高等学校教材同步辅导系列

工程数学

线性代数同步辅导

同济·第三、四版

楚兰英　武静波　主编

哈尔滨工业大学出版社

工 程 数 学

线性代数同步辅导

(同济第三、四版)

楚兰英　武静波　主编

哈尔滨工业大学出版社

内容简介

本书按照《线性代数》(同济大学编,第三、四版,高等教育出版社)的章节顺序分为六章,每章分四个版块。即考试大纲、必备知识、常考题型解题方法归纳与精解、教材同步习题全解。还包括1990~2002年研究生入学考试的全部试题,书末附有考试模拟试卷(一、二)及答案。

本书适合于在校大学生及考研同学作参考书,也可供自学者和科技工作者使用。

图书在版编目(CIP)数据

工程数学线性代数同步辅导/楚兰英主编.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2003.8

ISBN 7-5603-1928-9

Ⅰ.工… Ⅱ.楚… Ⅲ.工程数学-线性代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.TB111

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第067269号

出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区教化街21号 邮编150006
传　　真 0451-86414749
印　　刷 肇东粮食印刷厂
开　　本 850×1168 1/32 印张10.875 字数300千字
版　　次 2003年8月第1版 2003年8月第1次印刷
书　　号 ISBN 7-5603-1928-9/O·153
印　　数 1~6 000
定　　价 11.00元

前　　言

线性代数是大学数学课程的重要组成部分，是理工科学生学习其他课程的数学基础和工具，也是硕士研究生入学考试的一门必考科目。为了帮助在校大学生及考研同学扎实掌握线性代数的知识精髓和解题技巧，提高应试能力，我们根据国家教委审订的高等院校"高等数学"课程教学大纲，融学习指导和考研辅导为一体编写了此书。

本书按照《线性代数》(同济大学编，第三、四版，高等教育出版社)的章节顺序分为六章，每章分四个版块。

一、考试大纲——目的是使您明确本章的重点、难点、易考点。避免由于精力和水平的局限，而使一个人的学习过程存在着偏差和疏漏。

二、必备知识——将相应章节的内容进行了高度的归纳和总结，使您对内容清晰明了，成竹在胸。

三、常考题型解题方法归纳与精解——按照题型给出解题方法与技巧，使您可以举一反三，触类旁通。

四、教材同步习题全解——给出了《线性代数》(同济大学编，第三版)各章习题的全部解答。

在附录中给出了第四版与第三版相比，新增习题的部分解答。

本书还包括了 1990～2002 年研究生入学考试的全部试题，且在题后标明了试题的时间供学习线性代数和备考硕士研究生的读者参考。

本书第一、二、三章由楚兰英编写，第四、五、六章及模拟试卷一、二由武静波编写，由于编者水平所限，疏漏与错误在所难免，欢迎读者批评指正。

编　者

2003 年 8 月于哈工大

目　录

第一章 行列式

一、考试大纲

1. 了解 n 阶行列式的概念，掌握行列式的性质．
2. 会用行列式的性质和行列式按行(列)展开定理计算行列式．
3. 会用克拉默(Cramer)法则．

二、必备知识

1. n 阶行列式的定义

n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

等于 $n!$项的代数和，其中每一项都是取自不同行不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，而其符号为$(-1)^{\tau[j_1j_2\cdots j_n]}$，$j_1j_2\cdots j_n$ 为 $1,2,\cdots,n$ 的任一种排列，$\tau[j_1j_2\cdots j_n]$ 表示 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数．

2. n 阶行列式的性质

(1) 行列式与它的转置行列式相等．

(2) 互换行列式的两行(列)，行列式变号．

(3) 行列式的某一行(列)所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面．

(4) 若行列式的某一行(列)的元素都是两数之和，那么这个行列式等于两个行列式的和，例如

$$\begin{vmatrix} a_{1j}+a'_{1j} \\ a_{2j}+a'_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj}+a'_{nj} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{1j} \\ a'_{2j} \\ \vdots \\ a'_{nj} \end{vmatrix}$$

(5) 把行列式的任一行(列)的元素乘以同一个数后，加到另一行(列)的对应元素上去，行列式不变．

(6) 行列式中任一行(列)中各元素与其代数余子式的乘积之和等于该行列式．

(7) 行列式中任一行(列)中各元素与另一行(列)对应元素的代数余子

式的乘积之和等于零.

3. 几种特殊类型的行列式

直接利用行列式的定义即可得到下列几类行列式的值.

(1) 一阶行列式

$$D = | a | = a$$

(2) 二阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

(3) 三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{aligned} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ & a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

(4) 对角行列式

$$D = \begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

(5) 上(下) 三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} (*)$$

(6) 关于副对角线,其计算公式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

(7) 特殊分块三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & 0 & \cdots & 0 \\ * & \cdots & * & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & \cdots & * & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{m1} & \cdots & a_{mm} \\ b_{11} & \cdots & b_{1n} & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} & * & \cdots & * \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} * & \cdots & * & a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & \cdots & * & a_{m1} & \cdots & a_{mm} \\ b_{11} & \cdots & b_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{mn} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

(8) 行列式的乘法公式

设 $D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ $D_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$

记 $C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}, D = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}$

则 $D = D_1D_2$

(9) 范德蒙(Vandermonde) 行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geqslant i > j \geqslant 1} (x_i - x_j) =$$

$$\begin{aligned} &(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1) \times \\ &\qquad (x_3 - x_2)\cdots(x_n - x_2) \times \\ &\qquad\qquad \cdots \quad \cdots \quad \times \\ &\qquad\qquad (x_n - x_{n-1}) \end{aligned}$$

4. 行列式的计算

行列式计算是本章的主要内容，行列式的性质是行列式计算（或证明）的重要依据，计算行列式时常常利用行列式的性质、公式和定理，将其化为特殊行列式，有时还需要用到递推法、降阶法、升阶法（此法多采用的形式为加边法）、分析法等技巧．

5. 行列式的应用(Cramer 法则)

若一个含有 n 个未知量 n 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1}$$

其系数行列式 $D \neq 0$,则线性方程组(1)仅有一个解

$$x_i = \frac{D_i}{D}(i = 1,2,\cdots,n)$$

其中 D_i 是系数行列式 D 中的第 i 列元素换以常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$,而得到的行列式.

在以后几章中,还将利用行列式讨论方阵的逆,求矩阵的秩,求方阵的特征多项式及特征值等.

三、常考题型解题方法归纳与精解

【题型一】n 阶行列式的证明

【例 1.1】

(1) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} = 0$

(2) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$

证 (1) $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} =$

$$\sum(-1)^{t(p_1p_2p_3p_4p_5)} a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}a_{5p_5}$$

假设有 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}a_{5p_5} \neq 0$,由题设知 p_3,p_4,p_5 必等于 4 或 5,从而 p_3,p_4,p_5 中至少有两个相等,这与 $p_1p_2p_3p_4p_5$ 是 1,2,3,4,5 的一个全排列矛盾,故 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}a_{5p_5} = 0$,于是 $D = 0$.

(2) $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \sum(-1)^{t(p_1p_2p_3p_4)} a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}$

由题设,要使 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4} \neq 0$,必须 p_1,p_2 取 1 或 2,而 $p_1p_2p_3p_4$ 是 1,

2,3,4 的一个全排列,故 p_3,p_4 取 3 或 4,于是

$$\begin{aligned}D=&(-1)^{t(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}+(-1)^{t(1243)}a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}+\\&(-1)^{t(2134)}a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}+(-1)^{t(2143)}a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}=\\&a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}-a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}-a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}+a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}\end{aligned}$$

从而 $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{33}&a_{34}\\a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}=(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})(a_{33}a_{44}-a_{43}a_{34})=$

$$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}-a_{11}a_{22}aa_{34}a_{43}-a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}+a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}=D$$

【例 1.2】 已知 222,407,185 三个数都可以被 37 整除,不求行列式的值,证明 $\begin{vmatrix}2&2&2\\4&0&7\\1&8&5\end{vmatrix}$ 也可以被 37 整除.

证 $222=37\times6,407=37\times11,185=37\times5$,将该行列式的第 1、2 列依次乘 100、10 加到第 3 列,并提取第 3 列的公因子 37,得

$$\begin{vmatrix}2&2&2\\4&0&7\\1&8&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&2&222\\4&0&407\\1&8&185\end{vmatrix}=37\begin{vmatrix}2&2&6\\4&0&11\\1&8&5\end{vmatrix}$$

由行列式的定义可知,元素都是整数的行列式的值还是整数,故 $\begin{vmatrix}2&2&6\\4&0&11\\1&8&5\end{vmatrix}$ 是整数,从而行列式 $\begin{vmatrix}2&2&2\\4&0&7\\1&8&5\end{vmatrix}$ 可以被 37 整除.

【题型二】 n 阶行列式的计算

【例 1.3】 计算 4 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}2&-1&1&6\\4&-1&5&0\\-1&2&0&-5\\1&4&-2&-2\end{vmatrix}\text{之值}.$$

分析 本题的行列式没有太多的规律,因而用展开公式来计算,但要先利用行列式的性质将其恒等变形,让其某行(或列)有较多的零.

解 $D\xlongequal[c_4-5c_1]{c_2+2c_1}\begin{vmatrix}2&3&1&-4\\4&7&5&-20\\-1&0&0&0\\1&6&-2&-7\end{vmatrix}=$

$$(-1)\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}3&1&-4\\7&5&-20\\6&-2&-7\end{vmatrix}\xlongequal{r_2-5r_1}$$

$$-\begin{vmatrix}3&1&-4\\-8&0&0\\6&-2&-7\end{vmatrix}=-(-8)(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1&-4\\-2&-7\end{vmatrix}=120$$

评注 r_i 表示行列式的第 i 行,c_j 表示行列式的第 j 列,对换 i 行与 j 行记成 $r_i\leftrightarrow r_j$,第 i 行乘以 k 记成 kr_i,i 行的 k 倍加至 j 行记成 r_j+kr_i,类似有列变换的记号.

用行列式展开式时,不要丢掉正负号.这是初学时常犯的错误.

【例 1.4】

求 $D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 2 \end{vmatrix} (n \geqslant 3)$

分析 该类行列式称为三对角行列式，通常的计算方法是将它按某行(列)展开，得到 D_n 与 D_{n-1} 和 D_{n-2} 的关系，再进一步递推求解或归纳证明．

解 $D_n \xlongequal{\text{按第 1 行展开}} 2D_{n-1} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 2 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 2 \end{vmatrix} =$

$$2D_{n-1} - D_{n-2}$$

把上面的递推公式改写为 $D_n - D_{n-1} = D_{n-1} - D_{n-2}$

利用上式继续递推，可得

$D_n - D_{n-1} = D_{n-1} - D_{n-2} = \cdots = D_2 - D_1$

由于 $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3, D_1 = 2$，所以 $D_n - D_{n-1} = 1$. 从而又有

$D_n = D_{n-1} + 1 = (D_{n-2} + 1) + 1 =$

$\qquad D_{n-2} + 2 = \cdots = D_1 + (n-1) = n + 1$

【例 1.5】

n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} =$ ____ .　　(1991.5)

解 $\underline{a^n + (-1)^{n+1} \cdot b^n}$.

将所求行列式按第一列展开得

$a \cdot \begin{vmatrix} a & b & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix}_{n-1} + (-1)^{n+1} \cdot b \cdot \begin{vmatrix} b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b \end{vmatrix}_{n-1} =$

$a \cdot a^{n-1} + (-1)^{n+1} \cdot b \cdot b^{n-1} = a^n + (-1)^{n+1} \cdot b^n$

【例 1.6】

四阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$ 的值等于　　(1996.1)

(A) $a_1a_2a_3a_4 - b_1b_2b_3b_4$　　(B) $a_1a_2a_3a_4 + b_1b_2b_3b_4$

(C)$(a_1a_2-b_1b_2)(a_3a_4-b_3b_4)$　(D)$(a_2a_3-b_2b_3)(a_1a_4-b_1b_4)$

解　(D)正确

因为
$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{展开}]{\text{按第1列}} a_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & 0 \\ b_3 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} - b_4\begin{vmatrix} 0 & 0 & b_1 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ b_3 & a_3 & 0 \end{vmatrix} =$$
$$a_1a_4\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} - b_1b_4\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} = (a_1a_4-b_1b_4)(a_2a_3-b_2b_3)$$

【例 1.7】 五阶行列式

$$D_5 = \begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix} = \underline{\qquad}.$$　(1996.5)

解　$\underline{1-a+a^2-a^3+a^4-a^5.}$

令
$$D_n = \begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a \end{vmatrix}_n, n \in \mathbf{N}.$$

则　$D_n \xlongequal{\text{各行加到第一行}}$
$$\begin{vmatrix} -a & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & 1-a & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a \end{vmatrix} \xlongequal[\text{展开}]{\text{按第一行}}$$
$(-a)\cdot D_{n-1}+1\cdot(-1)^{n+1}\cdot(-1)^{n-1}=1-aD_{n-1}$

因　$D_1=1-a$

所以　$D_2=1-aD_1=1-a(1-a)=1-a+a^2$,

$D_3=1-aD_2=1-a+a^2-a^3$,

$D_4=1-aD_3=1-a+a^2-a^3+a^4$,

$D_5=1-aD_4=1-a+a^2-a^3+a^4-a^5$

【例 1.8】 记行列式 $\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$ 为 $f(x)$,则方程 $f(x)=0$ 的根的个数为

(A)1　(B)2　(C)3　(D)4　(1999.2)

解 (B) 正确

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{c_3-c_1\\ c_4-c_1}]{c_2-c_1}$$

$$\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 2x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -2 \\ 4x & -3 & x-7 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2-r_1}$$

$$\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & -1 \\ x & 0 & 0 & 0 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -2 \\ 4x & -3 & x-7 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{展开}]{\text{按第二行}}$$

$$-x\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & x-2 & -2 \\ -3 & x-7 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal[c_3+c_1]{}$$

$$-x\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x-2 & -1 \\ -3 & x-7 & -6 \end{vmatrix} = -x\begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ x-7 & -6 \end{vmatrix} = 5x(x-1)$$

$f(x)=0$ 的根的个数为 2，故选(B).

【例 1.9】设行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$，

则第四行各元素余子式之和的值为____． (2001.4)

解 $\underline{-28.}$

第四行各元素余子式之和为：

$D_1 = M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44} = -A_{41}+A_{42}-A_{43}+A_{44}$

$$D_1=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{列}} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 7 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{列}}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$0+\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -28$$

【例 1.10】计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1\end{vmatrix}\text{之值}.$$

分析 为简化计算可利用行列式的性质去掉行列式里的分母，转化为整数的运算.

解 （三角化法）

$$D=\left(\frac{1}{2}\right)^4\begin{vmatrix}2&1&1&1\\1&2&1&1\\1&1&2&1\\1&1&1&2\end{vmatrix}\xlongequal{\sum r_i}\frac{1}{16}\begin{vmatrix}5&5&5&5\\1&2&1&1\\1&1&2&1\\1&1&1&2\end{vmatrix}=$$

$$\frac{5}{16}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&1&1\\1&1&2&1\\1&1&1&2\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1\\r_3-r_1}}\frac{5}{16}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{vmatrix}=\frac{5}{16}(\text{由 }*)$$

评注 如果行列式各列元素和相等都是 a，一个常用的办法是将各行均加至第一行，则第一行有公因数 a 可提到行列式记号之外.

对行列式作恒等变形，化其为上三角或下三角行列式，利用公式（ * ）是常用技巧.

【例 1.11】计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&b_1&0&0\\-1&1-b_1&b_2&0\\0&-1&1-b_2&b_3\\0&0&-1&1-b_3\end{vmatrix}$$

解 （三角化法）

$$D\xlongequal{r_2+r_1}\begin{vmatrix}1&b_1&0&0\\0&1&b_2&0\\0&-1&1-b_2&b_3\\0&0&-1&1-b_3\end{vmatrix}\xlongequal{r_3+r_2}$$

$$\begin{vmatrix}1&b_1&0&0\\0&1&b_2&0\\0&0&1&b_3\\0&0&-1&1-b_3\end{vmatrix}\xlongequal{r_4+r_3}\begin{vmatrix}1&b_1&0&0\\0&1&b_2&0\\0&0&1&b_3\\0&0&0&1\end{vmatrix}=1(\text{由 }*)$$

评注 逐行（列）相加减的技巧应当知道.

【例 1.12】计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$ 之值，其中 $a_i\neq 0, i=1,2,\cdots,n$.

分析 这是"爪"型行列式，这一类行列式通常是用提取公因式法化其为三角形．

解 第 i 行提出 $a_{i-1}(i=2,3,\cdots,n+1)$，得

$$D=a_1a_2\cdots a_n\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{1}{a_1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{a_2} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1-r_2-r_3-\cdots-r_n}$$

$$\prod_{i=1}^{n}a_i\begin{vmatrix} a_0-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{a_1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{a_2} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}a_i\left(a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)(\text{由 } *)$$

【例 1.13】计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}\quad (b_1b_2\cdots b_n\neq 0).$$

分析 该行列式的各行含有共同的元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，可在保持原行列式值不变的情况下，增加一行一列(称为升阶法或加边法)，适当选择所增行(或列)的元素，使得下一步化减后出现大量的零元素．

解

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1+b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix} \xlongequal[r_{n+1}-r_1]{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-r_1 \\ \vdots}}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & b_n \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{\vdots \\ c_1 + \frac{1}{b_n} c_{n+1}}]{\substack{c_1 + \frac{1}{b_1} c_2 \\ c_1 + \frac{1}{b_2} c_3}}$$

$$\begin{vmatrix} 1 + \dfrac{a_1}{b_1} + \cdots + \dfrac{a_n}{b_n} & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_n \end{vmatrix} =$$

$$b_1 b_2 \cdots b_n \left(1 + \frac{a_1}{b_1} + \cdots + \frac{a_n}{b_n}\right)$$

【例 1.14】计算(升阶法)行列式 $|I_n - 2uu^{\mathrm{T}}|$,其中 I_n 是单位阵,$u = (u_1, \cdots, u_n)^{\mathrm{T}}$ 为 n 维实列向量,且 $u^{\mathrm{T}}u = 1$.

解 将行列式 $|I_n - 2uu^{\mathrm{T}}|$ 升为 $(n+1)$ 阶行列式

$$|I_n - 2uu^{\mathrm{T}}| = \begin{vmatrix} 1 & 2u_1 & 2u_2 & \cdots & 2u_n \\ 0 & 1 - 2u_1^2 & -2u_1u_2 & \cdots & -2u_1u_n \\ 0 & -2u_2u_1 & 1 - 2u_2^2 & \cdots & -2u_2u_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & -2u_nu_1 & -2u_nu_2 & \cdots & 1 - 2u_n^2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2u_1 & 2u_2 & \cdots & 2u_n \\ u_1 & 1 & & & \\ u_2 & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ u_n & & & & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 - \sum\limits_{i=1}^{n} 2u_i^2 & 2u_1 & 2u_2 & \cdots & 2u_n \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{vmatrix} =$$

$$1 - 2\sum_{i=1}^{n} u_i^2 = -1 \left(由 \sum_{i=1}^{n} u_i^2 = 1\right)$$