

《中学各科解难》丛书

初中数学解难手册

丛书主编 张盛如

分册主编 方金秋 高敬东



中国 社 会 出 版 社

《中学各科解难》丛书

初中数学解难手册

丛书主编 张盛如

丛书副主编 张光勤

分册主编 方金秋 高敬东

编 著 高敬东 庄剑芳
张长胜 许俊岐
张占龙

中国社会出版社

《中学各科解难》丛书

初中数学解难手册

丛书主编 张盛如

分册主编 方金秋 高敬东

中国社会出版社出版

北京北河沿147号 邮政编码 100006

北京隆昌印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

•

开本：787×1092毫米1/32印张，14.75 字数：326千字

1990年10月第一版 1990年10月第一次印刷

印数：1—39,000册 定价：4.85元

ISBN 7-80088-105-9/G·41

编委会名单

丛书主编 张盛如

丛书副主编 张光勤

编委

时雁行	祁乃成	温才鉴	康锦屏
方金秋	张盛如	孟广恒	郭正权
黄儒兰	张光勤	张永昌	张景林
陶麟	高敬东	冯琦琳	张风清
林锐仁	唐兆钰		

前 言

目前，关于提高中学教学质量的议论颇多，方法也似百花齐放，但我们认为：要提高中学教学水平和学习质量，关键还在有针对地探索如何加强基础知识的教学和基本能力的培养这个根本问题上。要解决这个问题，首先便要把着眼点放在帮助学生正确理解和灵活运用基础知识这个焦点上。这个问题不解决，无论什么样的“系列训练”、“标准题型”、“自学指导”都不过“空中楼阁”可望而不及，都是无济于事的。于是，我们产生了要编一套帮助中学师生，进行基础知识教学和学习使用的《中学各科解难》丛书的想法。

在编写中，我们严格以现行中学各科教学大纲为纲，紧紧围绕中学各门课程教学的重点、难点，密切联系学生平时学习和在考试中暴露出来的问题，对知识进行分类梳理，问题进行具体指导，并努力把重点放在总结学习方法、规律和解难能力的培养上。为达此目的，《丛书》在内容层次的结构上，除《语文》、《外语》外，也尽量按此思路安排。

《丛书》各分册的每一章（或单元），一般由“知识要点”、“重点、难点提示”、“典型问题解析”、“自测练习”等四个内容层次组成。在“知识要点”部分，主要对本章内容作概括性的提示、介绍，以从整体上帮助学生了解本章的知识框架及知识间的内在联系；在“重点、难点提示”部分，主要对本章难以理解的重点问题，分别阐释、论证、疏导，以从局部上帮助学生深入理解知识的特质、深层结构

及相互关系，从而能牢固地掌握重点知识；在“典型问题解析”部分，主要从正反两面选择能够举一反三，解难释疑的例题，从各种角度，用各种方法，对其进行解析、论证，以帮助学生增强综合运用知识解决问题的能力，并开拓他们的思路；在“自测练习”部分，则本着“少而精”的原则，编设了一些与学习和掌握本章内容有关的练习，目的在于加深学生对本章知识的理解提高实际运用的能力。

由此可见，本丛书的显著特点是：

一、它是以讲述问题，解难释疑为出发点的；

二、它的能力培养是建立在坚实的基础知识的理解和运用之上的；

三、它有以《大纲》为纲，以教材为具体内容，以考试情况为验证方法的编写体系；

这样，《丛书》就能比较全面地贯彻《大纲》精神，体现教学内容和要求，做到有目的、有重点地突出能力培养，从而有利于从实际提高教学质量。

然而，理论与现实之间，始终是存在距离的。有好的设想，不一定能完全达到预期的目的，要达到预期的目的，是要经过很多人的不懈努力才能实现的。但是，总得有人迈第一步吧！现在，我和我的新老朋友们，已大胆地迈出了这一步，尽管步伐并不整齐，速度有快有慢，步幅有大有小，但总比原地不动或者是追形式，赶时髦要好。

在《丛书》即将付梓之际，写上这段近乎“老话”的“新话”，权当前言，不当之处，敬请专家、读者赐教。

张盛如

1990年7月于北京阳照寓

目 录

第一章	实数	1
第二章	非负的量	30
第三章	代数式	46
第四章	方程和方程组	102
第五章	怎样解应用题	156
第六章	一元二次方程的根的判别式、根与系数的关系	192
第七章	函数的基本概念	214
第八章	二次函数	239
第九章	不等式与不等式组	271
第十章	指数与对数	288
第十一章	解三角形	305
第十二章	怎样学平面几何	334
第十三章	平面几何基本概念	356
第十四章	直线形	363
第十五章	圆	390
第十六章	圆内计算	416
第十七章	用三角函数解平面几何题	442
第十八章	统计初步	459

第一章 实数

初中代数中数的范围，是在小学学过正数的基础上引进负数，把数的概念扩充到有理数，又进一步引入无理数，从而把数的概念扩充到实数。因此初中数学的研究都是在实数范围内进行的，故对于实数中的一些重要概念、运算法则和性质必须有透彻的理解和牢固的掌握。

一、内 容 提 要

本章主要包括实数的分类、数轴、相反数、绝对值、倒数等概念，实数比较大小法则、有理数及实数的运算法则、运算律。

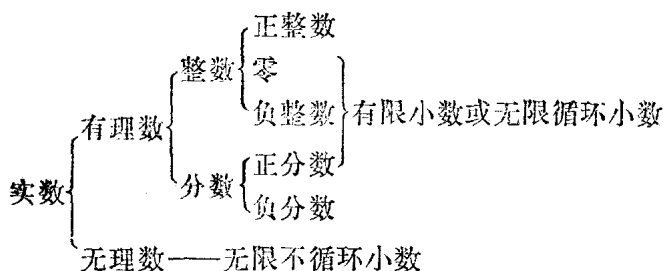
绝对值是本章的重点，也是难点，它对学习实数的性质、运算起着关键性的作用，而且对于今后学习与掌握含有绝对值符号的代数式、不等式和方程都是极为重要的，它是贯穿于中学数学课之始终的重要概念，因此必须予以足够的重视，抓住定义，由浅入深把有关代数式、根式、不等式等知识沟通起来，并注意一定的解题技巧，培养分析问题的能力。

通过对实数的学习不仅要理解和掌握数的定义、分类及各种与数有关的基本概念，而且要熟练地掌握数的运算定律与性质，能正确合理地进行各种数系的运算，提高自己的计算能力。

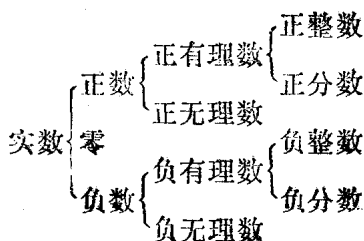
(一) 基 本 概 念

1. 实数的分类

(1) 按有理数、无理数分类



(2) 按正、负数分类



2. 数轴

(1) 定义：规定了原点、正方向和长度单位的直线，叫做数轴。

(2) 数轴上的所有点与全体实数具有一一对应的关系，即每一个实数都可以用数轴上的唯一的点来表示；反过来，数轴上的每一个点都表示唯一的一个实数。

3. 相反数

(1) 定义：只有符号不同的两个数叫做互为相反数，规

定零的相反数为零（即实数 a 和 $-a$ 叫做互为相反数）。

几何意义：在数轴上原点的两旁，到原点距离相等的两个点所表示的两个数是互为相反的数，零的相反数为零。

4. 绝对值

(1) 定义：一个正实数的绝对值是它本身，一个负实数的绝对值是它的相反数，零的绝对值是零。

用数学式子表示为：

$$|a| = \begin{cases} a & (a > 0) \\ 0 & (a = 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$$

a ——是任意实数

几何意义：在数轴上表示这个数的对应点离开原点的距离。

如果实数 a 在数轴上的对应点为 A ，则 $|a| = |OA|$

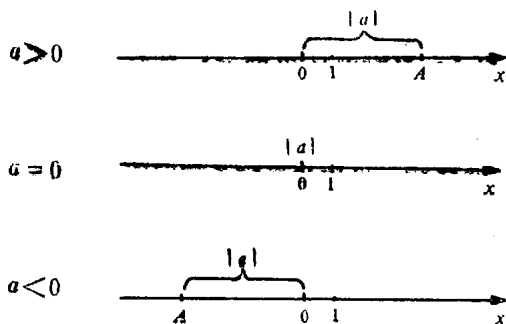


图 1-1

(2) 性质①任何一个实数 a 的绝对值是一个非负数（正实数或零）即 $|a| \geq 0$ ；

② 任何一个实数都有唯一的绝对值；

③ 互为相反数的两个数，其绝对值恒等，即 $|a| = |-a|$ ；

④ 已知一个数的绝对值求原数，一般原数有两个，它们是互为相反数，当一个数的绝对值为零时，原数只有一个，则为零。

⑤ 如果两个数的绝对值相等，则这两个数不一定相等。
例 $|-5| = |5|$ ，但 $-5 \neq 5$ 。

⑥ 任何一个实数都小于等于它的绝对值，即 $a \leq |a|$ ，
例 $3 = |-3|$ ， $-3 < |-3|$ 。

5. 倒数

定义：1 除以一个数的商，叫做这个数的倒数，零没有倒数。

互为倒数的定义还可这样理解：

若 a 、 b 为两个不为零的实数， $ab = 1$ （或 $a = \frac{1}{b}$ ）则 a 和 b 互为倒数；反之，若 a 和 b 互为倒数，则 $ab = 1$ （即 $a = \frac{1}{b}$ ）。

6. 实数的大小比较

实数的大小比较，可结合数轴来阐明比较法则，在数轴上表示两个数的点，右边的点所表示的数较大。

法则：（1）正数都大于零，负数都小于零，正数大于一切负数；

（2）两个正数，绝对值较大的正数大；

（3）两个负数，绝对值较大的反而小。

在比较实数大小时，有时也用求差的方法（比差法）和求商的方法（比商法）：

比差法：若 $a - b > 0$ ，则 $a > b$ ；若 $a - b < 0$ ，则 $a < b$ ；

若 $a - b = 0$ ，则 $a = b$ 。

用比差法比较两实数大小时的一般步骤：① 作差；② 变形：通常用配方法或分解因式；③ 判断其 > 0 、 $= 0$ 、 < 0 。

比商法：在 $a > 0$ 、 $b > 0$ 时，若 $\frac{a}{b} > 1$ ，则 $a > b$ ；若 $\frac{a}{b} < 1$ ，则 $a < b$ ；若 $\frac{a}{b} = 1$ ，则 $a = b$ 。

(二) 基 本 运 算

实数的运算主要是有理数的运算、无理数运算，因此重点放在这两部分内容上。

1. 有理数的运算：在有理数范围内，加、减、乘、除（零不能做除数）运算全能实施。

有理数的四则运算法则关键在于搞清符号法则以及利用绝对值意义，把运算转化为算术数中的运算，也要注意“+”与“-”这两个符号的双重意义，即它们既是运算符号，又是性质符号。

2. 实数的运算：有理数集合的一切运算性质，在实数集合内都适用，正数的开方运算总能在实数集合内实施，但是负实数的开偶次方运算在实数集合内不能实施。

实数的运算，通常是取它的近似值，进行近似计算，因此实数运算实际上是通过有理数的运算来进行的。

3. 运算定律

加法交换律： $a + b = b + a$

加法结合律： $(a + b) + c = a + (b + c)$

乘法交换律： $ab = ba$

乘法结合律: $(ab)c = a(bc)$

乘法对加法的分配律: $a(b+c) = ab+ac$.

4. 运算顺序

(1) 在加、减、乘、除、乘方和开方六种运算中, 加、减为第一级运算, 乘、除为第二级运算, 乘方、开方为第三级运算;

(2) 先计算“三级”, 再算“二级”, 最后算“一级”, 如有括号, 先计算括号内的;

(3) 若只有同一级的运算, 则从左到右依次运算。

注意: 进行计算时, 要注意与简便运算结合起来, 养成能充分运用运算法则、定律与运算顺序使运算合理简捷的习惯。

二、例 题 分 析

例 1 指出下列各实数中, 哪些是自然数、整数、有理数、无理数、正数、负数?

-5 , 3.1416 , $-\sqrt{3}$, -2.5% , π , 0 , $\sqrt{16}$, $\sin 30^\circ$, $\operatorname{tg} 60^\circ$, $\lg 100$, 3.2×10^{21} , 5.0×10^{-13} .

【解】 自然数: $\sqrt{16}$, $\lg 100$, 3.2×10^{21} .

整数: -5 , 0 , $\sqrt{16}$, $\lg 100$, 3.2×10^{21} .

有理数: -5 , 3.1416 , -2.5% , 0 , $\sqrt{16}$, $\sin 30^\circ$, $\lg 100$, 3.2×10^{21} , 5.0×10^{-13} .

无理数: $-\sqrt{3}$, π , $\operatorname{tg} 60^\circ$.

正数: 3.1416 , π , $\sqrt{16}$, $\sin 30^\circ$, $\operatorname{tg} 60^\circ$, $\lg 100$, 3.2×10^{21} , 5.0×10^{-13} .

负数: -5 , $-\sqrt{3}$, -2.5% .

注意：(1) “0”是整数集中的数，不要漏掉；(2) 3.2×10^{21} 和 5.0×10^{-13} 是用科学记数法表示的数，故前者原数是一个正整数，后者的原数是一个正的小数；(3) 圆周率 π 是无理数，3.1416是 π 的近似值是一个有理数， $\pi \approx 3.1416$ ；(4) 不要把所有带根号的数都认为是无理数（如题中 $\sqrt{16}$ ）是有理数。判定 $\sqrt{a}$ （ a 为正有理数）的数是否为无理数或有理数，主要看：若 a 是一个完全平方数，则 $\sqrt{a}$ 为有理数，若 a 为非完全平方数，则 $\sqrt{a}$ 为无理数。

例 2 判断题（正确的画“√”，错误的画“×”）

(1) 在实数范围内，如果一个数不是正数，则一定是负数。 (×)

说明：因为实数包括正数、负数和零。

(2) 无限小数都是无理数。 (×)

说明：无限小数包括无限循环小数和无限不循环小数，无限循环小数是有理数，所以无限小数不一定是无理数。

(3) 无理数都是无限小数。 (√)

说明：无限不循环小数称为无理数，所以无理数一定是无限小数。

(4) $-a$ 一定是负数。 (×)

说明：当 a 为负数时， $-a$ 即负数的相反数为正数。

(5) 最小的正整数是零。 (×)

(6) 零既不是正数，也不是非负数。 (×)

说明：非负数即包括正数和零。

(7) 不存在最小的正数，也不存在最大的正数。 (√)

(8) 无理数就是开方开不尽的数。 (×)

说明：开方开不尽的数一定是无理数，但无理数不一定由开方开不尽得到，可以是其他无限不循环小数。

(9) 在数轴上有一个点，已知离开原点的距离是3个单位，这个点表示的数一定为3. (×)

(10) 已知数轴上的一个点，表示的数为3，这个点离开原点的距离一定是3个单位. (✓)

注意：数轴上任意两点之间的距离都是一个非负数。

(11) 已知点A和B都在同一条数轴上，点A表示7，又知点B和点A相距10个单位，则点B表示的数一定是17. (×)

思考：为什么是错的。

(12) 如果A、B两点表示两个相邻的整数，则这两点之间的距离是一个单位. (✓)

(13) 如果A、B两点之间的距离是一个单位，则这两点表示的数一定是两个相邻的整数. (×)

(14) $\frac{2}{5}$ 的相反数是 $\frac{5}{2}$. (×)

(15) -0.001 的相反数是 $\frac{1}{1000}$ (✓)

(16) $-\frac{1}{7}$ 的相反数是7. (×)

说明：(14) ~ (16) 题，要根据相反数的定义去判断，不要与倒数概念相混淆。

(17) 如果两个数互为相反数，那么表示这两个数的点离开原点的距离相等. (✓)

(18) 如果 $|m| > |n|$ ，那么 $m > n$. (×)

说明：用一反例说明其结论是不正确的，即可说明此命题是不成立的。例 $m = -5$ ， $n = -3$ ， $|-5| > |-3|$ ，但 $-5 < -3$ 。

(19) 已知两数的绝对值相等，那么这两个数也相等.

(×)

说明: 例 $|-3| = |3|$. 但 $-3 \neq 3$.

(20) $|-a| > 0$, 则 $a > 0$ 或 $a < 0$. (✓)

(21) $\frac{3x}{|x|-4}$ 有意义, 则 $\frac{2x}{-x-4}$ 也有意义. (✓)

说明: 当 $\frac{3x}{|x|-4}$ 有意义时, 则 $x \neq \pm 4$, 而当 $x \neq \pm 4$

时, 则 $\frac{2x}{-x-4}$ 有意义.

(22) 如果 x, y 是两个负数, 并且 $x < y$, 则 $|x| < |y|$.

(×)

说明: 反例 $-5 < -2$, 但 $|-5| > |-2|$

(23) 一个整数的倒数都小于这个整数. (×)

说明: 反例 -2 的倒数为 $-\frac{1}{2}$, 而 $-\frac{1}{2} > -2$.

(24) 任何正数大于它的倒数. (×)

说明: 反例 $\frac{1}{3}$ 的倒数是 3 , 但 $\frac{1}{3} < 3$.

(25) 任意实数 a 的倒数都可以用 $\frac{1}{a}$ 表示. (×)

说明: 零没有倒数.

例 3 填空:

(1) 在数轴上一个点与原点的距离是 5 , 这个点所表示的数是 ± 5 .

(2) 一个点在数轴的负半轴上, 且与原点的距离是 3.5 , 这个点所表示的数为 -3.5 , 一个点在正半轴上, 且与原点的距离是 $4\frac{1}{2}$, 这个点所表示的数为 $4\frac{1}{2}$.

(3) $-x$ 是 x 的相反数, 2 的相反数的相反数是 2 ,

-5 的相反数的相反数是 -5。

(4) $n-2$ 的相反数为 $2-n$, $\sqrt{3}-2\sqrt{5}$ 的相反数为 $2\sqrt{5}-\sqrt{3}$ 。

说明: (3)、(4) 题扣住相反数定义。

(5) 一个数的绝对值等于 7, 则这个数为 ± 7 。

说明: 已知一个数的绝对值, 求原数, 一般有两个。

(6) 5 的相反数的绝对值是 5, -5 的绝对值的相反数是 -5。

说明: 前者先求其相反数, 再求相反数的绝对值。

(7) 如果 $|x| < 3$, 当 x 为整数时有 $0, \pm 1, \pm 2$ 。

说明: 本题即求到原点距离小于 3 的整数有哪些个。

(8) 绝对值小于 5.2 的所有整数是 $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5$ 。

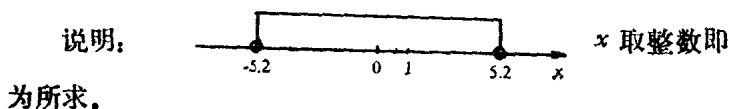


图 1-2

(9) 绝对值大于等于 2 小于 5.3 的所有负整数是 $-2, -3, -4, -5$ 。

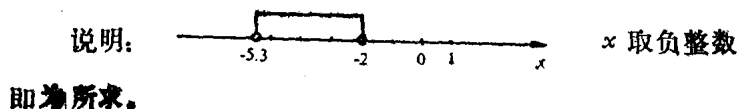


图 1-3

小结: (7) ~ (9) 利用数形结合去说明, 通过数轴利用绝对值的几何意义去求更为简便。

(10) 实数 m 、 n 在数轴上的对应点如图