遞歸函數論

羅莎·培特著

科學出版社

遞歸函數論

羅莎·培特 著

莫紹揆 譯

科學出版社

1958

RÓZSA PÉTER

REKURSIVE FUNKTIONEN

AKADÉMIAI KIADÓ BUDAPEST,

1 9 5 1

內 容 簡 介

本書以遞歸函數論爲中心，牽涉有關部門．首先介紹原始遞歸函數、多重遞歸函數、超窮遞歸函數、高階遞歸函數等．其次介紹一般遞歸函數、杜令機器及可計算函數等．最後介紹遞歸函數的應用(在數學基礎方面、直覺主義方面、概率論方面以及數學解析方面)等等。

本書可供研究數理邏輯者作爲基本入門書，亦可作爲研究數學基礎者的必要參考書。

遞 歸 函 數 論

羅 莎·培 特 著

莫 紹 揆 譯

*

科學出版社出版(北京朝陽門大街117號)

北京市書刊出版業營業許可證出字第061號

科學出版社上海印刷廠印刷　新華書店總經售

*

1958年10月第 一 版　書號：1384　字數：235,000

1958年10月第一次印刷　開本：787×1092 1/27

(滬)：0001—1,774　印張：10 12/27

定價：(10) 1.50元

中譯者序言

作者羅莎·培特在這本書中把與遞歸函數論有關的部門由淺到深、由簡到繁地概述了一番，它不但深入淺出，且極富啓發性．讀完全書之後，不但對各種遞歸函數得到了全面的認識，而且能照所討論的綫路自作思考，從而作進一步的研究．作者在這方面貢獻極多，故能取捨得當，在短短的篇幅之內把這麽廣泛的領域作了一個全面的介紹，這實是對數論、對數學基礎論、對集論的研究者的一部重要參考書．

全書因力求深入淺出，所以，正如原序中所說的，不給複雜的、一般的證明，而儘可能用舉例方法，從而指出了如何找到一般證法的道路．凡遇到這些故意略去的部分譯者當然不必强作解人，加以補入．但關於一般遞歸函數的顯式，在這本書出版後已有重大的新結果，若原書出版稍遲，作者亦必補入．因此譯者特補一款放在§17之末，雖不免狗尾續貂，但對讀者不無小補．

此外，原書既名"遞歸函數論"，當然不必討論遞歸證法，所以完全略去未嘗不可．但這兩者彼此間的關係非常密切，若只知其一不知其二，殊屬缺憾，並且勢必影響對遞歸函數的理解，而致不够透徹．因此譯者特在書末附錄的一節裏專門介紹遞歸證法．可惜得很，若不作出自然數的適當公理系統，則對遞歸證法無從作形式化的敍述與討論(這也未嘗不是原書所以不討論遞歸證法之故)．因此譯者只能把結果的概要加以撮述．希望讀者因而能閱讀有關專著，作進一步的研究．至於其它有關方面，牽涉更廣，更無法補入，只好從略了．

原書中頗有因疏忽而致誤的地方，譯者都作了修正，此外亦有一些不够明晰的地方，譯者亦給以删改，使能淺顯明白；這些都用譯註標明．至於屬排印錯誤的，譯者逕行校改不再一一標明(這些地方不下一、二十處)．

在譯名尚未統一的今天，名詞的選用是很麻煩的一件事．譯者

力求與已經流行的用語相符合，但有時，尤其遇尚未十分通行而又不太恰當的譯語，譯者建議一些新譯法，以供翻譯界的參考．其中主要的、值得提出的有下列幾個：

“Rekursive Funktionen”現已流行譯為“遞歸函數”，但“Beweis nach Induktion（或vollständigen Induktion）”現却流行譯為“（數學）歸納法”或“完全歸納法”．就原文原意來說，完全恰當，但譯者覺得兩者實一事之兩面，若能用同一的名詞似更妥當．因特根據“遞歸函數”而引入“遞歸證法”一名，似較原名更好，且不致與“歸納法”混淆（初學者常因“歸納法”的名而生誤解）．

“Substitution”現流行譯為“代入”或“代換”，並可隨意選用．今特分別譯成如下：凡將一變元代以其値，則譯為“代入”；凡因有等式 $a = b$ 而將 a 代以 b 的，則譯為“替換”．這兩運算都是基本的運算，似同而實異，且所服從的條件亦不同（代入必須處處代入，替換可只替換一處而不替換全體），所以加以分別是很必要而且適當的（與“代入”“替換”兩名的含意亦極恰當），不能因原文不分而我們亦混用．

“charakteristische Funktion”現流行譯為“特徵函數”，但動詞“charakterisieren”則改譯“刻畫”，更覺妥適一些．

“Majorisieren”一語現尚未見適當譯名，今特擬譯“優超”．這字常用於被動態中，則譯為“被……所優超”．

Stelle, Argument, Variable 三字表面上看來沒有分別，原書中有時亦常混用，但有時却分得非常明確．例如“Stelle$(n_1, n_2, \cdots, n_r)$”這時絕不能說“Variable$(n_1, n_2, \cdots, n_r)$”，又如“kleiner Argument”絕不能說“kleine Variable”．因此特把“Stelle”譯為“值位”；“Argument”譯為“變目”；“Variable”譯為“變元”（“mehrstellige”仍譯“多元”），因而“Funktionvariable”則譯“函元”．

“formalisieren”現亦沒有一定譯名，今擬譯“塑述”．

其它的不再一一列舉（見譯名表）．

人名在正文中一律譯出，但在脚註中，不論人名、論文名、書名一律不譯，因不但沒有譯出必要，且對讀者查閱時更為方便．

原書各節各款的內容曾詳細列於目錄中，但在正文處反沒有標出，對讀者殊不方便．今特根據目錄所列補入於正文中，以便讀者閱讀．

1954年烏斯平斯基(B. A. Успенский)把本書譯成俄文，內有郭爾莫哥洛夫(A. H. Колмогоров)的序言，其中對有關問題有所闡釋，今特譯出以供讀者參考．俄譯本中又新增好些參考文獻，今一併補入中譯本中，以便讀者進一步研究，其列在書末的，則用星號*標出；其插入脚註中的，則隨文聲明(脚註中凡遇有*的文獻請至參考文獻(俄譯本)中去查閱)．

數理邏輯本是一門新的科學，而遞歸函數論尤爲其中最新的一部門．它不但發展迅速，而且它的應用範圍也日益擴大，實是最重要的科學部門之一． 但我國學者從事研究這方面的很少，要想改變這種情況，大量出版基本的著作實屬急不容緩． 譯者希望這本譯作能夠在這方面盡一點微小的力量，作出一點微小的貢獻．

莫紹揆

1954年1月21日於南京大學

俄譯者序言

§1

在現代數學的各種思考當中，在"可構造的"與"非可構造的"之間有着很大的區別．甚至於好些數學家，儘管他們心安理得地承認對存在性所作的"非可構造的"證明，也不得不承認：對一些數學對象所作的純粹的（非可構造的）存在性證明本身自然地便引起了一個問題，如何對這個證明來補充相應的構造．

但是，只是在比較晚近的時代（自 1936—1937 年起），才表明了有可能對這個尋常的"可構造性"概念作一個精確的同時又是足够廣泛的完全的數學定義[1]．

原則上任意的自然數[2]可以構造性地給出下形：

$$1+1+1+\cdots+1.$$

根據同樣的辦法可以可構造地給出自然數的任何有窮集合，以及給出這些集合之間的映射等等．可構造性與非可構造性的區別對於數學對象來說已經很爲顯著，最簡單的例子爲(1)以自然數 $n_1, n_2, \cdots, n_r$ 爲變目、以自然數 m 爲值的數論函數

$$m=\varphi(n_1, n_2, \cdots, n_r)$$

及(2)以自然數爲變目的謂詞

$$F(n_1, n_2, \cdots, n_r).$$

這兩類數學對象的研究自很容易互相轉化．

應用到數論函數時，可構造性的要求可簡單地理解爲"可計算性"：我們將把函數 $m=\varphi(n_1, n_2, \cdots, n_r)$ 當作可計算的，如果它可用確定的規則來定義，並使得對於任意給出的 $n_1, n_2, \cdots, n_r$，事實上都能够計算出相應的函數值 m．依照現代的看法，這個可計算函

1) 例如，1918 年 H. Weyl [1] 已經引入的連續統的可數模型——它由在某些特別意義之下"可計算的"元素所組成的，若與對數學分析的可構造地構成這個最新嘗試（敍述於本書最後一章 §24）比較起來，它只是一個很孱弱的源泉吧了．

2) 本書中自然數還包括 0，這當然不會使事情有本質的更改．

數的概念亦相應於一個精確的數學概念——一般遞歸函數，後者的定義可參見本書 § 16.

在可構造性數學的現代所有研究中，一般遞歸函數佔着一個中心的地位. 因此大家有充分的理由熱烈希望能够對這個概念給以儘可能充分的說明[1]. 而這亦是本書的目的,它在前面的十五章內詳細討論了用以定義數論函數的各種較特殊類型的"遞歸"方法，而在後面的有關一般定義的章節內敍述了一般遞歸函數類的基本性質，它的定義式的可能簡化以及這一函數類對可構造性數學的各種問題的價值.

本書寫得非常流利,有大量詳細而清楚的例子,但並非在定義及證明的形式結構上面過於强調. 爲了解釋清楚一般遞歸函數以及與它有關的部分遞歸函數的準確意義起見,除用譯註以外,這裏還用本序言的 § 2 一節來加以說明. 本序言的 § 3 則給出一些注意以說明本書最末幾章內有關於數學的可構造性流派的一般問題以及所謂"直覺主義"數學.

在俄譯本中引進了一系列的更改及修正，這是著者特別好意地指出的. 俄譯者所增加的參考文獻都用星號*表出. （中譯者按,這些修正除行文措詞外,已全由中譯者改正了，故不再在中譯本採用. 至於新增的參考文獻,則已在中譯本中列入).

§ 2

按照該字的原意來說(在拉丁文中, recurso 意指往回跑,召回,喚回等),遞歸定義式當然是指下列的定義式，借助於"回歸"而把未知的歸結爲已知的. 例如依照以下公式來定義"斐波那奇函數"便是一個古典的例子:

$$F(0) = 0, \tag{1}$$

$$F(1) = 1, \tag{2}$$

$$F(n+2) = F(n) + F(n+1). \tag{3}$$

對於任意一個 n，可以按公式(3)而定義 $F(n)$，因它總可以回歸到

1) 關於儘可能簡短的形式定義,可參見本書 § 17 款 11 所述的 Kleene 的結果.

(一般說來,須通過一系列的中間步驟)按公式(1),(2)而直接定義的兩值 $F(0)$與 $F(1)$. 例如,當計算 $F(5)$時,我們使用關係式

$$F(5)=F(4)+F(3),$$
$$F(4)=F(3)+F(2),$$
$$F(3)=F(2)+\underline{F(1)},$$
$$F(2)=\underline{F(1)}+\underline{F(0)}.$$

在這個例子裏,"回歸"是由未知的值 $\varphi(n)$ 而回到已知的值 $\varphi(n')$ $(n'<n)$的. 最後這個條件却是不必要的. 例如,$\sqrt{n}$的整數部分,即

$$\varphi(n)=[\sqrt{n}],$$

可以借助於以下公式而定義(參考 § 16 款 1):

$$\varphi(n^2)=n, \tag{4}$$
$$\varphi(n)=\varphi(n+1)-f(n+1), \tag{5}$$

其中

$$f(m)=\begin{cases}1 & \text{如果 } m \text{ 爲平方數,}\\ 0 & \text{如果 } m \text{ 非平方數.}\end{cases}$$

對於任意一個 n, 公式(5)都能够把 $\varphi(n)$ 的定義式引到 $\varphi(n+1)$, $\varphi(n+2)$, $\cdots$, $\varphi(n+k)$, $\cdots$的定義式去, 直到遇見完全平方數時, 這時便容許使用公式(4)了.

在一般的理解下, 所謂遞歸定義的本質只有兩點: 1)經過有限次步驟後, 可以從函數的未知的所求值回歸到該函數的或其它早已有定義的函數的預先已知的值去; 2)依照兩個不同方法來計算時, 不致引起矛盾.

函數 $\varphi(n, m_1, m_2, \cdots, m_r)$的由 n 至 $n+1$ 的歸納定義模式

$$\varphi(0, m_1, m_2, \cdots, m_r)=f(m_1, m_2, \cdots, m_r),$$
$$\varphi(n+1, m_1, m_2, \cdots, m_r)=g(n, \varphi(n, m_1, m_2, \cdots, m_r), m_1, m_2, \cdots, m_r),$$

其中 f, g 爲兩個預先定義的函數, 這模式只是遞歸定義式的一個特殊情形吧了. 但是本書的前幾章內證明了,從一個唯一的開始函數

$$\sigma_0(n)=n+1$$

出發，重復的使用了這個模式以及代入，可以作出所有一切最常用的算術函數來． 這樣的函數組成原始遞歸函數類，不屬於這類的函數的例子只在本書§9中才給出．這例子是一個二元函數$\psi(m,n)$，它由

$$\psi(0, n) = \sigma_0(n) = n + 1$$

按下列公式"二重遞歸"而得出：

$$\psi(m+1, 0) = \psi(m, 1),$$
$$\psi(m+1, n+1) = \psi(m, \psi(m+1, n)).$$

本書在闡明了（應用剛才所引的例子）原始遞歸函數的不完全後，在§10—15便討論了更一般的遞歸式的種種不同的變型，但是所有這種種變型，却以極自然的方式歸結於一般遞歸函數的定義中，而後者是在§16款5內所引入的． 任意一個一般遞歸函數都可以由開始函數$\sigma_0(n) = n + 1$出發，借助於一些"等式系"而得到． 為了要更好地理解一般遞歸函數的定義，讀者應該好好理解下列名詞的形式意義："項"，"等式"（兩項之間寫上一個等號）以及"代入"．在項的構成中要用到函數符號φ及σ_i，但是，就定義的形式意義來說，只有記號φ須與函數的實際上的意義相連系，並且只當定義的最後階段時才提出要求，使對於任意固定的$n_1, n_2, \cdots, n_r$，值$m = \varphi(n_1, n_2, \cdots, n_r)$都可以借助於敍述在定義中的法則而計算出來．在計算過程中，記號φ與σ_i都只是當作按照確定的規則來計算的運算記號吧了． 至於記號σ_i來說，它們可以不相應於任何現實的函數：既不要求對於任何固定的$n_1, n_2, \cdots, n_r$都可以把$\sigma_i(n_1, n_2, \cdots, n_r)$計算出來，亦不要求在計算過程中永不出現矛盾的等式．

例如，等式系

$$n + 1 = 1, \varphi(n) = 0,$$

即使按照定義式的嚴格意義來說，亦可以作為函數$\varphi(n)$的定義等式系，$\varphi(n)$恆等於0，儘管依照第一個等式我們得出

$$1 = 1 + 1 = 1 + 1 + 1$$

等等[1]．

---

1) 但是，從定義等式系而推出數目之間的錯誤等式是不可能的這一件事，不妨作為輔助的要求而引入定義之中．

如果只保留了結果的唯一性的要求(即要求：當按不同的方法計算 $m=\varphi(n_1, n_2, \cdots, n_r)$時，不致於對同一的 $n_1, n_2, \cdots, n_r$ 而得出不同的結果 $m' \neq m''$)，但却取消了對於任意的 $n_1, n_2, \cdots, n_r$，借助於定義等式系恆可以計算 $\varphi(n_1, n_2, \cdots, n_r)$ 這個要求，我們便得到部分遞歸函數的概念．可惜得很，這個重要概念在本書中只在 § 21 款 12 中出現，並且在後面的討論中亦沒有充分的運用．在本書的範圍內還遺漏了下面這麼重要的一個事實(參見 Kleene [5])，即(對於任何 r)都有一個全能的 $r+1$ 元部分遞歸函數

$$\psi(t, n_1, n_2, \cdots, n_r),$$

使得任意一個 r 元部分遞歸函數(因而任意的一般遞歸函數) $\varphi(n_1, n_2, \cdots, n_r)$都可以由它適當的代入 t_φ 而得

$$\varphi(n_1, n_2, \cdots, n_r) = \psi(t_\varphi, n_1, n_2, \cdots, n_r).$$

我們可以指出，有些部分遞歸函數是不能“補足”而成爲一般遞歸函數的．試就情形 $r=1$ 而言，對角函數[它在 $\psi(t, t)$有定義的地方有定義]

$$\chi(t) = \psi(t,t)+1$$

便是一個例子[1]．因而如果令

$$\chi_1(t) = \begin{cases} \chi(t) & \text{當 } \chi(t) \text{ 有定義時}, \\ 0 & \text{當 } \chi(t) \text{ 沒有定義時}, \end{cases}$$

我們便得到一個處處有定義但却非一般遞歸的函數．在本書 § 19 中亦有類似的例子，但對讀者來說有些不明顯，因爲其中的函數 $\psi(n, m)$的本性沒有表明．

部分遞歸函數和一般遞歸函數相同，對於可構造性數學的一切研究而言有根本的重要性．例如，設有一個不矛盾的形式演算，我們定義函數 $R(n)$ 如下：對於演算中所有可證明的公式的哥德爾數言，它等於 1，對於在演算中所有可以反證的公式的哥德爾數言，它等

1) 即不可能存在一般遞歸函數 $\chi_1(t)$，使凡在 $\chi(t)$ 有定義的地方它都與 $\chi(t)$ 相同．的確，對於這樣的函數 $\chi_1(t)$，應該可以找出一個數 s，使得對於所有的 t 有

$$\chi_1(s) = \psi(s, t),$$

但這時 $\psi(s, s)$應該有定義，而這便引起一個矛盾：

$$\chi(s) = \psi(s,s)+1 \neq \psi(s,s) = \chi_1(s).$$

於 0，這函數便是部分遞歸的．哥德爾說，任意一個足够富裕的演算是不完備的，這定理便可以敍述爲：對於這樣的演算，不能够把 $R(n)$ 補足使成爲處處有定義的部分遞歸函數（因而成爲一般遞歸函數）（參見 В. А. Успенский [1]*）．

§ 3

本書主要是把遞歸函數理論用一般數學觀點來敍述，而並沒有闡明下列的哲學問題："可構造性"的要求在數學中所起的作用． 關於下述意見的終決性，即"可計算函數"這個尋常的概念必須用一般遞歸函數的定義來透徹地表達，這個問題亦沒有充分一貫地給以處理（讀者可比較本書 § 19 與 § 21 的末段）． 但是，必須着重指出，由於這個問題的本身特性，它是不能用形式地證明出來的數學定理的方式來回答的． 我們只能够說，把"可計算性"與一般遞歸性相等同這一件事是被以後幾年的一長系列的研究所認可了的，看來，在最近的將來，在可構造性數學的研究中它將處於根本的地位．

正如本序言一開首時所指出的，對於純粹存在性定理補充以相應的構作這樣的興趣可以認爲是每個數學家都具有的．在許多情形下，這甚至於是根據數學應用的實際要求的．另一方面，在數理哲學中却有一種潮流，把存有相應的"可構造性"一事當作理解有關數學對象"存在"性的論斷本身的必要條件，對這潮流的代表人物來說，"可構造性"的要求却具有更深遠的意義．對於數理哲學中這種可構造性流派，遞歸函數論具有特殊的價值，要敍述這種可構造性流派的代表人物的理論本身，便已有一種特別的要求，我們不能認爲本書已經完全滿足這個要求了． 對於徹底的可構造主義的代表人物來說，函數性能方式的研究便不可避免地要預先引入函數概念的本身，而"任意"函數的概念却證明了是失去現實內容的． 必須指出，對徹底的可構造性觀點說來，一般遞歸函數的概念亦應該受到非常嚴格的批判檢查，因爲，顯然我們沒有一般的能行方法（有效方法）來解決下列問題：所給的等式系什麽時候可確定一般遞歸函數，什麽時候則否（參見本書 § 22）．

可構造性流派的數學廣泛使用了布勞維所建立的直覺主義學派所獲得的具體結果. 但是,實際上可構造性流派的一些正面成就完全與直覺主義無關. 有鑒於此,必須對 § 21 款 9 內的一些陳述表示不滿.

必須强調指出,有許多遠離直覺主義哲學的著者把"直覺主義邏輯""直覺主義算術"這些術語作爲"技術性術語"來使用,這將引入巨大的混亂,因而應該認爲是不正確的.

所謂"直覺主義邏輯"實際上已經推廣到包括了任何流派的數學家所使用的方法,只要他們把一些可構造性問題的解決歸到另外一些可構造性問題去. 因此其內容不但與直覺主義哲學無關,而且一般地亦與下列的哲學體系無關,即理解有關於存在性的論斷時必須有可構造性. 這在郭爾莫哥洛夫(А. Н. Колмогоров)[1]* 的論文中已經一般地說過了. 通常列入"直覺主義邏輯"下的系統可更正確些簡稱爲"可構造性邏輯". 在本書 § 21 款 9 所引的克林與納爾遜(Kleene 與 Nelson)的論文中,已闡明了可構造性邏輯與遞歸函數論的緊密關係(對此還可參看 Шанин)[1, 2]*).

在本書 § 20 款 10 中提到直覺主義者的見解,說可能存在一些個別的不能解決的問題,這點或許會給出一些誤解. 因此讀者必須明確地理解,實際上遞歸函數論只是確證了關於一大量問題的算法上的不可解決性(對此參見 А. А. Марков [6,7]). 特別,必須注意,本書作者所塑述的費爾馬問題(§ 21 款 13)與一般意義下的費爾馬問題(是不是對於任何自然數 x, y, z 及 $n>2$ 都有不等式 x^n+ $+y^n \neq z^n$)是不相同的. 容易證明,如果本書著者意義下的"費爾馬問題"在算法上是不可解的,那末通常的費爾馬問題便將得到否定的解答.

§ 4

本書作者羅莎·培特是一位知名的匈牙利數學家,在現代的遞歸函數論建立的第一階段中便作了有力的參與. 她在 1932—1935 年的研究主要是確定原始遞歸函數類的眞實範圍,這些工作在極大

的程度上幫助了形成更一般的遞歸性概念，即一般遞歸與部分遞歸函數的概念．現在呈獻於蘇聯讀者面前的這本羅莎·培特的書是全世界文獻內用書本的形式有系統地敘述遞歸函數論的第一次嘗試．在這本書內我們可以看見廣泛地陳述了羅莎·培特本人的以及其他許多匈牙利數學家的有關遞歸函數的最近工作結果．

郭爾莫哥洛夫

著者序言

遞歸函數理論本質上是屬於數論的：它處理所謂數論內的函數論．因此，它的材料可以引起一切數學家的興趣．甚至對於自然科學家也未嘗不對它引起興趣．所謂遞歸函數是指下面的函數，在某個具體的值位處它的值是能够有效地計算的；在自然科學中這種函數是很有用的．固然，遞歸函數的變元所經歷而變的不是全部實數而只是自然數，但是概率論以及量子論却是藉這種函數而運算的；不久之前，又開始了遞歸函數在解析學上的應用．

正因爲這樣，這本書寫得很淺近，使得即使對數理邏輯沒有基礎的人亦可以沒有困難地閱讀下去．材料的處理並不用形式化．雖則若把遞歸函數公理化地作出來，無論當作全部數論系統的一部[1]或者當作某些獨立的探討[2]都已經證明是很有用的，但是對於數學基礎探討者說來，一個依賴直接觀點的處理方法却似乎是更合理些．的確，一方面，集論中誖論的出現引來了一個願望：儘可能使廣大的數學領域依賴於不致於矛盾的直接明證而構造出來；另一方面，當探求不矛盾性的證明這個疑難的領域時，只應用依賴於直觀的工具．

這本書處處都力求指出一條能够引到有關方面的道路，而處理的方式完全是初等的．對於所涉及的領域（初等數論、解析學、集論尤其超窮序數）只需要最初等的知識．本書從不給複雜的、一般的證明而儘可能用舉例的方法；因而簡單地指出，用如何的工作可以把一般的證明找出來．

在這本書內遞歸函數的應用只是簡短地提到．這應用是屬於數學基礎探求中最重要的一章．它的完全的處理需要獨立的再寫一本書．

各章的詳細內容可見之於目錄中；從其中可見整個所處理的材

1) 參閱 Hilbert-Bernays [1].

2) 參閱 Curry [1]與[2].

料的一個鳥瞰. 至於經常用到的初等遞歸函數(與它們的構成)則在§2之末的表上給了一個綱要.

末了我願對在舍格德的加勒馬教授致以感謝, 因爲他把這個稿子從頭到尾仔細地讀了一遍, 此外在我的整個工作中以及在這本書的著述中,都得到了他的寶貴的意見和幫助. 在布達佩斯的荷迪先生幫助我仔細校正,我亦加以致謝.

對匈牙利科學院我也致以特別的感謝. 這本書原是當作國際性的"邏輯研究"叢書(安斯德丹)之一而寫的. 但當它快要完成的時候,不顧雙方的協議,對方竟向我提出了一個不愉快的新的條件. 這時匈牙利科學院幫助了我, 使得這本書能够馬上不拖延地用德文發表了.

羅莎·培特

1950年10月15日於布達佩斯

目　　録