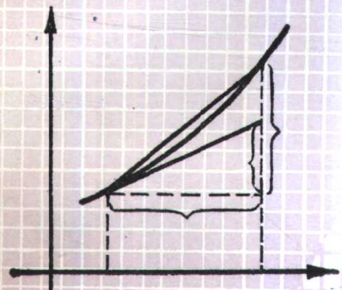
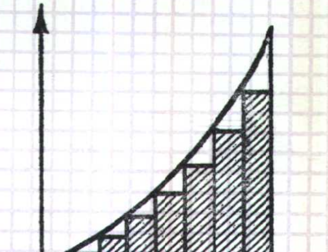
中等师范学校数学课本

简易微积分

全一册





人民教育出版社

封面设计：胡茂林

中等师范学校数学课本
（试 用 本）

简易微积分

全 一 册

王汉生 成之康 编

*

人民教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
北京市房山县印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32 印张 5.25 字数 105,000
1983年4月第1版 1984年3月第2次印刷
印数 180,001—330,000
书号 K7012·0196 定价 0.42 元

本书是由教育部委托湖南省教育厅组织编写的．初稿完成后，教育部委托湖南省教育厅和人民教育出版社召集有北京、上海、河北、辽宁、吉林、江苏、浙江、福建、湖北、四川等省市代表参加的审稿会议，对初稿进行了审查．会后，由编者根据审查意见进行了修改．

目　录

第一章　极限的初步知识

1.1　数列的极限

极限是微积分学中的基本概念．我们先来学习数列的极限．

看下面两个例子：

例 1　已知一个圆 O，设 S 表示这个圆的面积，S_1 表示圆的内接正六边形的面积，S_2 表示圆的内接正十二边形的面积，S_3 表示圆的内接正二十四边形的面积，…，S_n 表示圆的内接正 $6\times 2^{n-1}$ 边形的面积．这样，就得到一个无穷数列

$$S_1, S_2, S_3, \cdots, S_n, \cdots \tag{1}$$

由图 1-1 可以看出，数列中从第 2 项起，每一项都大于它前面的一项；数列中的任何一项都小于 S；当项数 n 无限增大

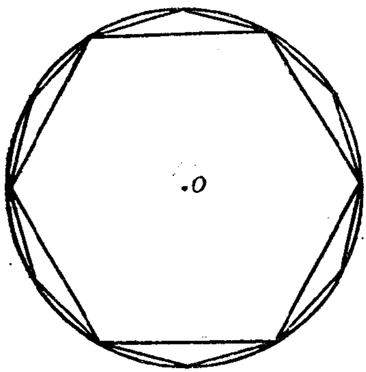


图　1-1

时，数列(1)中的项无限趋近于圆的面积 S. 这时，我们就说 S 是数列(1)的极限.

例 2 在《庄子·天下篇》中，有"一尺之棰，日取其半，万世不竭"的说法. 用通俗的话来讲，就是有一根一尺长的棒，第一天取棒的一半，第二天取棒剩下的一半的一半，这样取下去，这一根棒是永远取不尽的. 把棒每天剩下的长记下来，就得到一个无穷数列

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \cdots \qquad (2)$$

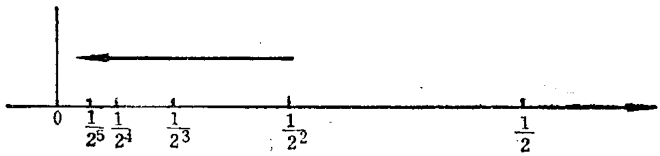


图 1-2

由图 1-2 容易看出，当项数 n 无限增大时，数列(2)中的项无限趋近于 0. 这时，我们就说 0 是数列(2)的极限.

我们再来考察数列

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \cdots, (-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \cdots \qquad (3)$$

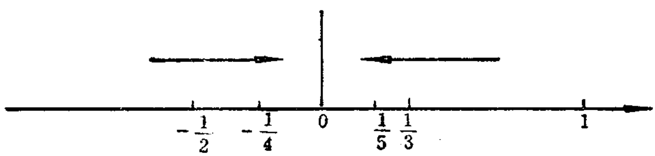


图 1-3

由图 1-3 容易看出，当项数 n 无限增大时，数列(3)中的

项无限趋近于 0. 0 是这个数列的极限.

为了把"项数 n 无限增大时，数列中的项无限趋近于某个常数 A（例 1 中 $A=S$，例 2 中 $A=0$）"说得更清楚，我们再来考察无穷数列

$$0.9, 0.99, 0.999, \cdots, 1-\frac{1}{10^n}, \cdots. \qquad (4)$$

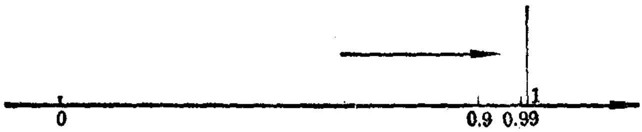


图 1-4

由图 1-4 容易看出，当项数 n 无限增大时，数列(4)中的项无限趋近于 1.

把数列(4)中各项与 1 的差的绝对值列表如下:

项　号	项	这一项与 1 的差的绝对值
1	0.9	$\|0.9-1\|=0.1$
2	0.99	$\|0.99-1\|=0.01$
3	0.999	$\|0.999-1\|=0.001$
4	0.9999	$\|0.9999-1\|=0.0001$
5	0.99999	$\|0.99999-1\|=0.00001$
6	0.999999	$\|0.999999-1\|=0.000001$
7	0.9999999	$\|0.9999999-1\|=0.0000001$
…	……	……

由表中容易看出，对于预先指定任何正数 ε，总能在数列(4)中找到这样一项，使得在这一项后面所有的项与 1 的差的绝对值都小于 ε. 例如，如果取 $\varepsilon=0.001$，那么在数列(4)中第 3 项后面的所有的项与 1 的差的绝对值都小于 ε；如果取 $\varepsilon=0.000001$，那么在数列(4)中第 6 项后面的所有的项与 1 的差的绝对值都小于 ε. 在这种情况下，我们就说当项数 n 无限增大时，数列(4)中的项无限趋近于 1. 数列(4)的极限是 1.

一般地，对于无穷数列 $\{a_n\}$，如果存在一个常数 A，对于预先指定的任何正数 ε，都能在数列中找到一项 a_N，使得在这一项后面的所有的项与 A 的差的绝对值都小于 ε（即当 $n>N$ 时，$|a_n-A|<\varepsilon$ 恒成立），就把常数 A 叫做数列 $\{a_n\}$ 的**极限**，记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n=A^*.$$

这个式子读作"当 n 趋向于无穷大时，a_n 的极限等于 A". "$\to$"表示"趋向于"，"$n\to\infty$"表示 n 趋向于无穷大，也就是 n 无限增大的意思.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A$ 有时也可记作

$$当\ n\to\infty\ 时，a_n\to A.$$

由数列的极限的定义可知，在证明 A 是数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 的极限时，可分下面几步进行：

1. 给定任意一个正数 ε，计算绝对值 $|a_n-A|$；

---

* lim 是拉丁文limis（极限）一词的前三个字母，一般按英文limit（极限）一词读音. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A$ 也可读作"limit a_n 当 n 趋于无穷大时等于 A".

2. 解不等式

$$|a_n - A| < \varepsilon,$$

使求得的解的形式为 $n > g(\varepsilon)$, $g(\varepsilon)$ 是含 ε 的一个式子;

3. 取 N 为大于 $g(\varepsilon)$ 的一个正整数;

4. 下结论: 当 $n > N$ 时,

$$|a_n - A| < \varepsilon$$

成立, 所以 A 是数列 $\{a_n\}$ 的极限.

例 3 证明数列 $\left\{1-\frac{1}{10^n}\right\}$ 的极限是 1.

证明 给定任意一个正数 ε.

$$\left|\left(1-\frac{1}{10^n}\right)-1\right| < \varepsilon,$$

即
$$\frac{1}{10^n} < \varepsilon.$$

解不等式, 得 $$n > \lg\frac{1}{\varepsilon}.$$

取 N 为大于 $\lg\frac{1}{\varepsilon}$ 的任一正整数, 当 $n > N$ 时, 有

$$\left|\left(1-\frac{1}{10^n}\right)-1\right| < \varepsilon.$$

所以 1 是数列 $\left\{1-\frac{1}{10^n}\right\}$ 的极限.

例 4 一个无穷数列的通项公式是 $a_n = \frac{3n-2}{n}$, 证明它的极限是 3.

证明 任意给定 $\varepsilon > 0$.

$$\left|\frac{3n-2}{n} - 3\right| < \varepsilon,$$

即
$$\frac{2}{n}<\varepsilon.$$

解不等式，得

$$n>\frac{2}{\varepsilon}.$$

取 N 为大于 $\frac{2}{\varepsilon}$ 的任一正整数，当 $n>N$ 时，有

$$\left|\frac{3n-2}{n}-3\right|<\varepsilon.$$

所以，3 是该数列的极限.

例 5 求常数列 $-7,-7,-7,\cdots$ 的极限.

解： 这个数列的各项与 -7 的差的绝对值都等于 0，所以，从第 1 项起，这个绝对值就能够小于任意给定的正数 ε. 因此，这个数列的极限是 -7.

一般地，任何一个常数列的极限都是这个常数本身.

应该注意，并不是每一个无穷数列都有极限. 例如，数列

$$1,2,3,\cdots,n,\cdots$$

与

$$-1,1,-1,1,\cdots,(-1)^n,\cdots$$

都没有极限.

练 习

1. 已知数列 $\frac{2}{1},\frac{3}{2},\frac{4}{3},\cdots,\frac{n+1}{n},\cdots$.

(1) 把这个数列的前 5 项在数轴上表示出来；

(2) 写出这个数列的各项与 1 的差的绝对值；

(3) 第几项后面所有的项与 1 的差的绝对值都小于 0.1？

都小于0.01？都小于0.0001？都小于任意给定的正数ε？

(4) 1是不是这个无穷数列的极限？

2. 已知数列 $4-\frac{1}{10}, 4-\frac{1}{20}, 4-\frac{1}{30}, \cdots, 4-\frac{1}{10n}, \cdots$.

(1) 计算$|a_n-4|$；

(2) 第几项后面的所有项与4的差的绝对值都小于0.01？都小于0.0001？都小于任意给定的正数ε？

(3) 确定这个数列的极限.

3. 证明：数列$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \cdots$的极限是0.

4. 一个无穷数列的通项公式是 $a_n=\frac{3n+1}{2n}$，证明它的极限是$\frac{3}{2}$.

1.2 数列极限的四则运算

在上一节中，我们能够根据极限的定义判定已给常数是不是已知数列的极限，并能根据这个定义确定一些简单数列的极限. 但是通常求极限的问题比较复杂，仅凭定义来确定极限是不方便的. 为此下面介绍数列极限的四则运算法则(证明从略)：

如果两个数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$有极限，那么由这两个数列各对应项的和、差、积、商组成的数列$\{a_n+b_n\}$、$\{a_n-b_n\}$、$\{a_n\cdot b_n\}$、$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$(对于商的情况还要求$b_n\neq0$和$\lim\limits_{n\to\infty}b_n\neq0$)有极限，

而且极限等于这两个数列的极限的和、差、积、商.

这个法则可以简单地记作:

如果$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$, 那么

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n+\lim\limits_{n\to\infty}b_n=A+B$;

2. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n-\lim\limits_{n\to\infty}b_n=A-B$;

3. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}b_n=A\cdot B$;

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}=\dfrac{A}{B}$ $(b_n\neq0, B\neq0)$.

特别地,如果 c 是常数,那么

$$\lim_{n\to\infty}(c\cdot a_n)=\lim_{n\to\infty}c\cdot\lim_{n\to\infty}a_n=c\cdot A.$$

例如, 数列$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots$的极限是 1;

数列$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots$的极限是 0.

这两个数列各对应项的和组成的数列是

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2},\frac{2}{3}+\frac{1}{4},\frac{3}{4}+\frac{1}{8},\cdots,\frac{n}{n+1}+\frac{1}{2^n},\cdots.$$

根据上面运算法则知道,这个数列的极限是 $1+0=1$.

这两个数列各对应项的积组成的数列是

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2},\frac{2}{3}\times\frac{1}{4},\frac{3}{4}\times\frac{1}{8},\cdots,\frac{n}{n+1}\times\frac{1}{2^n},\cdots.$$

根据上面运算法则知道,这个数列的极限是 $1\times0=0$.

例 1 已知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=5$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=3$, 求$\lim\limits_{n\to\infty}(3a_n-4b_n)$.

解: $\lim\limits_{n\to\infty}(3a_n-4b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}3a_n-\lim\limits_{n\to\infty}4b_n$

$=3\lim\limits_{n\to\infty}a_n-4\lim\limits_{n\to\infty}b_n=3\times5-4\times3=3.$

例2 求:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(5+\frac{1}{n}\right)$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-2}{n}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n+2}$ (4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2-2n+8}{4-n^2}$.

解: (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(5+\frac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}5+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}$

$=5+0=5.$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-2}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n}{n}-\frac{2}{n}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}3-\lim\limits_{n\to\infty}\left(2\cdot\frac{1}{n}\right)=3-2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}$

$=3-2\times0=3.$

(3) 当 n 无限增大时，分式$\frac{2n+1}{3n+2}$中的分子、分母同时无限增大，上面的极限运算法则不能直接运用. 为此，我们将分式中的分子、分母同时除以 n 后，再求它的极限.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{3+\frac{2}{n}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{2}{n}\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}3+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}}$$

$$=\frac{2+0}{3+0}=\frac{2}{3}.$$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-2n+8}{4-n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3-\dfrac{2}{n}+\dfrac{8}{n^2}}{\dfrac{4}{n^2}-1}$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\dfrac{2}{n}+\dfrac{8}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4}{n^2}-1\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}3-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4}{n^2}-\lim\limits_{n\to\infty}1}$$

$$=\frac{3-0+0}{0-1}=-3.$$

练　习

1. 已知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=-\dfrac{1}{3}$，求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(2a_n+3b_n)$;　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-b_n}{a_n}$.

2. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\dfrac{1}{n}\right)$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{5+\dfrac{3}{n}}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}$;　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{n^2+1}$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(5\cdot\dfrac{n+1}{n}\right)^2$;　　(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n+1}{2n}-\dfrac{3}{2^n}\right)$.

1.3　无穷等比数列各项的和

看下面的例子：

已知等比数列

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots,$$

求这个数列前 n 项的和 S_n 当 $n\to\infty$ 时的极限。

解：这个等比数列的公比是$\frac{1}{2}$.

根据等比数列前 n 项和的公式，得

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}.$$

因此，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}S_n&=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\\&=1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\\&=1-0=1.\end{aligned}$$

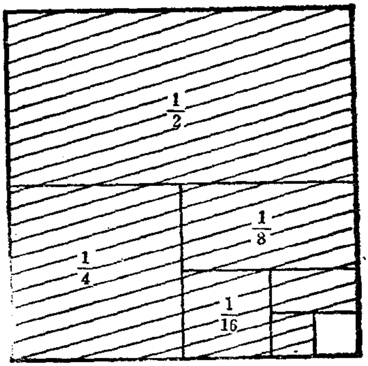


图 1-5

这个结果可从图 1-5 中看出：图中各小矩形与小正方形面积的和(阴影部分)的极限等于大正方形的面积.

上面这个等比数列的特点是：公比的绝对值小于 1. 当 n 趋向于无穷大时，数列前 n 项和的极限存在。

一般地，无穷等比数列

$$a_1, a_1q, a_1q^2, \cdots$$

在公比 q 的绝对值小于 1 时，无穷等比数列前 n 项的和 S_n 当 n 无限增大时的极限，叫做这个**无穷等比数列各项的和**，并且

用符号 S 表示.

现在我们来求 S.

无穷等比数列前 n 项的和是

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q},$$

因此,

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1}{1-q}-\lim_{n\to\infty}\frac{a_1 q^n}{1-q}$$

$$=\frac{a_1}{1-q}-\frac{a_1}{1-q}\lim_{n\to\infty}q^n.$$

现在我们证明, 当 $|q|<1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$.

对于任意给定的 $\varepsilon>0$,

$$|q^n-0|<\varepsilon$$

即

$$|q|^n<\varepsilon.$$

两边取对数, 得

$$n\lg|q|<\lg\varepsilon.$$

由于 $|q|<1$, 所以 $\lg|q|$ 是个负数, 故

$$n>\frac{\lg\varepsilon}{\lg|q|},$$

取 N 为任一大于 $\frac{\lg\varepsilon}{\lg|q|}$ 的正整数, 则当 $n>N$ 时,

$$|q^n-0|<\varepsilon.$$

成立, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0\ (|q|<1)$.

由此得,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q},$$

即
$$S = \frac{a_1}{1-q}.$$

这就是说，无穷等比数列各项的和等于它的第一项除以1减去公比所得的差.

例 1　求无穷等比数列 0.3，0.03，0.003，…各项的和.

解:　$\because \quad a_1 = 0.3, \quad q = 0.1,$

$$\therefore \quad S = \frac{0.3}{1-0.1} = \frac{1}{3}.$$

利用无穷等比数列各项和的公式，可以把循环小数化为分数.

例 2　化 $0.\dot{2}\dot{3}$ 为分数.

解:
$$\begin{aligned} 0.\dot{2}\dot{3} &= 0.232323\cdots \\ &= 0.23 + 0.0023 + 0.000023 + \cdots \\ &= \frac{23}{100} + \frac{23}{10000} + \frac{23}{1000000} + \cdots \\ &= \frac{\frac{23}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{23}{99}. \end{aligned}$$

这就是说，纯循环小数可以化为一个分数，这个分数的分子就是一个循环节的数字所组成的数，分母的各位数字都是9，9的个数与一个循环节的位数相同.

例 3　化 $0.2\dot{3}\dot{1}$ 为分数.

解:
$$\begin{aligned} 0.2\dot{3}\dot{1} &= 0.2313131\cdots \\ &= 0.2 + 0.031 + 0.00031 + 0.0000031 + \cdots \end{aligned}$$