平面机构綜合理論的几何工具

〔苏〕Я. Л. 格罗尼穆斯 著

机 械 工 业 出 版 社

本书是机构綜合法的数学工具书，书中系統地闡述了学习平面机构綜合几何法所必需具备的基础知識，主要內容包括：代数曲綫与射影几何的基础理論；微分几何基础；运动几何基础。

本书主要是为机械設計人員写的，机构綜合的科研工作人員及高等学校师生也可参考。

Я. Л. Геронимус

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ АППАРАТ ТЕОРИИ СИНТЕЗА ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ

Физматгиз 1962

（根据苏联国立数理出版社一九六二年版譯出）

* * *

平面机构綜合理論的几何工具

〔苏〕Я. Л. 格罗尼穆斯 著

陈兆雄 譯

*

机械工业出版社出版（北京苏州胡同 141 号）

（北京市书刊出版业营业許可証出字第 117 号）

机械工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 · 各地新华书店經售

*

开本 850 × 1168 1/32 · 印張 12 11/16 · 字数 324 千字

1966年 3 月北京第一版 · 1966年 3 月北京第一次印刷

印数 0,001— 3,300 · 定价（科六）1.90 元

*

統一书号：15033 · 4003

譯 者 序

在机械产品设计过程中，需要进行下列两方面的工作：（1）选定机构的结构简图，保证构件能具有给定的运动形式；（2）确定机构的运动简图（其中标出了和构件运动有关的尺寸），保证构件能具有给定的运动规律。作为一门基础技术科学的机械原理，其中研究机构设计內容的部分称为机构综合，而上述前一工作称为结构综合，后一工作称为尺寸综合。

目前阐述机构尺寸综合问题的两大基本方向是代数法和几何法，代数法以结果精确、应用普遍见长，几何法以求解简单、作图醒目取胜，各有特色。经过科学技术的不断交流，两法彼此取长补短，现在已有互相渗透的趋势。

平面机构综合几何法建立在一些解析几何、射影几何、微分几何、运动几何的概念的定理上，这些数学工具对高等工业院校机械专业的毕业生来说也是沒有接触过的。由于这些数学知识牵涉面较广，有些內容也比较深入，故不仅一般期刊文献，即使专门总结著作，对此也都不加推导和论证。这就严重阻碍了对几何学派著作的理解和应用，更无从据以改进和发展现用的机构综合方法。本书就是为了弥补这个缺陷而撰写的。

在本书中，作者从平面机构综合几何法的需要出发，系统地介绍了上述各门几何分支中的有关材料，并且密切结合数学內容的阐述，列举了这些材料在机构综合上不少具体应用示例，这对加深理解和熟练运用上述数学工具有很大的好处。为了适应广大工程技术人员的情况，作者还特别注意使一般具有数学解析知识的读者都能看懂本书。本书可供机械学科研工作者、机械设计人员阅读，也可作为高等工业院校师生学习机构综合的一本参考读物。一般来说，掌握本书后，阅读几何学派的著作一般不会再在数

学上感到困难。本书中的系统性较强，但也有些地方显得较烦琐。如读者能以此作为一本数学方面的工具书，带着机构综合方面所遇到的一些具体问题去学习，则效果当更为理想。

由于译者水平所限，在翻译本书工作中难免有许多不妥之处，敬希读者指正。

译　者

1965年5月23日

目　次

第一篇　代数曲綫和射影几何的理論基础

第二篇　微分几何基础

第三篇　运动几何基础

第一篇

代数曲綫和射影几何的理論基础

第一章 解析几何中的假元素和虚元素

如果我们把高等工业院校在解析几何普通教本中讲授的有关点、直线和曲线的基本概念加以扩展，便可以得到解析几何的许多新概念，使得这门学科具有更大的普遍性；反之，如果不作这样的扩展，进一步研究射影几何的一些基本原理将是不可能的。

我们从引入无限远点或假点（Бесконечно удаленная точка или несобственная точка）这个概念开始。

§1 直綫的无限远点

1．设在直线 g（图 1）上，以两点的横座标 x_1'、x_2'，即有向线段值

$$x_1'=\overline{OM}_1,\quad x_2'=\overline{OM}_2$$

给定 M_1 和 M_2 点；这直线上任一点 M 的位置可以用二有向线段的比值

$$\lambda=\frac{\overline{M_1M}}{\overline{M_2M}} \tag{1.1}$$

来表示；对于 M_2 点以右的各点而言，$\overline{M_1M}$ 和 $\overline{M_2M}$ 同号，且 $M_1M>M_2M$，故这比值大于 1；对于 M_1 点以左的各点而言，$M_1M<M_2M$，这比值为正，但小于 1；对于 M_1 和 M_2 之间的各点，这比值为负；M_1 和 M_2 点则对应于 $\lambda=0$ 和 $\lambda=\infty$。如果 $x=\overline{OM}$ 是 M 点的横座标，那末比值(1.1)具有下列的形式

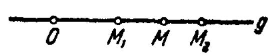

图 1

$$\lambda=\frac{x-x_1'}{x-x_2'}. \tag{1.2}$$

由此我们不难求出所求的横座标

$$x(1-\lambda)=x_1'-\lambda x_2', \quad x=\frac{x_1'-\lambda x_2'}{1-\lambda}. \tag{1.3}$$

这条直线上每一点M都和一个确定的比值λ相对应，但是逆断定是不正确的；$\lambda \neq 1$的每一个数值都和这条直线上一个确定的点相对应；我们之所以必须提出一个保留条件$\lambda \neq 1$，不仅是由于形式上的理由（因为在(1.3)中除以$1-\lambda$时，必须假定$\lambda \neq 1$），而且是按照问题的实质：前已述及，在直线g上沒有这样的一点，对于这点而言，有$\lambda=1$，即$\overline{M_1M}=\overline{M_2M}$。由(1.3)我们看出，当$\lambda$趋近1时，$M$点横座标的模无限地增大；这样我们便有理由引入如下的定义：我们认为，比值$\lambda=1$和我们这条直线上假点或无限远点相对应。我们认为这样，即每一条直线上只有一个无限远点。在这种情况下，在这条直线上添上一个无限远点后，便可以说，比值λ的每一个数值都和一个确定的点相对应，相反亦然，直线上每一点M都和一个确定的λ值相对应。

如果在直线g以外取一点S（图2），并且作以S为中心的直线束(пучок прямых)，即通过S点的直线集合，那末我们可以得到同样的结论，即在我们这条直线上必须添上一个无限远点。如果用直线a、b、c、……把S点和直线g上A、B、C、……点相应连接起来，那末我们可以说，直线g上每一点都和线束中连接这点和S点的直线相对应；但是，并不能断定线束中每一条直线都和这直线和直线g一个确定的交点相对应，因为直线$g' \parallel g$时直线g'和直线g并不相交，所以直线g上沒有一点和直线g'相对应。如果我们用上述方法在直线g上添上一点，那末直线g上无限远点便和直线g'相对应，从而在直线g上各点和中心S的线束中各直线之间，将有互相一一对应的关系。

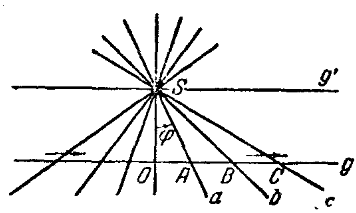

图 2

添上无限远点的直线，我们称之为射影直线（проективная

прямая);因为它具有一个无限远点,所以应该把它看成是闭合线;实际上,如果使直线绕 S 点作反时针方向转动,那末在 φ 角(图 2)满足不等式 $0 \leqslant \varphi < \frac{\pi}{2}$ 时,这直线和直线 g 的交点顺着箭头所示方向沿半直线移动;前已述及,$\varphi = \frac{\pi}{2}$ 值和直线 g 的无限远点相对应;如果继续转动,当 φ 角满足不等式 $\frac{\pi}{2} < \varphi \leqslant \pi$ 时,交点顺着箭头所示方向沿左半直线移动。

II. 直线上一点的位置,还可以用所谓齐次座标(однородные координаты) x_1、x_2 来表示,而横座标 x 等于二齐次座标之比

$$x = \frac{x_1}{x_2}; \tag{1.4}$$

这时假定,x_1 和 x_2 不同时等于零,并且在任何 $k \neq 0$ 的数值下,kx_1、kx_2 值都和直线上同一点相对应;例如,我们可以设(1.4)、(1.3)中

$$x_1 = x_1' - \lambda x_2', \quad x_2 = 1 - \lambda.$$

当 $x_2 \to 0$ 时,我们有 $x \to \infty$;所以我们约定,直线上无限远点和 $x_2 = 0$ 值相对应。

为了能更清楚地想像齐次座标和选擇数字 k 的任意性起見,我們把 x_1、x_2 看成是平面上一点的直角座标;现来研究方程式为 $x_2 = 1$ 的直綫 g(图 3)。在这种情况下,$x = x_1$ 是这条直綫上某一点 M 的横座标。如果自座标原点出发通过 M 点作一条射綫,那末这条射綫上所有各点 M_1、M_1'、M_1''、……都投射到 M 点;因为对于所有这些点而言,我們有

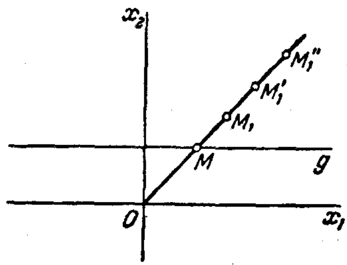

图 3

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_1'}{x_2'} = \frac{x_1''}{x_2''} = \cdots\cdots,$$

所以直綫 g 上 M 点的位置可以用比值 $\frac{x_1}{x_2}$ 或与之相等的比值 $\frac{x_1'}{x_2'}$ 来表示,并且 $x_1' = kx_1$,$x_2' = kx_2$;因为可以取这射綫上任一点来表示,因此 $k \neq 0$ 的系数完全是任意的;$k = 0$ 值应該除去,因为在这种情况下,我們

得到 $x_1'=x_2'=0$，也就是座标原点 O，即我們只得到一点 O 而不是得到确定射綫 OM 的两点 O 和 M_1。由此可見，这条直綫 g 上 M 点的齐次座标 x_1、x_2，是中心在座标原点的綫束中投射 M 点的直綫上任一点的直角座标；直綫 g 上无限远点和作为射綫的 Ox_1 軸相对应，也就是和方程式为 $x_2=0$ 的直綫相对应。

和无限远点相区别，直线上所有其余各点我们称之为眞点(собственная точка)。

§2 平面的无限远直綫

1. 现在我们来研究平面上的一点 $M(x,y)$。大家知道，在系数 a_1、a_2 不同时等于零的条件下，方程式

$$a_1x+a_2y+a_3=0 \tag{2.1}$$

是直线的方程式；要以方程式

$$a_1x+a_2y+a_3=0,\quad b_1x+b_2y+b_3=0 \tag{2.2}$$

表示的两条直线，在

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \tag{2.3}$$

的条件下，两直线相交，即具有公共点。由此可见，如果不引入无限远点的概念，那末在许多情况下，我们都不得不提出保留条件，而我们的断定就将没有普遍性。

我们再引用一点的齐次座标(x_1、x_2、x_3)，并且设

$$x=\frac{x_1}{x_3},\quad y=\frac{x_2}{x_3}. \tag{2.4}$$

我们假定，齐次座标不同时都等于零，并且在 $k\neq 0$ 的任何数值下，数字 kx_1、kx_2、kx_3 确定同一点 M。

为了清楚起见，我们研究三维空间(图 4)，并且把(x_1、x_2、x_3)当作是这个空间内一点的直角座标；在以方程式 $x_3=1$ 表示的平面 E 内，有一点 M 的座标为 $x=x_1$，$y=x_2$。作射线 OM，再在这条射线上取一系列的点 M_1、M_1'、M_1''、……；对于这些点而言，我们有

$$\frac{x_1'}{x_1}=\frac{x_2'}{x_2}=\frac{x_3'}{x_3},\quad \frac{x_1''}{x_1}=\frac{x_2''}{x_2}=\frac{x_3''}{x_3},$$

也就是我们可以设 $x_1'=kx_1$，$x_2'=kx_2$，$x_3'=kx_3$。这里 k 是不等于

零的任何的数值，因为我们可以取射线 OM 上任何一点来确定平面 E 内 M 点的位置。当 $x_3=0$ 时，选取的一点位于平面 Ox_1x_2 内，而这点和座标原点的连线和平面 E 并不相交。

II. 如果研究平面 E 内直线 g 上的各点，那末和这些点相对应的是从 O 点投射这些点的射线所组成的平面线束；按上所述，直线 g 上无限远点和平面 Ox_1x_2 内的直线 $g' \parallel g$ 相对应；直线 g' 可用方程式

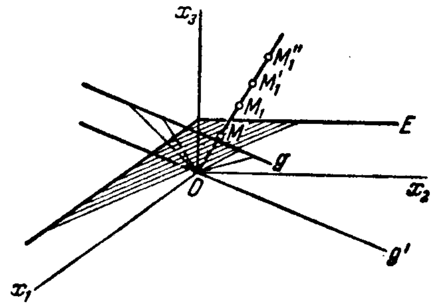

图 4

$$x_3=0\,,\quad \frac{x_2}{x_1}=\frac{y}{x}=-\frac{a_1}{a_2} \tag{2.5}$$

表示。我们认为，平面内以方程式

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0 \tag{2.6}$$

表示的一条直线，只有一个假点，即无限远点，它的特征是 $x_3=0$ 和方向 $\frac{x_2}{x_1}=-\frac{a_1}{a_2}$；对于两条平行但不重合的直线

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0\,,\quad b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3=0 \tag{2.7}$$

而言，我们有：

$$\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}\neq\frac{b_3}{a_3},\quad -\frac{a_1}{a_2}=-\frac{b_1}{b_2}, \tag{2.8}$$

也就是平行直线的无限远点是重合的。

如果研究平面 E 内所有的直线和它们的无限远点，由于不平行直线的方向是不同的；因此表示所有直线无限远点的公共条件是 $x_3=0$。由此可见，$x_3=0$ 是平面内所有直线上无限远点轨迹的方程式。因为它是一个一次方程式，所以我们把它称为平面的假直线即无限远直线的方程式；和假直线相区别，平面内所有其余的直线我们称之为真直线。

添上无限远直线的平面，我们称为射影平面（проективная

плоскость)；在射影平面内，表示齐次座标之间关系的每个一次方程式(2.6)，都是直线方程式；如果a_1、a_2不是同时等于零，则它是真直线；如果$a_1=a_2=0$，$a_3\neq0$，则它是假直线；也可以说，平面内任何两条直线(2.7)总有一个公共点：如果$\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$，则公共点是真点；在条件(2.8)下，则是假点。可以认为，平面内任一直线都和无限远直线平行；实际上，如果两条直线有一个假公共点，则它们平行；如果其中一条直线是假直线，则恰恰发生同样的情况；这可以由平行性条件(2.8)得知，因为对于无限远直线而言，我们有：

$$b_1=0,\quad b_2=0,\quad b_3\neq0.$$

III. **附注** 我們約定，每条直綫上有一个无限远点，而这些无限远点的軌迹是无限远直綫；但也可能有其他引入假元素的方法。

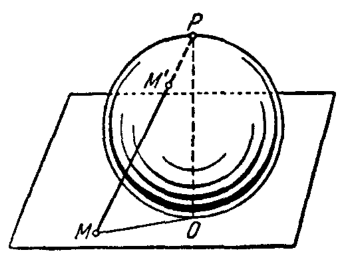

图 5

例如，在复变函数論中研究一个平面（图5），这时平面上每一点$M(x,y)$和一个复数$z=x+iy$（这里$i=\sqrt{-1}$）相对应。作出一个任意半徑的球面，和上述平面在座标原点处相切；O点和P点位于球面直徑的两端，从球面上P点出发，把平面上每一点M投射到球面上M'点。于是，上述平面上任一点M和球面上M'点相对应，但是逆断定是不正确的，平面上沒有一点和球面上P点相对应。如果OM无限地增大，那末PM'趋近于零；因此我們說球面上P点和平面上假点即无限远点相对应；这种引入无限远点的方法和前面我們所述的不同，在这种情况下，应該約定，平面上无限远点只有一点。

§3 假元素应用示例

I. 下面我們来研究平面运动中瞬时轉动中心的求法，作为第一个示例。

設已知极点A的速度矢量v_A和角速度ω（图6）。如果$\omega\neq0$，那末有瞬时轉动中心P存在，并且P位于通过A点而垂直于速度v_A的直綫AB上，$PA=\frac{v_A}{|\omega|}$；如果$\omega=0$，由于

$$v_M = v_A + v_{MA}、\ v_{MA} = MA \cdot |\omega| = 0,$$

图形上所有各点的速度都几何相等 $v_M = v_A$。在这种情况下，瞬时轉动中心，作为运动平面上唯一速度等于零的点是不存在的。或者所有各点的速度都等于零；或者沒有一点的速度等于零。因为

$$\lim_{\omega \to 0} PA = \lim_{\omega \to 0} \frac{v_A}{|\omega|} = \infty, \tag{3.1}$$

所以我們可以說，瞬时轉动中心是直綫 AB 上的无限远点；我們也可以說，瞬时轉动中心沿着垂直于极点速度 v_A 的方向 AB 移到无限远处。在这种情况下，如果我們需要把瞬时轉动中心和某一点 C 連接起来，那末我們可以通过 C 点作直綫 $CD \parallel AB$，两条平行直綫具有一个无限远的公共点。

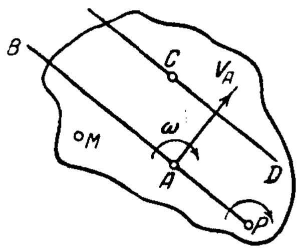

图 6

II. 我們再研究著名的 Kennedy-Aronhold定理作为实例：設 P_{ab} 是平面机构 a、b 二构件相对运动中的极点，即瞬时轉动中心●；那末，对于任何三个构件 a、b、c 而言，P_{ab}、P_{ac}、P_{bc} 点位于一条直綫上。

在鉸接四构件机构 1、2、3、4（图 7）的情況，我們立刻可以求出 P_{12}、P_{23}、P_{34}、P_{41} 点；P_{31} 点位于直綫 $P_{12}P_{23}$ 和 $P_{41}P_{34}$ 的交点处，而 P_{24} 点則位于直綫 $P_{12}P_{41}$ 和 $P_{23}P_{34}$ 的交点处。

在曲柄連杆机构（图 8）的情況，我們立刻可以求出 P_{12}、P_{23}、P_{34} 点；构件 4（滑块）相对机架 1 作移动，因此对构件 4 而言，$\omega = 0$；瞬时轉动中心 P_{41} 沿着箭头所示垂直于 P_{34} 点速度的方向移到无限远处，也就是 P_{41} 是直綫 $P_{34}A$ 的无限远点。P_{31} 点位于直綫 $P_{23}P_{12}$ 和 $P_{34}P_{41}$ 的交点处；P_{24} 点

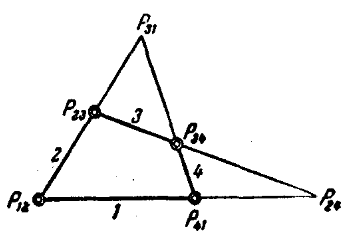

图 7

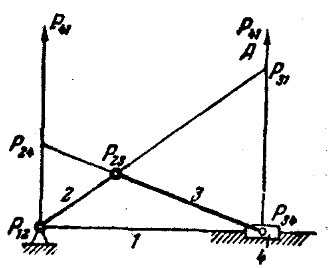

图 8

● P_{ab} 点也可以称为 P_{ba} 点。

应該在 P_{12}、P_{41} 点連綫和直綫 $P_{23}P_{34}$ 的交点处求得，所以我們通过 P_{12} 点作直綫 $P_{12}P_{24} \parallel P_{34}A$。

III. 我们也要说明，如何利用虚元素由椭圆和双曲线的性质导出抛物线一些相应的性质。我们来研究方程式为

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1 \tag{3.2}$$

的椭圆（图 9 a），把座标原点移到它的顶点 O，进行座标变换：

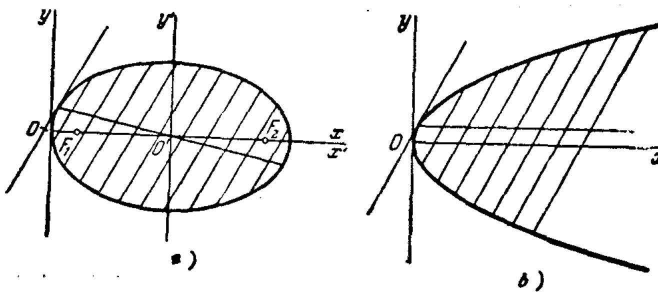

图 9

$$x'=x-a,\quad y'=y. \tag{3.3}$$

于是我们得到新座标系中的椭圆方程式：

$$y^2=2px-\frac{p}{a}x^2,\quad p=\frac{b^2}{a}. \tag{3.4}$$

对于方程式为

$$\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=1 \tag{3.5}$$

的双曲线进行同样的座标变换，得到方程式：

$$y^2=2px+\frac{p}{a}x^2,\quad p=\frac{b^2}{a}. \tag{3.6}$$

将 a 和 b 无限地增大，但是使比值 $\frac{b^2}{a}$ 保持不变，$\frac{b^2}{a}=p$（例如，如果 a 增大到 n 倍，那末 b 应该增大到 $\sqrt{n}$ 倍）；在这样的情况下，由（3.4）、（3.6）在向极限过渡后，我们得到抛物线方程式：

$$y^2=2px. \tag{3.7}$$

因此，可以把抛物线看成是在

$$\lim a = \lim b = \infty,\quad \frac{b^2}{a} = p \tag{3.8}$$

的条件下椭圆和双曲线的极限。利用这个结论，便可以导出抛物线所有的基本性质。我们来求椭圆顶点 O 到椭圆焦点 F_1 的距离；因为

$$O'F_1 = ae,\quad OO' = a,\quad OF_1 = a(1-e),$$

$$e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = \sqrt{1-\frac{p}{a}},\quad p = a\ (1-e^2), \tag{3.9}$$

式中 e ——偏心率，而 a ——椭圆的长半轴，所以过渡到极限情况后，我们得到:

$$\lim_{a\to\infty} e = 1,\ \lim_{a\to\infty} OF_1 = \lim_{a\to\infty} \frac{a\ (1-e^2)}{1+e}$$

$$= \lim_{a\to\infty} \frac{p}{1+e} = \frac{p}{2}. \tag{3.10}$$

由此可见，椭圆的左焦点 F_1 变成抛物线的焦点 F，F 和顶点相距有限的距离 $\frac{p}{2}$，而椭圆的中心 O' 和右焦点 F_2 则沿着椭圆长轴 OF_1 的方向移到无限远处，椭圆的长轴 OF_1 变成抛物线轴。

IV. 大家知道，椭圆内各平行弦中点的軌迹（图 9 a）是通过椭圆中心的直綫，称为椭圆的直徑；因此，椭圆的各条直徑組成以椭圆中心 O' 为中心的直綫束；在椭圆和直徑交点处的椭圆切綫，和这条直徑所平分的各弦平行。在过渡到极限情况以后，我們得到抛物綫，这时椭圆中心变成抛物綫軸上的无限远点；因此抛物綫的各条直徑組成以抛物綫軸无限远点为中心的直綫束，即所有的直徑都和抛物綫軸平行。和椭圆情况下一样，抛物綫上任一点处的切綫，以及为过这切点的直徑平分的各弦，二者是平行的（图 9 b）。

用純粹的解析法也可以确証我們上述各个断定都是正确的: 如果弦的角系数为 k，那末为这些弦所平分的椭圆直徑，具有方程式

$$y' = -\frac{b^2}{a^2 k} x'.$$

利用变换(3.3)，我們得到:

$$y = \frac{p}{k} - \frac{px}{ak}. \tag{3.11}$$

实現极限过渡 $a\to\infty$，我們得到抛物綫直徑的方程式 $y = \frac{p}{k}$，这条直徑为角系数为 k 的弦所平分。

大家也知道，椭圆上任一点 A 处的法綫 AN（图10 a），是作到切点 A 的