冲击金牌丛书

高中数学奥林匹克竞赛

数学思想方法篇

挑战高考的利刃
拼搏竞赛的经典

起点低　入门快　循序渐进　夺金牌

编著／杨德胜

华东理工大学出版社

责任编辑：李志光　责任校对：金慧娟　封面设计：戚亮轩

冲击金牌丛书

高中数学奥林匹克竞赛
数学思想方法篇

高中数学奥林匹克竞赛
代数篇

高中数学奥林匹克竞赛
几何篇

ISBN 7-5628-1410-4

9 787562 814108 >

ISBN7—5628—1410—4／O·85
定价：16.00元

冲击金牌丛书

高中数学奥林匹克竞赛

数学思想方法篇

杨德胜 编著

华东理工大学出版社

内 容 提 要

目前有关高中数学奥林匹克的教材较多，但有别于《高中数学奥林匹克题典》的高中数学奥林匹克同步训练题较少，为此我们根据《全国高中数学竞赛大纲》编写了这套"冲击金牌丛书"，本册是数学思想方法部分. 本书将高中数学奥林匹克的主要数学思想方法分为14个专题，另附13套全国高中数学联赛模拟试题和近几年的中国数学奥林匹克试题(C. M. O)、国际数学奥林匹克试题(I. M. O). 先对每个专题按高中数学奥林匹克的主要课题化为若干个单元，每单元编写一练，然后根据本专题的需要编写一练或多练，进行适当的综合训练. 本书通过训练的方式，激发学生的学习兴趣，启迪学生的思维，培养学生的创新能力，提高学生参加竞赛的实战能力.

图书在版编目(CIP)数据

高中数学奥林匹克竞赛数学思想方法篇. /
杨德胜编著. —上海：华东理工大学出版社，2003. 7
ISBN 7-5628-1410-4

Ⅰ. 高...　Ⅱ. 杨...　Ⅲ. 数学课-高中-习题
Ⅳ. G634. 605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第044000号

冲击金牌丛书
高中数学奥林匹克竞赛
数学思想方法篇　　杨德胜　编著

出版	华东理工大学出版社	**开本**	787×1092　1/16
社址	上海市梅陇路130号	**印张**	12
邮编	200237　**电话**　(021)64250306	**字数**	321千字
网址	www. hdlgpress. com. cn	**版次**	2003年7月第1版
发行	新华书店上海发行所	**印次**	2003年7月第1次
印刷	上海展望印刷厂	**印数**	1-8050册

ISBN 7-5628-1410-4/O · 85　　　定价：16.00元

作者简介

杨德胜　男，1957年8月出生，湖北利川市人，中共党员。湖北大学数学系毕业。曾在湖北利川市一中、广东茂名市一中、广东中山纪念中学等名校任教，现在上海交通大学附属中学任教。1998年9月被广东省人民政府评为中学数学特级教师。2002年7月被上海市人民政府认定为上海市特级教师。1995—2000年均被广东省数学竞赛委员会评为全国高中数学竞赛优秀辅导员。1997年9月被评为广东省南粤教书育人优秀教师（特等奖）。1997—1999年被广东省教育厅聘为广东省普教系统中学高级教师评审委员会成员。辅导学生参加全国高中数学竞赛，有50多人获全国一、二、三等奖（15人次获一等奖，2人进入冬令营）11人分别被保送到清华大学、北京大学、浙江大学、中山大学等名牌大学学习。在《数学通报》、《中等数学》等刊物发表论文40余篇，出版《用数学的眼光看世界》、《奥赛金牌之路》等15本专著。多次到外省市举办的数学夏令营（或高中数学教练员培训班）讲授全国高中数学竞赛第二试内容，深受广大师生好评。

部分获奖学生寄语广大数学竞赛爱好者

杨斌　1996年获全国高中数学联赛一等奖，以广东省第三名进入冬令营集训队。1997年广东茂名市高考理科状元，考入清华大学经济学院学习。曾任清华大学学生会外联部部长。2001年保送该校研究生，现任研究生会主席。

王元教授讲的“数学竞赛需要平常心”一句话，至今让我难忘。以我的理解，“平常心”包括三方面：第一，不畏难。正确看待学习中遇到的困难，不要被困难吓倒，保持良好的学习劲头。第二，乐在其中。学习过程中接触、了解很多美妙的数学思想、方法、技巧，享受运用巧妙技巧解决难题的乐趣。第三，正确看待。数学竞赛实际上是锻炼对思维逻辑能力和自学能力的一种培养，这些中学时代培养起来的能力让我受益匪浅。以此寄语正在数学奥林匹克海洋中遨游的广大中学生。

黄晓宇　1996年获全国高中数学联赛一等奖，广东赛区第九名。1997年保送到中山大学学习。现为中山大学软件研究所2001级研究生。

对于想要在数学竞赛中一展身手的同学来说，我认为有两点必须注意：一是要先打好基础，解题能力的提高是一个渐进的过程，不能冒进。二是要有良好的心态，要注意到竞赛只是促进学习的一种手段，要注意健全的人格的培养。

林运杰　2000年获全国高中数学联赛一等奖，广东赛区第27名。2001年保送到浙江大学信息科学院计算机技术科学系学习。

我从小就迷恋数学，这种迷恋直到现在。也许是为数学的美所吸引，也许是因为解决数学问题带给我的快乐感。我很迷恋一些难题的精妙解法，然后把它抄到我精美的笔记本上深深的收藏，这是我一生的财富。

杨永团　2000年获全国高中数学联赛一等奖，广东赛区第九名。2001年保送到中山大学信息科学院计算机技术科学系学习。

学习数学不难，解决数学问题就是公式和技巧的结合，即“解题＝公式＋技巧”，公式是基础，技巧是方法和能力。只有通过实际训练，在解题中善于思考，解题后不断总结，才能提高解题的能力——这一点非常重要。还有一点，学习数学要多与同学讨论，多与老师辩论，因为“老师为我导航，同学给我灵感”。

李致　2002年全国高中数学联赛一等奖，2003年保送到北京大学数学科学院学习

例题是最具有代表性的题目，所以对书中的例题最好不要急于先读答案，至少应先思考一下自己的解法。若要看答案，不能只看一遍，要反复看，反复思考，力求把问题真正想通，求得思维上的突破，这样才能获得解题的灵感。

AOLINPIK

序

我国在20世纪80年代中期陆续派队参加国际中学生数学奥林匹克(I. M. O.)竞赛，取得了令人刮目相看的好成绩. 实践证明：数学奥林匹克竞赛是一项有利于培养创新思维、有利于深刻理解与灵活运用知识、有利于提高学生分析问题和解决问题的能力的“思维的体操”. 如果说素质教育的重点是培养学生的创新精神和实践能力，那么学科奥林匹克活动，是实现素质教育的具体实践，是素质教育的拓展和延伸，是培养拔尖人才的重要渠道. 同时，也为满足广大中学生的学科兴趣爱好和展示他们的聪明才智提供了广阔的舞台. 尤其是近年来，我国把竞赛活动与高考的保送生的选拔制度接轨后，备受重点中学、中学教师和学生家长的高度重视，广大中学生参与的热情空前高涨. 每年都有近20万学生参加各项数学竞赛活动，其中有近1000名同学被免试保送到名牌大学学习.

当今，我国高中数学竞赛活动主要有：省、市、区竞赛(全国高中数学联赛预赛或选拔赛)、全国高中数学联赛、中国数学奥林匹克(C. M. O.)和国际数学奥林匹克(I. M. O.)四大数学竞赛. 由于直接与国际数学奥林匹克接轨，如何参与这项盛大的竞赛活动，沿着“科学选拔人才，提高科学素养”的方向展示广大中学生自身价值，是竞赛教练员和选手共同追求的目标.

实践证明：从高一新生到全国高中数学联赛大约为109周的学习时间. 为此，笔者以109周为单位，将全国高中数学联赛竞赛大纲规定的内容和中学生应掌握的数学思想方法以及高中数学奥林匹克的知识点、考点和热点科学、合理、循序渐进地融会在109练中. 其中《代数篇》46练；《几何篇》36练(几何28练加2002～2003年部分省、市数学竞赛题5练及2000～2002年全国高中数学联赛题3练)；《数学思想方法篇》27练(其中数学思想方法13练、全国高中数学联赛模拟试题13练，另附1999～2003年CMO试题、首届女子奥林匹克试题及1999～2002年IMO试题). 所有套题在书后都附有详细解答，供学生反馈查阅之用. 全书充分体现对学生从“扶”到“放”，求真务实. 起点低，入门快，循序渐进.

实践证明：参加数学竞赛的选手除系统掌握全国高中数学竞赛大纲规定的教学内容外，做一定数量的训练题是必不可少的. 为此，本丛书给有志于数学竞赛的选手们提供了完整、系统、有效的训练素材；同时也为选手提供了创新的空间和舞台. 本丛书的《代数篇》、《几何篇》使你对基础知识训练有素，《数学思想方法篇》为你提炼方法、指点迷津，使你如虎添翼，跨上金牌的领奖台.

实践证明：本丛书训练量适宜，知识、方法到位，效果显著. 本丛书是笔者在近6年辅导学生参加全国联赛的训练题基础上加工整理而成. 在这6年中，用此套题训练后，有50多人次获全国高中数学联赛一、二、三等奖，2人进入冬令营. 其中11人被免试保送到清华大学、北京大学、浙江大学、中山大学等名牌大学学习，2人又在大学毕业后免试直升研究生，1人获全国大学生数学建模一等奖.

实践证明：本丛书具有一定的创新性，其中有较多的题是自编的. 为了检验试题水平，笔者在2001年曾向《数学通报》问题栏提供两道试题，其中一道发表在《数学通报》2002年第

12 期的《数学问题栏》中. 本丛书中有多道题与全国高中数学联赛题难度"雷同".

因此，笔者向广大的数学爱好者推荐本丛书，它一定能将你引入数学大门，在数学的海洋里搏击风浪.

本丛书在出版过程中，我的学生杨斌、黄晓宇、杨永团、李务斌、林远杰、林泽坚、林锡庭、萧宝轩、梁志聪、李致、施传荣、袁晨等提供了部分试题的解答. 并得到了华东理工大学出版社社长朱广忠先生的大力支持和指导，在此一并致谢.

由于笔者的水平有限，书中难免有一些错漏之处，欢迎使用本书的读者不吝赐教，以便再版时，本书更具有科学性、实用性及指导性(如发现错误，请发 E-mail: yangdesheng1957@sina.com).

杨德胜

2003 年 6 月于上海交通大学附属中学

目　录

训练题

1. 配方法与待定系数法 …… 1
2. 数形结合 …… 3
3. 换元引参 …… 5
4. 分类讨论 …… 7
5. 特殊化法、整体处理法 …… 9
6. 坐标法、复数法 …… 11
7. 判别式法、韦达定理法 …… 13
8. 枚举、归纳与递推方法 …… 15
9. 反证法 …… 17
10. 探索性问题 …… 19
11. 应用性问题 …… 21
12. 构造法 …… 24
13. 逐步调整法 …… 26
14. 极端原理、对称原理法 …… 28
15. 全国高中数学联赛模拟试题一 …… 30
16. 全国高中数学联赛模拟试题二 …… 33
17. 全国高中数学联赛模拟试题三 …… 36
18. 全国高中数学联赛模拟试题四 …… 39
19. 全国高中数学联赛模拟试题五 …… 42
20. 全国高中数学联赛模拟试题六 …… 45
21. 全国高中数学联赛模拟试题七 …… 48
22. 全国高中数学联赛模拟试题八 …… 51
23. 全国高中数学联赛模拟试题九 …… 54
24. 全国高中数学联赛模拟试题十 …… 57
25. 全国高中数学联赛模拟试题十一 …… 60
26. 全国高中数学联赛模拟试题十二 …… 63
27. 全国高中数学联赛模拟试题十三 …… 66

附录

1. 1999 年中国数学奥林匹克试题(北京) …… 69
2. 2000 年中国数学奥林匹克试题(合肥) …… 70
3. 2001 年中国数学奥林匹克试题(香港) …… 72

4. 2002 年中国数学奥林匹克试题(上海) …… 74
5. 首届女子数学奥林匹克试题(珠海) …… 76
6. 2003 年中国数学奥林匹克试题(长沙) …… 78
7. 1999 年第 40 届国际数学奥林匹克(IMO)试题(罗马尼亚) …… 80
8. 2000 年第 41 届国际数学奥林匹克(IMO)试题(韩国) …… 82
9. 2001 年第 42 届国际数学奥林匹克(IMO)试题(美国) …… 84
10. 2002 年第 43 届国际数学奥林匹克(IMO)试题 …… 85

答案或提示

1. 配方法与待定系数法 …… 87
2. 数形结合 …… 89
3. 换元引参 …… 91
4. 分类讨论 …… 93
5. 特殊化法、整体处理法 …… 95
6. 坐标法、复数法 …… 97
7. 判别式法、韦达定理法 …… 100
8. 枚举、归纳与递推方法 …… 102
9. 反证法 …… 105
10. 探索性问题 …… 108
11. 应用性问题 …… 109
12. 构造法 …… 112
13. 逐步调整法 …… 115
14. 极端原理、对称原理法 …… 117
15. 全国高中数学联赛模拟试题一 …… 120
16. 全国高中数学联赛模拟试题二 …… 123
17. 全国高中数学联赛模拟试题三 …… 126
18. 全国高中数学联赛模拟试题四 …… 129
19. 全国高中数学联赛模拟试题五 …… 131
20. 全国高中数学联赛模拟试题六 …… 134
21. 全国高中数学联赛模拟试题七 …… 136
22. 全国高中数学联赛模拟试题八 …… 139
23. 全国高中数学联赛模拟试题九 …… 143
24. 全国高中数学联赛模拟试题十 …… 146
25. 全国高中数学联赛模拟试题十一 …… 149
26. 全国高中数学联赛模拟试题十二 …… 153
27. 全国高中数学联赛模拟试题十三 …… 156
附录

1. 1999 年中国数学奥林匹克试题(北京) …… 160
2. 2000 年中国数学奥林匹克试题(合肥) …… 163
3. 2001 年中国数学奥林匹克试题(香港) …… 165
4. 2002 年中国数学奥林匹克试题(上海) …… 168
5. 首届女子数学奥林匹克试题(珠海) …… 172
6. 2003 年中国数学奥林匹克试题(长沙) …… 174
7. 第 40 届国际数学奥林匹克(IMO)试题(罗马尼亚) …… 177
8. 第 41 届国际数学奥林匹克(IMO)试题(韩国) …… 178
9. 第 42 届国际数学奥林匹克(IMO)试题(美国) …… 180
10. 第 43 届国际数学奥林匹克(IMO)试题 …… 182

1. 配方法与待定系数法

100 分钟　满分 150 分

姓名________　分数________

一、选择题(每小题 6 分,共 36 分)

1. 设长方体的全面积为 11,其 12 条棱的长度之和为 24,则这个长方体的一条对角线长为　(　　)

A. $2\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{14}$　　C. 5　　D. 6

2. 设 F_1、F_2 为双曲线 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 的两个焦点,点 P 在双曲线上,且满足 $\angle F_1PF_2=90°$,则 $\triangle F_1PF_2$ 的面积为　(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

3. 设对所有的实数 x,不等式 $x^2\log_2\frac{4(a+1)}{a}+2x\log_2\frac{2a}{a+1}+\log_2\frac{(a+1)^2}{4a^2}>0$ 恒成立,则实数 a 的取值范围为　(　　)

A. $(0, 1)$　　B. $\{1, 2\}$　　C. $(-1, 0)$　　D. $(-2, -1)$

4. 设 $a=\frac{1}{2}(\sqrt{29}-3)$, $b^2+3b-5=0(b<0)$,则 a^4+b^4 的值为　(　　)

A. 113　　B. 114　　C. 311　　D. 411

5. 设 $0<y\leqslant x<2\pi$, $\cos x+\cos y=\frac{3}{2}+\cos(x+y)$,则 $x+y$ 等于　(　　)

A. $120°$　　B. $600°$　　C. $120°$或 $600°$　　D. $120°$或 $300°$

6. 设 $f(x)$是一次函数,且在其定义域内是增函数,由 $f^{-1}[f^{-1}(x)]=4x-12$,则$f(x)$的表达式为　(　　)

A. $4x-12$　　B. $\frac{x}{2}+2$　　C. $12-4x$　　D. $2x+2$

二、填空题(每小题 9 分,共 54 分)

1. 设函数 $y=\frac{mx^2+4\sqrt{3}x+n}{x^2+1}$ 的最大值为 7,最小值为 -1,则函数的解析式为________.

2. 设抛物线的对称轴与 y 轴平行,顶点到原点的距离为 5,若抛物线向上平移 3 个单位,则在 x 轴上截得的线段为原抛物线在 x 轴上截得线段的一半,若抛物线向左平移 1 个单位,则抛物线过原点,则此抛物线为________________.

3. 设方程 $x^2+2kx+4=0$ 的两个实根为 x_1，x_2，若 $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2+\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2\geqslant 3$，则 k 的取值范围为________.

4. 设函数 $y=5\sin^2x+\sqrt{3}\sin x\cos x+6\cos^2x+m$ 能表示成 $y=A\sin(\omega x+\theta)$ 的形式 $(0\leqslant\theta<\pi)$. 则实数 m 的值为________.

5. 设函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a<0)$ 对任意实数 x 都有 $f(2-x)=f(2+x)$，则不等式 $f\left[\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right)\right]<f\left[\log_{\frac{1}{2}}\left(2x^2-x+\frac{3}{8}\right)\right]$ 的解集为________________.

6. 函数 $y=x^2+8x+\frac{64}{x^3}(x>0)$ 的最小值为________________________.

三、(20 分)设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的一个顶点为 $A(0,-1)$，且右焦点 F 到直线 $x-y+2\sqrt{2}=0$ 的距离为 3，试问能否找到一条斜率为 $k(k\neq 0)$ 的直线 L，使 L 与已知椭圆交于不同的两点 M、N，且满足 $|AM|=|AN|$.

四、(20 分)求使得不等式组 $\begin{cases}2b\cos 2(x-y)+8b^2\cos(x-y)+8b^2(b+1)+5b<0 & ①\\ x^2+y^2+1>2bx+2y+b-b^2 & ②\end{cases}$ 对任意实数 x，y 都成立的一切 b 的值.

五、(20 分)是否存在 a，b，c，对于：

$n\in\mathbf{N}_+$，$1+2\times 3+3\times 3^2+4\times 3^3+\cdots+n\times 3^{n-1}=3^n(an-b)+c$ 都成立.

2. 数 形 结 合

100 分钟　满分 150 分

姓名________　分数________

一、选择题(每小题 6 分,共 36 分)

1. 关于 $y^2=2x$ 的方程 $a^x=-x^2+2x+a(0<a\neq 1)$ 的解的个数为　(　　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

2. 关于 x 的方程 $\lg(4x^2+4ax)=\lg(4x-a+1)$ 有唯一的实数解,则 a 的取值范围为　(　　)

A. $\left[\frac{1}{5}, 1\right]$　　B. $\left[\frac{1}{5}, 1\right)$　　C. $\mathbf{R}^+$　　D. $\varnothing$

3. 设复数 z 满足 $\arg(z+\mathrm{i})=\frac{2\pi}{3}$,则 $\frac{1}{|z+6|+|z-3\mathrm{i}|}$ 的最大值为　(　　)

A. $\frac{\sqrt{5}}{15}$　　B. $\frac{1}{9}$　　C. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{5}}{10}$

4. 设 t 是使 $\frac{t+3}{t-3}$ 为纯虚数的复数,则复数 $z=t+3+3\sqrt{3}\mathrm{i}$ 的模和辐角的最值分别为　(　　)

A. $|z|_{\max}=6$, $|z|_{\min}=3$, $(\arg z)_{\max}=\frac{\pi}{6}$, 不存在最小值

B. $|z|_{\max}=9$, $|z|_{\min}=3$, $(\arg z)_{\min}=\frac{\pi}{6}$, 不存在最大值

C. $|z|_{\max}=9$, $|z|_{\min}=6$, $(\arg z)_{\max}=\frac{\pi}{6}$, 不存在最小值

D. $|z|_{\max}=6$, $|z|_{\min}=3$, $(\arg z)_{\min}=\frac{\pi}{6}$, 不存在最大值

5. 设 $z=\cos\theta+\left(\frac{5}{4}-\sin^2\theta\right)\mathrm{i}(0\leqslant\theta<2\pi)$,则 $|z|$, $\arg z$ 的范围分别为　(　　)

A. $\left[\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{41}}{4}\right]$, $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$　　B. $\left[0, \frac{\sqrt{41}}{4}\right]$, $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}\right]$

C. $\left[\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{41}}{4}\right]$, $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}\right]$　　D. $\left[\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{51}}{4}\right]$, $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$

6. 曲线 $y=\sqrt{2x-x^2}(0\leqslant x\leqslant 2)$ 与直线 $y=k(x-2)+2$ 有两个交点,则实数 k 的取值范围为　(　　)

A. $\left(\frac{3}{4}, 1\right)$　　B. $\left(\frac{3}{4}, +\infty\right)$　　C. $\left(\frac{3}{4}, 1\right]$　　D. $\left[\frac{3}{4}, +\infty\right)$

二、填空题(每小题 9 分,共 54 分)

1. 设 $\arg(z+3)=\dfrac{2\pi}{3}$, $\arg(z-5)=\dfrac{5\pi}{6}$,则 $z=$ ________.

2. 定长为 3 的线段 AB 的两个端点在抛物线 $y^2=2x$ 上移动,M 为 AB 的中点,则 M 点到 y 轴的最短距离为________.

3. 若 $\cos\alpha+\cos\beta=1$,则 $\sin\alpha+\sin\beta$ 的取值范围为________.

4. 设方程 $2^x+x-\pi=0$ 与方程 $\log_2 x+x-\pi=0$ 的根分别是 α, β,则 $\alpha+\beta=$ ________.

5. 设 x, y 满足 $\log_2 x+\log_2 y=1$, 则函数 $\mu=x^2+y^2-2x-2y$ 的最小值为________.

6. 设复数 z_1, z_2 满足 $|z_1|=|z_2|=1$ 且 $z_1+z_2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$,则 $z_1\cdot z_2=$ ________.

三、(20 分)若直线 $ax+y+2=0$ 平分双曲线 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$ 的斜率为 1 的弦,求 a 的取值范围.

四、(20 分)复平面上点 A、B 对应的复数分别为 $z_1=2$, $z_2=-3$, 点 P 对应复数 $\dfrac{z-z_1}{z-z_2}$ 的辐角主值为 φ,当 P 点在以原点为圆心,1 为半径的上半圆周(不包括两个端点)上移动时,求 φ 的最小值.

五、(20 分)(1) 求函数 $y=\left|x+2-\sqrt{1-x^2}\right|$ 的值域;

(2) 求函数 $y=\dfrac{6-\cos^2 x+4\sin x}{\sin x-3}$ 的值域.

3. 换 元 引 参

100 分钟　满分 150 分

姓名________　分数________

一、选择题(每小题 6 分,共 36 分)

1. 不等式 $\sqrt{x} > ax + \frac{3}{2}$ 的解集为 $(4, b)$,则实数 a, b 的值分别为　(　　)

A. 2, 32　　B. 4, 32　　C. $\frac{1}{8}$, 36　　D. $\frac{1}{4}$, 36

2. 设 $x \in \mathbf{R}$,则 $y = (x^2 + 4x + 5)(x^2 + 4x + 2) + 2x^2 + 8x$ 的最小值为　(　　)

A. -30　　B. -20　　C. -10　　D. -5

3. 函数 $y = x^2 + 2x\sqrt{1 - x^2}$ 的值域为　(　　)

A. $[-1, 1]$　　B. $\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right]$

C. $\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right]$　　D. $\mathbf{R}$

4. 设实数 x, y 满足 $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1$,若 $x + y - k \geqslant 0$ 恒成立,则实数 k 的最大值为　(　　)

A. 3　　B. -3　　C. 5　　D. -5

5. 设 $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \geqslant 1$,则 $x^2 + y^2$ 等于　(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 0.5

6. 关于 x 的方程 $9^{-|x-2|} - 4 \cdot 3^{-|x-2|} - a = 0$ $(a \in \mathbf{R})$ 有实根的充分必要条件是　(　　)

A. $a \geqslant 4$　　B. $-4 \leqslant a < 0$　　C. $-3 \leqslant a < 0$　　D. $a \in \mathbf{R}$

二、填空题(每小题 9 分,共 54 分)

1. 实数 x, y 满足 $4x^2 - 5xy + 4y^2 = 5$,设 $S = x^2 + y^2$,则 $\frac{1}{S_{\max}} + \frac{1}{S_{\min}} =$ ________.

2. 半径为 R 的球的内接圆锥的最大体积为________.

3. 设 $\frac{\sin\theta}{x} = \frac{\cos\theta}{y}$, $\frac{\cos^2\theta}{x^2} + \frac{\sin^2\theta}{y^2} = \frac{10}{3(x^2+y^2)}$,则 $\frac{x}{y} =$ ________.

4. 若 $1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 2$,则 $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ 的最大值为________;最小值为________.

5. 复数 z 满足:(1)$z + \frac{10}{z} \in \mathbf{R}$, $1 < z + \frac{10}{z} \leqslant 6$, (2)$z$ 的实部和虚部都是整数,则

$z=$ ________.

6. 过定点 $A(1,2)$ 作 $\triangle ABC$，使 $\angle BAC=90^{\circ}$，且动点 B、C 在抛物线 $y^2=4x$ 上，则直线 BC 必经过定点 P 的坐标为________.

三、(20 分)设：$s>1$，$t>1$，$m\in\mathbf{R}$，$x=\log_s t+\log_t s$，$y=\log_s^4 t+\log_t^4 s+m(\log_s^2 t+\log_t^2 s)$. (1)将 y 表示成 x 的函数 $y=f(x)$；(2)若关于 x 的方程 $f(x)=0$ 有且仅有一个实数根，求 m 的取值范围.

四、(20 分)已知定义在实数上的函数 $f(x)$ 为奇函数且在 $[0,+\infty)$ 上是增函数，对任意实数 θ，问是否存在实数 m 使得 $f(\cos 2\theta-3)+f(4m-2m\cos\theta)>f(0)$ 对所有的 θ 都成立？若存在，求出 m 的取值范围；若不存在，说明理由.

五、(20 分)数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{16}(1+4a_n+\sqrt{1+24a_n})$，试求数列 $\{a_n\}$ 的通项 a_n.