{1/2} \cos \theta_T)z$$

相位就失配。此时透射电磁波的幅度表现出振荡特性。

对极化于反射面的情况,非綫性介质为一薄片的情况以及其他情况都已被詳細研究过(包括把一些熟知的光学定律如 Snell 定律, Fresnel 定律, Brewster 角度,全反射推广至諧波频率电磁波)。透镜与三棱鏡产生这类电磁波也从几何光学的近似得知。涉及非綫性介质的繞射問題尚未得到足够仔細的研究。

假如介质尺寸比波长为小(微波与射电频率常是这样情况),电磁波传播效应不是重要的,但在交界面的去极化效应則需加以考虑。在橢圓形状时,用式(12)的 $L-N$ 代替无穷大介质的洛倫茲張量 L 就可以。式中 N 代表去磁化張量。这里,非綫性极化也可用原子系統内部非綫性极化度代表。因为样品比波长小,因而全部体积单元輻射都是同相的,其全部偶极矩 P_{NL}^N (其中 V 为样品的体积)的輻射也可直接计算出来。

設介质在 x 方向具有有限尺寸 d ,則在此方向的动量守恒仅是近似的。下列不等式

$$K_{1x} + K_{2x} - K_3 < 2\pi d^{-1}$$

将保証垂直于 x 方向的不同介质层没有破坏性干扰。

非綫性損耗过程

上述討論在有綫性吸收損失时仍然适用,此时可使綫性介电常数为复数来考虑此損失。在磁共振与非諧振子的模型中,非綫性极化的計算帶有綫性阻尼項。諧波频率的功率电平当然不能在吸收損

失等子或大于非线性发生率的地方建立。由于接近谐振吸收线时非线性极化本身增加非常快(因为式(6)与式(7)中谐振分母关系),最大谐波往往产生在分子系统谐振的时候,这已在微波范围中证明过了。如果接近一个尖锐而强烈的光波谐振线时,也可预料光波谐波的产生会有着类似的迅速增加。然而其情况将由于下一个事实而更加复杂化:其他能级可能在不同程度上影响非线性以及吸收系数。

线性吸收过程的效应应当与非线性吸收过程严加区别,在非线性吸收过程中,两个或两个以上的量子同时参加。两个量子过程导致吸收系数与强度本身成比例。对此现象的解说引入一个非线性源项,此项包含下列四阶张量复数元素:

$$P_{xx}^{NL}(w_1) = (x' - ix'')_{xxxx} E_{1x} E_{1x}^* E_{1x} \quad (23)$$

其中 x'' 代表 w_1 的两个量子吸收效应, x' 则形成 w_1 的折射系数随强度变化的效应。后一效应可认为对电磁波本身的二次 Kerr 效应。设从沿 x 轴极化的电磁波吸收一个量子,其频率为 w_1 ;而同时从沿 y 轴极化的电磁波吸收另一个量子,其频率为 w_2 , 则可得:

$$P_{yy}^{NL}(w_2) = (x' - ix'')_{yyxx} E_{2y}(w_2) E_{1x}^*(w_1) E_{1x}(w_1) \quad (24a)$$

$$P_{xx}^{NL}(w_1) = (x' - ix'')_{xxyy} E_{1x}(w_1) E_{2y}^*(w_2) E_{2y}(w_2) \quad (24b)$$

其中张量元素 $x' - ix''$ 是 w_1 与 w_2 两个频率的函数。

我们特别感到兴趣的是 Raman 过程,在这个过程中一个 $\hbar w_1$ 量子被吸收,而一个较小量子 $\hbar w_2$ 被放出,此时原子系统的能量升高了 $\hbar(w_1 - w_2)$ 数值,这数值可能相当于分子的振动激发(如图 5 所示)。在这种情况下,式(24a)的右边的 $x''(w_2)$ 是负值,这相应于 w_2 频率的放射。我们得到 w_2 频率的负吸收系数且其值与 w_1 电磁波强度成比例。设 w_1 频率的电磁波是足够的强,则 w_2 频率的放大作用可能比介质中损耗或 Fabry-Perot 反射平板中损耗为大(在此平板间插入陈泽晶体,此晶体供给 w_1 频率的电磁场)。Raman 陈泽的这种运用最近为 Woodbury 所发现。

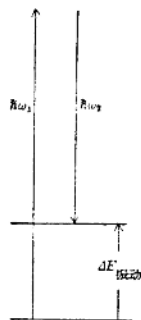


图 5 同时吸收光子 $\hbar w_1$ 发射光子 $\hbar w_2$ 的 Raman 过程

(参考文献从略)

(吴彝尊译 陶尚平、易钟炳校)

2. 两平行平板間电磁波束模式的导向傳輸

中原 恒雄

《電氣通信学会雜誌》1964, 2, pp. 188~196 (日文)

引 言

自从1961年5月 G. Goubau 等提出^{[1], [2]}电磁波束的傳輸以来, 不少人甚感兴趣。本文作者^[3]首先在1961年8月利用电磁波技术和准光学技术, 在两块平行金属板之間周期地配置翼形相位变换器作成如图1的新型結構, 提出了H型束射波导来进行分析。1961年12月 F. Schwering^[5]使用了由矩形相位变换器系統所組成的束射波导。最近 J. B. Beyer 和 E. H. Scheibe 进一步論述了 Goubau 的圓形相位变换器系統中的高次模式^[6], 同时还进行了基波的諧振实验^[7]。电磁波束模式理論和应用腔諧振器的共焦諧振理論的类似点在許多文章中已有报道^{[8], [9], [10]}, 这些见解可以认为与本文所采用的物理概念和实验理論有着很密切的关系。

基本形式的推导

如图1所示, 我們来研究沿着直角座标的 z 軸以傳播常数 h 在間隔为 $2z_0$ 周期地配置于两块金属

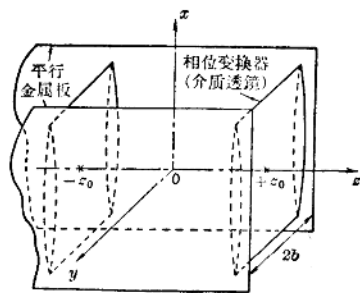


图1 H型束射波导

平板之間的相位变换器中傳播的电磁波束。相位变换器的作用是把向 x 方向扩散的波束会聚起来(文献[1]把它作为一維問題来討論, 詳細情况在場分布函数的性质一节中将有說明)。 y 方向場分布是正弦波状态, 而 x 方向上可能存在任意分布的形式, 如利用 Fourier 积分法, 則可由麦克斯韦方程来作为对图1結構的电磁波的一般表示式, 它受到下式的限制:

$$h^2 + \left(\frac{m\pi}{2b}\right)^2 + \beta^2 = k^2 \quad (1)$$

在这个条件下可得到式(2)如下:

$$\left. \begin{aligned} E_x &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left(\frac{m\pi}{2b}y + \delta_m\right) \int_0^\infty \frac{\beta f(\beta)}{h^2 - k^2} \left(Ah\beta + Bk\frac{m\pi}{2b} \right) \begin{pmatrix} \sin \\ -j \cos \end{pmatrix} \beta x e^{-jhz} d\beta \\ E_y &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(\frac{m\pi}{2b}y + \delta_m\right) \int_0^\infty \frac{\beta f(\beta)}{h^2 - k^2} \left(Ah\frac{m\pi}{2b} - Bk\beta \right) \begin{pmatrix} \cos \\ j \sin \end{pmatrix} \beta x e^{-jhz} d\beta \\ E_z &= j\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left(\frac{m\pi}{2b}y + \delta_m\right) \int_0^\infty Af(\beta) \begin{pmatrix} \cos \\ j \sin \end{pmatrix} \beta x e^{-jhz} d\beta \\ H_x &= \eta\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(\frac{m\pi}{2b}y + \delta_m\right) \int_0^\infty \frac{\beta f(\beta)}{h^2 - k^2} \left(-Ak\frac{m\pi}{2b} + Bh\beta \right) \begin{pmatrix} \cos \\ j \sin \end{pmatrix} \beta x e^{-jhz} d\beta \\ H_y &= \eta\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left(\frac{m\pi}{2b}y + \delta_m\right) \int_0^\infty \frac{\beta f(\beta)}{h^2 - k^2} \left(Ak\beta + Bh\frac{m\pi}{2b} \right) \begin{pmatrix} \sin \\ -j \cos \end{pmatrix} \beta x e^{-jhz} d\beta \\ H_z &= -j\eta\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(\frac{m\pi}{2b}y + \delta_m\right) \int_0^\infty Bf(\beta) \begin{pmatrix} \sin \\ -j \cos \end{pmatrix} \beta x e^{-jhz} d\beta \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中 $\delta_m = 0$ ($m=1, 3, 5, \dots$), $\delta_m = \frac{\pi}{2}$ ($m=0, 2, 4, \dots$), β 是 x 方向的传播常数, $f(\beta)$ 是振幅或权重函数, $\eta = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}$, $k = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$, ω 是角频率, ϵ_0 及 μ_0 是空间媒质的介电常数及导磁率, 使用 MKS 有理化单位制。时间因子 $e^{-j\omega t}$ 从略, A 和 B 是任意常数。() 内的上行和下行分别是偶模式以及奇模式, 相对应的 $f(\beta)$ 则分别是 β 的偶函数以及 β 的奇函数。 $m=0$ 时, 场分量只有 E_y , H_x 和 H_z , 而波束则变成 TE 模式。这种状态是和图 2 所示的在无限长的翼形相位变换器系统中的波束模式相同。图 2 的情况也存在变换了电场和磁场的 TM 模式。这样的情况, 在式(2)中设 $A=0$ 或 $B=0$ 就行。当 $m \gg 1$ 时, 一般会出现混合模式, 所以考虑 $H_x=0$ 及 $E_x=0$ 的情况是方便的。即考虑在 $A=1$ 和 $B=k m \pi / 2 b \beta b$ 以及 $A=1/\beta$ 和 $B=-2 b b / k m \pi$ 的情况。因 $f(\beta)$ 尚未确定, 所以即使任意选定 A 及 B 也可以普遍适用, 对于图 1 的结构可以假定存在 H(TE) 模式、EH 模式 ($H_x=0$)、HE 模式 ($E_x=0$) 等三个模式群。一般电磁场都可由这些模式的一次耦合来表示。

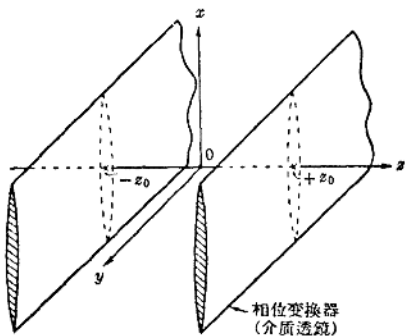


图 2 无限平面射束波导

这里是假定 β 比其他传播常数小。即它满足 $\beta^2 \ll k_m^2 \equiv k^2 - (m\pi/2b)^2$ 条件。如果采用 Goubau 的理论⁽¹⁾ 和上面这个假定, 就可求出在图 1 或者图 2

$$E_x = 0$$

$$E_y = \sin\left(\frac{m\pi}{2b}y + \delta_m\right) \frac{2b}{m\pi} k_m e^{-jk_m z} \begin{pmatrix} g_{cm}(x) \\ g_{sm}(x) \end{pmatrix}$$

$$E_z = j \cos\left(\frac{m\pi}{2b}y + \delta_m\right) e^{-jk_m z} \begin{pmatrix} g_{cm}(x) \\ g_{sm}(x) \end{pmatrix}$$

$$H_x = \eta \sin\left(\frac{m\pi}{2b}y + \delta_m\right) \frac{2b}{m\pi} k^2 e^{-jk_m z} \begin{pmatrix} g_{cm}(x) \\ g_{sm}(x) \end{pmatrix}$$

$$H_y = j \eta \cos\left(\frac{m\pi}{2b}y + \delta_m\right) \frac{1}{k} e^{-jk_m z} \begin{pmatrix} G_{cm}(x) \\ G_{sm}(x) \end{pmatrix}$$

$$H_z = -\eta \sin\left(\frac{m\pi}{2b}y + \delta_m\right) \frac{2b}{m\pi} \frac{k_m}{k} e^{-jk_m z} \begin{pmatrix} G_{cm}(x) \\ G_{sm}(x) \end{pmatrix}$$

[HE 模式] (5)

的重复相位变换器系统中的电磁波束模式。这些模式实质上可以用 $\beta^2 \ll k_m^2$ 范围内的 β 光谱来表征, 所以实函数 $f(\beta)$ 仅在 $0 < \beta < \beta_c$ ($\beta_c^2 \ll k_m^2$) 范围内具有有效值。设相位变换器相距间隔的二分之一为 z_0 , $\beta_c z_0 / 2k_m$ 约为 2π 数量级, 则式(2)的 $\exp(-jh z)$ 项的传播常数 h 可近似于 $(k_m - \beta^2 / 2k_m)$, 其次, 式(2)的振幅项中的 h 可近似于 k_m , $(k^2 - \beta^2)$ 可近似于 k^2 。若把以上的近似值代入式(2), 则 EH 模式的场分量表达式为:

$$\left. \begin{aligned} E_x &= j \cos\left(\frac{m\pi}{2b}y + \delta_m\right) \frac{k^2}{k_m^2} e^{-jk_m z} \begin{pmatrix} g_{sm}(x) \\ g_{cm}(x) \end{pmatrix} \\ E_y &= \sin\left(\frac{m\pi}{2b}y + \delta_m\right) \begin{pmatrix} \frac{m\pi}{2b} \\ \frac{m\pi}{2b} \end{pmatrix} \\ &\quad \times \frac{1}{k_m} e^{-jk_m z} \begin{pmatrix} G_{cm}(x) \\ G_{sm}(x) \end{pmatrix} \\ E_z &= j \cos\left(\frac{m\pi}{2b}y + \delta_m\right) e^{-jk_m z} \begin{pmatrix} G_{cm}(x) \\ G_{sm}(x) \end{pmatrix} \\ H_x &= 0 \\ H_y &= j \eta \cos\left(\frac{m\pi}{2b}y + \delta_m\right) k e^{-jk_m z} \begin{pmatrix} g_{sm}(x) \\ g_{cm}(x) \end{pmatrix} \\ H_z &= -\eta \sin\left(\frac{m\pi}{2b}y + \delta_m\right) \\ &\quad \times \frac{m\pi}{2b} \frac{k}{k_m} e^{-jk_m z} \begin{pmatrix} g_{sm}(x) \\ g_{cm}(x) \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} g_{cm}(x) &\equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f_{cm}(\beta) \cos \beta x e^{j \frac{\beta^2}{2k_m} z} d\beta \\ g_{sm}(x) &\equiv j \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f_{sm}(\beta) \sin \beta x e^{j \frac{\beta^2}{2k_m} z} d\beta \\ G_{cm}(x) &\equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f_{cm}(\beta) \cos \beta x e^{j \frac{\beta^2}{2k_m} z} \beta d\beta \\ G_{sm}(x) &\equiv j \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f_{sm}(\beta) \sin \beta x e^{j \frac{\beta^2}{2k_m} z} \beta d\beta \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

(在上面的式子里, $f_{cm}(\beta)$ 及 $f_{sm}(\beta)$ 是 β 的偶函数及 β 的奇函数);

则 HE 模式的场分量表达式为:

H 模式是 HE 模式中 $m \rightarrow 0$ 的特殊情况, 这里从略。

电磁场基本上由横电磁场决定, 至于传输能量, 在 EH 模式时由 $(E_x H_y)$ 决定, 在 HE 模式时由 $(-E_y H_x)$ 决定, 因此只研究它们的分量。由式(3)和式(5)可知, 研究 $g_{cm}(x)$ 以及 $g_{sm}(x)$ 就可以求出上述分量在 x 方向的场分布函数。在数学上, 由式(4)给出的积分式 $g_{cm}(x)$ 和 $g_{sm}(x)$ 就是场的基本表达式, 研究它就可以了解场的性质。

场分布函数的推导

如果式(4)可以用理想正交函数系展开, 则由式(3)或者式(5)就能直接求出波束的固有模式。可以预料, 现在的情况, 在 $-\infty < x < \infty$ 范围内作为构成理想的正交函数系来说, 利用乘以权重函数 $\exp(-x^2/2)$ 的 n 次 Hermite 多项式^[11] $H_{en}(x)$ 是适当的。

Hermite 多项式可定义为:

$$H_{en}(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2/2}) \\ = \sum_{r=0}^{[n/2]} (-1)^r (2r-1)!! \binom{n}{2r} x^{n-2r} \quad (6)$$

$$g_{cm}(x) = \frac{\sqrt{2} \beta_0}{\sqrt{1+v^2}} e^{-\frac{u^2}{1+v^2}} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} C_{2\nu} H_{e2\nu} \left(\frac{2u}{\sqrt{1+v^2}} \right) \exp \left[-j \frac{u^2 v}{1+v^2} + j \left(2\nu + \frac{1}{2} \right) \tan^{-1} v \right] \\ g_{sm}(x) = \frac{\sqrt{2} \beta_0}{\sqrt{1+v^2}} e^{-\frac{u^2}{1+v^2}} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu+(1/2)} C_{2\nu+1} H_{e2\nu+1} \left(\frac{2u}{\sqrt{1+v^2}} \right) \exp \left[-j \frac{u^2 v}{1+v^2} + j \left(2\nu + \frac{3}{2} \right) \tan^{-1} v \right] \quad (11)$$

式中

$$u = \beta_0 x, \quad v = \frac{2\beta_0^2 z}{k_m} \quad (12)$$

因此可以认为, 波束是由式(11)各项所表示的元波束的迭加。显然, 这些元波束好象通常无损耗波导一样作为固有模式而满足正交关系。用 n 代替 2ν 或 $2\nu+1$, 则由式(11)可使 $g_{cm}(x)$ 和 $g_{sm}(x)$ 变成完全相同的形式, 所以就可以确定 EH_{nm}、HE_{nm} 及 H_{no} 模式为图 1 的固有波束模式。 $n=0$ 时是基波, EH₀₁、HE₀₁ 及 H₀₀ 是各模式系中的最低模式。

场分布函数的性质

各波束模式在 $z=0$ 的平面内是同相位的, 而当 $z \neq 0$ 时, 由式(11)可知, 它的相位分布决定于下式:

$$\exp \left\{ j \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \tan^{-1} v - \frac{u^2 v}{1+v^2} \right] \right\} \\ = \exp \{ j [\phi_n(z) + \psi(x, z)] \} \quad (13)$$

式中 $(2r-1)!! = (2r-1)(2r-3)\dots, [n/2]$ 是 Gauss 符号, 表示不超过 $n/2$ 的最大整数。

正交关系是当 $n \neq m$ 时, $\delta_{nm} = 0$; $n = m$ 时, $\delta_{nm} = 1$, 可用下式表示:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} H_{en}(x) H_{em}(x) dx = \delta_{nm} n! \sqrt{2\pi} \quad (7)$$

如果 n 是偶数则 $H_{en}(x)$ 是偶函数, 如果 n 是奇数则 $H_{en}(x)$ 是奇函数, 所以式(4)的 $f_{cm}(\beta)$ 和 $f_{sm}(\beta)$ 可由任意常数 β_0 展开成式(8)的形式。

$$\left. \begin{aligned} f_{cm}(\beta) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} C_{2\nu} \varphi_{2\nu}(\beta) \\ f_{sm}(\beta) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} C_{2\nu+1} \varphi_{2\nu+1}(\beta) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式中

$$\varphi_n(\beta) = \exp \left(-\frac{1}{4} \frac{\beta^2}{\beta_0^2} \right) H_{en} \left(\frac{\beta}{\beta_0} \right) \quad (9)$$

$$C_n = \frac{1}{n! \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{4} \frac{\beta^2}{\beta_0^2}} H_{en} \left(\frac{\beta}{\beta_0} \right) f(\beta) d \left(\frac{\beta}{\beta_0} \right) \quad (10)$$

这个展开级数收敛于 $f_{cm}(\beta)$ 和 $f_{sm}(\beta)$, j 实际的场分布是一致的, 所采用的正交函数系是理想的说明了这一点。

把式(8)~(10)代入式(4)计算其积分, 就得到下面结果(推导参照附录)。

式中 $\phi_n(z)$ 与 x 无关, 由式(14)给出。 $\psi(x, z)$ 与 Hermite 多项式的次数 n 无关, 由式(15)给出。

$$\phi_n(z) = \left(n + \frac{1}{2} \right) \tan^{-1} (2\beta_0^2 z / k_m) \quad (14)$$

$$\psi(x, z) = -\frac{2\beta_0^2 z / k_m}{1 + (2\beta_0^2 z / k_m)^2} \beta_0^2 x^2 \quad (15)$$

如果 $z = +z_0$ 时相位变换了 $\exp[-j2\psi(x, z_0)]$, 那么为了区别不变的相移量 $2\phi_n(z_0)$, 则各波束模式在 $z = -z_0$ 处的场分布应该是重复的。所以

$$\hat{\psi}(x) = -2\psi(x, z_0) + \psi_0 \\ = \frac{4\beta_0^2 z_0 / k_m}{1 + (2\beta_0^2 z_0 / k_m)^2} \beta_0 x^2 + \psi_0 \quad (16)$$

对上式所给出的 $\hat{\psi}(x)$, 如按照 x 的数值来进行相位补偿, 则可使各元波束在 $2z_0$ 的间隔中依次重复出现。

在式(16)中, ψ_0 是任意常数。一般说来, 式(16)是能够给出满足相位变换器的特性, 不过, 下面将谈到, 为了获得最大会聚度的相位变换器的特性还受

到其他因素的限制。因 $\psi(x)$ 不包含 n , 所以 m 是相等的任意波束模式可由式(16)得到重复的同相位变换。而由 n 不相等的几个波束模式的一次耦合所得到的电磁波模式, 因 n 不同, 式(14)所给出的相移量 $\phi_n(z)$ 不会重复出现的。这些条件和 Goubau 透镜系统^[1] 或者普通波导的情况完全相同。与表面波线路一样, 某一波束模式的能量会聚度在线路的某一截面内可以用通过 $+x_p > x > -x_p$ 范围的传输能量和通过 $+\infty > x > -\infty$ 范围的能量之比值 P_n 来表示。现在的情况是, 当考虑某一 P_n 值时, x_p 将随 z 而变。 $x_p(z)$ 可由式(11)的振幅项求得, 它给出能量会聚度不变的包络面。

利用式(7)并以 $t = 2u \sqrt{1+v^2}$ 代入, 则 P_n 为

$$P_n = 2 \int_0^{t_0} \frac{1}{n! \sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} \{H_{en}(t)\}^2 dt \quad (17)$$

式中

$$t_0 = 2\beta_0 x_p / \sqrt{1 + (2\beta_0^2 z/k_m)^2} \quad (18)$$

令式(17)的被积分项的平方根为 $\varphi_n(t)$, 则它就是归一化固有函数, 并由媒质变量 t 给出有助于能量传输的横向场分量在 x 方向上的变化。为了解电磁场的分布情况, 可应用电子计算机求出 $\varphi_n(t)$ 相对于 t 的变化情况, 其结果示于图3。当 $n=0$ 时, $H_{e0}(t)=1$, 所以 $\varphi_0(t)$ 变成 Gauss 分布, 可以看出它具有如下优点: 即能量会聚于中央部分大于表面波线路的指数衰减函数分布, 而离开了中央部分电磁场就快速衰减。由式(17)和式(18)可知, P_n 是 x_p 及 z 的函数, 但是它不能通过单以 t_0 为媒质的部分。因此 P_n 不变和 t_0 不变是等效的, 通过式(18)可把在这种条件下的 x_p 和 z 的关系归一化如下:

$$\left(\frac{x_p}{\xi_0}\right)^2 = \left(\frac{z}{z_0}\right)^2 v_0 + \frac{1}{v_0} \quad (19)$$

式中

$$v_0 = 2\beta_0^2 z_0 / k_m, \quad \xi_0 = t_0 \sqrt{z_0 / 2k_m} \quad (20)$$

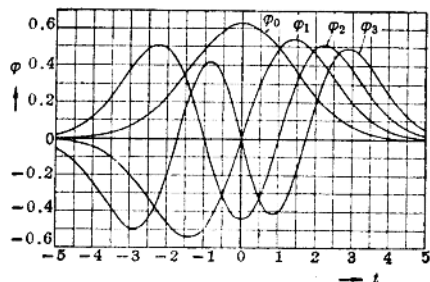


图3 波束模式归一化固有函数随 x 的变化

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{(n! \sqrt{2\pi})^{1/2}} e^{-(t/2)} H_{en}(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

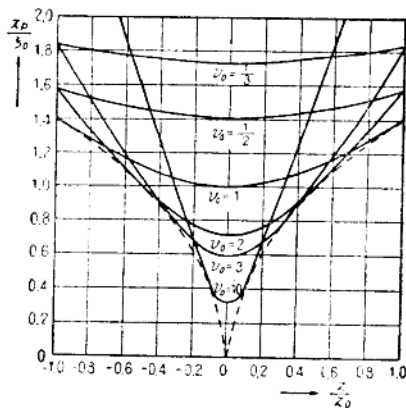


图4 在归一化座标中会聚度恒定的包络面

$$\left(\frac{x_p}{\xi_0}\right)^2 = \left(\frac{z}{z_0}\right)^2 v_0 + \frac{1}{v_0}$$

$$v_0 = 2\beta_0^2 z_0 / k_m$$

$$\xi_0 = t_0 \sqrt{z_0 / 2k_m}$$

把 v_0 作为补偿变量求出 x_p/ξ_0 相对于 z/z_0 的变化情况, 得到如图4的结果。观察图4就可看出, 传输能量在相位变换器的 $z = \pm z_0$ 处最分散, 而在它的中央 $z=0$ 处最集中。并且这种分布是随 v_0 而变的。从式(20)可知, 当由相位变换器所确定的 z_0 和由频率以及两平行板间隔所确定的 k_m 都给出后, v_0 就可由任意常数 β_0 来决定。实用上在能量最分散的 $z = \pm z_0$ 处获得最大会聚度是有利的。为了求出这个条件, 利用式(19)并令 $[\partial(x_p/\xi_0)/\partial v_0]_{z=z_0} = 0$ 就可得到 $v_0=1$ 。即 $\beta_0 = \sqrt{k_m/2z_0}$ 时会聚度变为最大, 这个数值与 n 无关, 这时式(16)的 $\psi(x)$ 变成

$$\psi(x) = k_m x^2 / 2z_0 + \varphi_0 \quad (21)$$

这就是相位变换器设计的必要基本公式, 情况和 Goubau^[1] 透镜系统相同。作为数据实例, 我们来看 EH₀₁ 模式, 这时式(17)的 P_n 与 Gauss 的误差函数相一致, 所以由图表可得到, 对应于 P_n 为 99.9%、99.5%、99%、95%、90% 和 50%, t 分别为 3.30、2.81、2.55、1.96、1.65 和 0.675。在最大会聚度的情况下式(18)变成

$$\sqrt{k_m/2z_0} \cdot x_p = \frac{t_0}{2} [1 + (z/z_0)^2]^{1/2} \quad (22)$$

对应于已给出的 t_0 可得到随 z 而变的 x_p 值。假定两平行板的间隔为 $2b=5$ 厘米, 相位变换器的间隔为 $2z_0=10$ 米, 频率为 60 千兆赫, 则对应于上述 P_n 值, 在相位变换器处的 x_p 分别为 6.56、5.59、5.06、3.90、3.28 和 1.35 厘米。

为了获得最大会聚度的相位变换器的设计可由

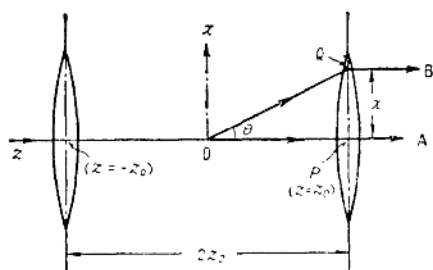


图5 最大会聚度相位变换器的物理意义

式(21)给出,至于它的物理意义,下面我们将抽出两个相邻的相位变换器来研究,如图5所示。现在假定有元波从两个变换器的 z 轴上的中央 O 点发射,令通过右边变换器中心 P 点的元波为 A ,而令以角度 θ 发射并通过距 P 点上方 x 处的 Q 点的元波为 B 。用波数 k_m 乘以 OP 和 OQ 的几何距离误差 Δ ,就可得出元波 A 和元波 B 的相位差 $\psi(x)$,参照图5则

$$\begin{aligned}\psi(x) &= k_m \Delta = k_m (OQ - OP) \\ &= k_m z_0 [\sqrt{1 + (x/z_0)^2} - 1]\end{aligned}$$

因现在所考虑的范围是 $z_0 \gg x$,所以

$$\psi(x) \approx k_m x^2 / 2z_0 \quad (z_0 \gg x) \quad (23)$$

将式(21)和式(23)相比就可看出,获得最大会聚度的相位变换器是使图5中的元波 A 和元波 B 变成平行状态,而在光学上则与焦距为 z_0 的透镜等效。由此可知,相位变换器的设计以及结构和尺寸可用准光学方法求出,而它的截面则与 Christian 和 Goubau^[2] 等所给出的一样。设计实例与文献(2)相同,这里省略。

Goubau^[3] 等仅说明了电磁波束模式和光在重复透镜中的传输的不同概念,但是我们可以利用上述的等效焦距,由图6从现象上来探讨两者之间的

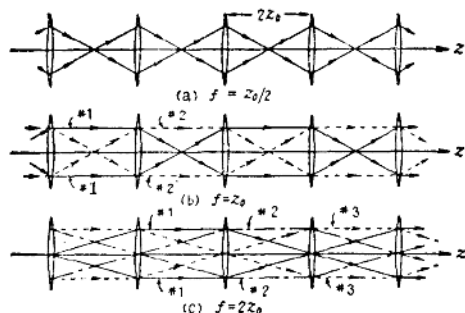


图6 在重复透镜中所得到的光传输和电磁波束模式的关系 f : 焦距

关系。光在间隔为 $2z_0$ 的透镜系统中的传输情况,一般可用图6中的(a)、(b)及(c)三种方法来研究。它们的焦距 f 分别是 $z_0/2$ 、 z_0 及 $2z_0$ 。(a)的情况是一个点光源,具有 $2z_0$ 的周期。而(b)或(c)的情况是考虑*1和*2两个点光源或*1~*3三个点光源,两者仍具有 $2z_0$ 的周期。这就是说,如用相当于2~3个点光源的光度分布进行激励的话,那么每隔 $2z_0$ 就能重复出现一次光度分布。这也就是电磁波束模式的概念,(a)、(b)和(c)三种情况与图4中的 $v_0 = 1$ 、 $v_0 = 1$ 、 $v_0 < 1$ 相对应。式(21)可以认为是表示如图6情况的最大会聚度的条件。

电磁波束模式存在于空间和相位变换器两种媒质里,显然,两者都是麦克斯韦方程的解,但是把整体考虑为某一媒质时, x 方向(柱面坐标系的半径方向)的固有函数就变成 Schrödinger 方程的解,这是很有趣的问题,它暗示着能量分布是最自然最稳定的。如用量子力学模型,可假定 Goubau 等^[1]所采用的柱面坐标系半径方向上的分布函数 $\exp(-x/2)x^l$ 为原子核的 Laguerre 多项式 $L_{nl}^{(1)}(x)$,如众所周知,它就是氢原子时的半径方向固有函数。本文所采用的 x 方向分布函数 $\exp(-t^2/4)H_n(t)$ 是属于某一粒子在 x 轴上一面受到与原点的距离成比例的引力,一面又用不变的振动频率以原点为中心不断振动的情况,即与一维谐振子在 x 方向上的固有函数相同。图6中,如把光考虑为粒子,那么它的物理模型就更容易理解了,这时可以解释为透镜具有使粒子在 x 方向上作调谐振动的的作用。其次,透镜也可以考虑成为了使光度分布函数重复出现的一种算符,表示上述波束模式本质的积分方程式的物理意义将在下一节中进一步阐明。以上的探讨虽然将量子力学知识反过来用于电磁波束模式,但是它有助于了解各种各样的应用。

有限截面的影响

以上的讨论是假定两平行平板以及相位变换器在 x 方向上是无限延长的。实际上,它的结构在 x 方向上是有限的,所以应考虑用 $x = \pm \xi$ 平面切断线路的情况。这时,原来可以扩散到电路外侧去的能量将变成衍射损耗,因而增加了传输损耗,同时对内侧电磁场来说也受到微扰而产生若干畸变。严格地说作为泄漏波导,必须考虑在 $x = \pm \xi$ 开路面的内外电磁场的连续条件,不过这里只要求知道大概的现象就可以了,为此假定外侧电磁场相当于被设置在

$x = \pm \xi$ 处的理想电磁波吸收壁, 它没有反射, 所以 x 方向的阻抗是匹配的。利用式(4), 在 $z = -z_0$ 处, x 方向场分布函数受到相位补偿如下:

$$\left. \begin{aligned} g_{cm}(x, -z_0) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f_{cm}(\beta) \cos \beta x \exp\left(-j \frac{\beta^2}{2k_m} z_0\right) d\beta \\ g_{sm}(x, -z_0) &= j \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f_{sm}(\beta) \sin \beta x \exp\left(-j \frac{\beta^2}{2k_m} z_0\right) d\beta \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

现在可以预料 $f_{cm}(\beta)$ 和 $f_{sm}(\beta)$ 将变成复函数。下面为了近似计算, 我们来讨论 g_{cm} , 而 g_{sm} 只在得到重要结果时才把它的式子并列出来。在式(24)中, $g_{cm}(x, -z_0)$ 可以认为是 $f_{cm}(\beta) \exp(-j\beta^2 z_0 / 2k_m)$ 的 Fourier 余弦变换, 而被变换函数又可以假定为在采用物理量的性质上是有场变动且连续的。因此, 很明显 Fourier 积分式成立, 如果 $g_{cm}(x, -z_0)$ 给定, 则 $f_{cm}(\beta)$ 可由反变换求出:

$$f_{cm}(\beta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left(j \frac{\beta^2}{2k_m} z_0\right) \cdot \int_0^\xi g_{cm}(x, -z_0) \cos \beta x dx \quad (25)$$

现在的情况, 因 $g_{cm}(x, -z_0)$ 受吸收壁的限制, 所以式(25)的积分区间是由 $[0, \xi]$ 来代替 $[0, \infty]$ 。在受到相位补偿之前, 在 $z = +z_0$ 处的电磁场可把式(25)的 $f_{cm}(\beta)$ 代入式(4)求出:

$$g_{cm}(x, +z_0) = \frac{2}{\pi} \int_{\beta=0}^\infty \int_{\xi=0}^\xi g_c(\xi, -z_0) \cos \beta \xi \cos \beta x e^{j\beta^2 z_0 / k_m} d\beta d\xi$$

对 β 的积分可用下式计算^[13]:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \cos \beta \xi \cos \beta x \exp\left(j \frac{\beta^2}{k_m} z_0\right) d\beta \\ &= \frac{1}{2} \left(j \frac{\pi k_m}{z_0} \right)^{1/2} \exp\left[-j \frac{k_m}{4z_0} (\xi^2 + x^2)\right] \\ & \quad \cdot \cos\left(\frac{k_m \xi x}{2z_0}\right) \end{aligned} \quad (26)$$

因此得到

$$g_{cm}(x, +z_0) = \left(\frac{j k_m}{\pi z_0} \right)^{1/2} \int_{\xi=0}^\xi g_{cm}(x, -z_0) \cdot \cos\left(\frac{k_m \xi x}{2z_0}\right) e^{-\frac{j k_m}{4z_0} (\xi^2 + x^2)} d\xi \quad (27)$$

这个电磁场受到相位补偿后, 在 $x = \pm \xi$ 的外侧变为 0, 在内侧有若干场畸变, 但是如果适当增大 ξ 则这种畸变可以忽略。可以认为, 这种畸变在式(21)的最大会聚度条件下是最小的。应用最大会聚度条件, 在 $z = +z_0$ 处受到相位补偿之后, 在 $x = \pm \xi$

内侧的电磁场就可通过式(21)变成:

$$g_{cm}(x, +z_0) \exp\left[j \left(\frac{k_m x^2}{2z_0} + \psi_0 \right)\right]$$

为了使场重复出现, 这个电磁场必须等于 $g_{cm}(x, -z_0)$ 和某一复数因子 P 的乘积。即

$$g_{cm}(x, +z_0) \exp\left[j \left(\frac{k_m x^2}{2z_0} + \psi_0 \right)\right] = P g_{cm}(x, -z_0), \quad (-\xi < x < \xi) \quad (28)$$

把式(27)代入式(28), 再用式(29)的符号来置换, 结果得到与归一化同次的积分方程式(30):

$$\left. \begin{aligned} t &= \sqrt{k_m / 2z_0} \cdot x \\ \tau &= \sqrt{k_m / 2z_0} \cdot \xi \\ T &= \sqrt{k_m / 2z_0} \cdot \xi \\ F_{cm}(t) &= g_{cm}(x, -z_0) \exp(-jt^2/2) \\ q &= \frac{1}{P} \exp\left[j \left(\psi_0 + \frac{\pi}{4} \right)\right] \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

$$\left. \begin{aligned} F_{cm}(t) &= q \int_0^T F_{cm}(\tau) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(t\tau) d\tau \\ F_{sm}(t) &= q \int_0^T F_{sm}(\tau) j \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(t\tau) d\tau \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

式(30)中, 上面公式的固有函数及固有值是实函数及实数并依赖于 T (下面公式的固有值是纯虚数)。如果相位变换器也象二块合成透镜一样是分为二级进行相位补偿的结构, 那么 $F_{cm}(t)$ 只要考虑给出合成透镜系统中心平面的场分布就可以了。因 $F_{cm}(t)$ 是实数, 所以在相位变换器的中心平面上场都是同相位的。固有函数 $F_{cm}(t)$ 构成理想正交关系, 并决定了对应于横向场矢量的正交关系, 它给出了有限截面线路的固有模式函数。固有值 q 大于 1, 它的倒数的绝对值 $|p|$ 存在于相邻两个相位变换器之间, 就是说它给出相当于一个区间的衰减量。在式(30)中, 如 $T \rightarrow \infty$, 显然它就是开始所采用的波束模式, 也就是说, 积分方程式(30)是代表波束模式的本质。这个问题业已从物理方面对图 6 进行了探讨。

运用级数展开的数值计算法就可求解方程式(30)。因为方程的解可以认为近似于无限平面内的固有函数, 所以把它们作为基底矢量来表示是方便的。首先把核函数 $\sqrt{2/\pi} \cos(t\tau)$ 展开成下式:

$$\begin{aligned} \sqrt{2/\pi} \cos(t\tau) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{2(-1)^\nu}{(2\nu)! \sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2}(t+\tau)^2} \\ & \quad \cdot H_{2\nu}(\sqrt{2}t) H_{2\nu}(\sqrt{2}\tau) \end{aligned} \quad (31)$$

取式(31)中的前 N 项, 采用近似值, 则近似积分方程式就可精确地解决。即把 $F_{cm}(t)$ 表示为:

$$F_{cm}(t) = \sum_{p=0}^N a_{2p} \exp\left(-\frac{1}{2} t^2\right) H_{c2p}(\sqrt{2} t) \quad (32)$$

再代入近似积分方程,得

$$\sum_{p=0}^N a_{2p} \exp\left(-\frac{1}{2} t^2\right) H_{c2p}(\sqrt{2} t) = q \sum_{\mu=0}^N \sum_{\nu=0}^N (-1)^{\nu} b_{\nu,\mu} a_{2\mu} e^{-(1/2)t^2} H_{c2\nu}(\sqrt{2} t) \quad (33)$$

式中

$$b_{\nu,\mu} = \frac{2}{(2\nu)! \sqrt{\pi}} \cdot \int_0^T H_{c2\mu}(\sqrt{2}\tau) H_{c2\nu}(\sqrt{2}\tau) e^{-\tau^2} d\tau \quad (34)$$

式(33)虽然是 t 但仍然成立,所以得到以 $a_{2\mu}$ 为系数的线性同次联立方程如下:

$$\sum_{\mu=0}^N a_{2\mu} [\delta_{\mu\nu} - q(-1)^{\nu} b_{\nu,\mu}] = 0 \quad (0 \leq \nu \leq N) \quad (35)$$

式中当 $\mu=\nu$ 时, $\delta_{\mu\nu}=1$;而 $\mu \neq \nu$ 时, $\delta_{\mu\nu}=0$ 。为了使式(35)的 $a_{2\mu}$ 都具有非零解,系数矩阵必须是零。从这个条件出发,就 q 而言,可得 N 次代数方程,它的根就是所要求的固有值 q 。把与各个 q 相对应的 $a_{2\mu}$ 值代入式(30)就可求出固有函数。这种情况下,如取 N 小于高次模式界限,就会使误差变大,不过,实用上重要的是前面三个模式,因此只要把 N 取在3以上就可以得到良好的近似了。取 $N=4$,用电子计算机计算的结果如图7,图中示出从第一个模式到第四个模式的二个最重要参量之间的关系,它们是决定 x 方向尺寸的 T 和决定衰减量的 p 。由此可以求出因衍射所引起的衰减量。

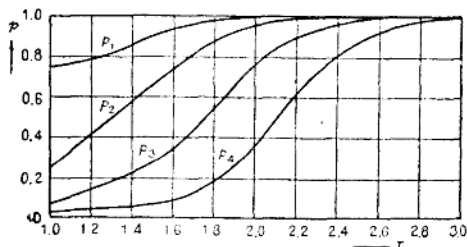


图7 T 与 p 的关系, p_n 为 p 的 n 次模式

$$T = \sqrt{\frac{k_m}{2z_0}} \xi, \quad p = \frac{1}{|q|}$$

实用化的探讨

为了使上面所讨论的线路实用化,模式的选择和容易的结构加工是很必要的。这种线路在毫米波或更短波长上用作低损耗线路或泄漏波导是很有利的。它的特点是在低损耗的情况下,容易除去不需

要的模式。在这种线路中产生衰减的原因是:有限截面的衍射损耗、两平行平板的欧姆损耗、相位变换器的反射损耗以及热损耗、模式变换损耗等等。为了减少衍射损耗,选择会聚度好的基波是有利的;而为了减少两平行平板的欧姆损耗,选择电场平行于板壁且传输能量会聚于中央空间部分的EH模式较好,因此EH₀₁模式是最有利的。下面来考虑结构形式的变换。在两平行板之间,垂直于板面 y 方向上的场分布是呈余弦波状态,因此,如我们所熟知的矩形波导TE₀₁模式那样,在 y 方向可以分成二个元波来研究。现把这种情况示于图8,元波一面受到金属板A和B的反射,一面又沿着 z 方向前进,它在 z 方向上每隔 $2z_0$ 就通过一个相位变换器。这时从 z 方向看去是 k_m ,而从元波的进行方向看去则变成 k 。由此,本文中 k_m 的意义就更加明确了。现在令B对A的象为B',A对B'的象为A',再假定相位变换器顺 y 方向延长,则此元波和按虚线所示直线前进的元波等效。这就是说,在平行的相位变换器系列中即使元波是倾斜地入射在 $x-y$ 平面内也能产生波束模式,因而问题就变得明显了。由此可知,如图9(a)所示,只要直接把适当的相位变换器平行地插入两块平行平板之间就行。为了使相位变换器便于支撑,如图9(b)所示,把相位变换器制成两块并胶粘在金属板的一面或二面上就可以。(a)和(b)的情况是插入片状介质透镜。此外,从获得相

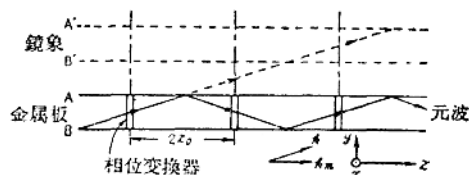


图8 平行平板间元波的反射现象

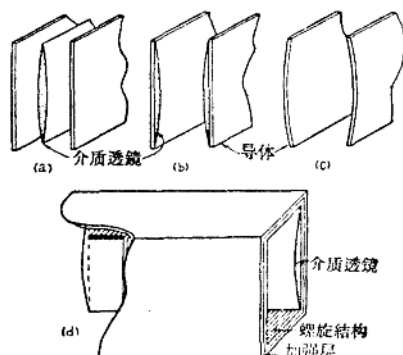


图9 实用线路结构

位补偿的作用来看,将线路改成图 9(e) 那样既是低损耗且结构又简单。对于 EH_{01} 模式,因 $H_x=0$,所以金属板表面上的磁场只有 z 分量,电流只有 x 方向,并且电磁场是会聚在 x 方向的中央部分,这样就可以把线路考虑成图 9(d) 的螺旋结构。在(d)的结构中,适当地设计壁的表面就可以除去不需要的模式,这一点连同机械稳定性在实用上是有利的。在这种线路里,传输能量会聚于中央部分,从高频低损耗的观点来看,它是一种与毫米波 TE_{01} 螺旋波导相匹敌的矩形波导结构,并且还具有天线罩泄漏波导的作用。在图 9(a)~(d) 的结构中,因不存在 z 方向的场分布,所以波束模式可以变换成普通的波导模式。这可以通过使平行板间的反射周期与相位变换器的周期相一致来实现。

附录 式(11)的推导

这里只讨论 $g_{cm}(x)$,若把本文中的式(8)~(11)代入式(4),则

$$g_{cm}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{v=0}^{\infty} C_{2v} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\beta^2}{4v} - j\frac{\beta^2}{2km}z} \cdot H_{c2v}\left(\frac{\beta}{\beta_0}\right) \cos \beta x d\beta \quad (\text{附 1})$$

u 和 v 在本文式(12)中已给出它的定义,又设

$$\left. \begin{aligned} t &= \frac{\beta}{\sqrt{2}} \frac{\beta_0}{\beta_0} (1-jv)^{1/2} \\ p &= \sqrt{2} (1-jv)^{1/2} \\ q &= \sqrt{2} u (1-jv)^{-1/2} \end{aligned} \right\} \quad (\text{附 2})$$

则式(附 1)变成

$$g_{cm}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{v=0}^{\infty} C_{2v} \beta_0 (1-jv)^{-1/2} \cdot \int_0^{\infty} e^{-t^2/2} H_{c2v}(pt) \cos qt dt \quad (\text{附 3})$$

利用积分变换公式(12), 则

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} e^{-t^2/2} H_{c2v}(pt) \cos qt dt \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} (1-p^2)^v \exp\left(-\frac{1}{2}q^2\right) \\ & \cdot H_{c2v}\left[\frac{pq}{(1-p^2)^{1/2}}\right] \end{aligned} \quad (\text{附 4})$$

所以式(附 3)就可以计算了。

通过式(附 2) 再将符号进行还原变换,则

$$g_{cm}(x) = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-jv}} \sum_{v=0}^{\infty} C_{2v} (-1)^v \left(\frac{1+jv}{1-jv}\right)^v \cdot \exp\left(\frac{-u^2}{1-jv}\right) H_{c2v}\left(\frac{2u}{\sqrt{1+jv}}\right) \quad (\text{附 5})$$

把式(附 5) 分成振幅和相位两项就得到本文中的式(11)。至于 $g_{em}(x)$ 也可以按同样的方法求出。

参考文献

- [1] G. Goubau, F. Schwering: "On the guided propagation of electromagnetic wave beams", IRE Trans., AP-9, 3, p 248, (May 1961).
- [2] J. R. Christian, G. Goubau: "Experimental studies on a beam waveguide for millimeter waves", 同上 p 256.
- [3] T. Nakahara: "The guided propagation of electromagnetic wave beams between two parallel plates", PIBMRI Memorandum (July, 1961) or 辐射科学研资 (1963-04).
- [4] 中原: "平行平板間の電磁波ビームモード", 昭 38 連大, 1285, (1963-04).
- [5] F. Schwering: "Reiterative wave beams of rectangular symmetry", A. E. U., 15, 2, p555, (Dec. 1961).
- [6] J. B. Beyer, E. H. Scheibe: "Higher modes in guided electromagnetic-wave beams", IRE Trans., AP-10, p. 349, (May 1962).
- [7] J. B. Beyer, E. H. Scheibe: "Loss measurement of the beam waveguide", IEEE, Trans., MTT-11, p 18, (Jan. 1963).
- [8] A. G. Fox, T. Li: "Resonant modes in a maser interferometer", B. S. T. J., p. 453, (March 1961).
- [9] G. D. Poyd, J. P. Gordon: "Confocal multi-mode resonator for millimeter through optical wavelength masers", B. S. T. J., p489, (March 1961).
- [10] G. D. Boyd, H. Kogelnik: "Generalized confocal resonator theory", B. S. T. J., p 1347, (July 1962).
- [11] W. Magnus, F. Oberhettinger: "Function of mathematical physics", Chelsea. Pub. Co., N. Y., p 80, (1955)
- [12] Erdélyi et al.: "Table of integral transforms", 2, p 299, McGraw-Hill, (1954).
- [13] 同上 1, p 21 及 25 p 28.

(林鸿英译)