高等学校专修科试用教材

高等数学 上

西南交通大学 孙乃裹 主编

铁道出版社

高等学校专修科试用教材

高 等 数 学

（上）

西南交通大学 孙乃褒 主编

西南交通大学 郭可詹 黄盛清 主审

中 国 铁 道 出 版 社

1 9 8 7 年 · 北京

内 容 簡 介

本书是高等学校专修科试用教材，是根据专修科学时少、内容全面的特点进行编写的。因此，在编写中力求以叙述简明、讲清概念、介绍方法为主，对某些定理仅给予直观说明，不拘泥于严格的论证。

本书分上、下两册出版。上册内容主要包括：函数、极限与连续、一元函数微分、一元函数积分及微分方程等五章，每章的最后附有习题和小结。书后附有部分习题答案、积分表及用参数方程和极坐标方程表示的几种曲线。

本书除供专修科教学用外，还可供自学者学习参考。

高等学校专修科试用教材
高等数学（上）
西南交通大学　孙乃褱　主编
中国铁道出版社出版
责任编辑　李云国　封面设计　王毓平
新华书店北京发行所发行
各地新华书店经售
中国铁道出版社印刷厂印
开本：850×1168毫米 1/32　印张：11.875　字数：309千
1987年11月第1版　第1次印刷
印数：0001－6,000册　定价：2.40元

前言

为了适应高等学校专修科的教学及自学者的需要，在西南交通大学应用数学系为干部班、专修科编写的《高等数学》一书的基础上编写了本教材。考虑到学生们的具体情况和学时少的特点，在编写中，我们力求以叙述简明、讲清概念、介绍方法为主，对某些定理仅给予直观说明，不拘泥于严格论证。

本书分上、下两册。上册包括一元函数微积分和微分方程共五章，下册包括空间解析几何、多元函数微积分、级数、矩阵与线性方程组初步共五章。书中带*号的章节，使用者可酌情选讲或不讲。

本书由孙乃裹同志主编。各章节分别由孙乃裹、叶杏庆、杨元、余孝华、鲁德云同志编写。郭可詹、黄盛清同志主审。

在本书上册第一稿的编写中，董大儒同志曾负责主编，为现稿打下良好的基础。

本教材在编写和试用过程中曾得到石家庄铁道学院、兰州铁道学院、长沙铁道学院等兄弟院校和周海东、杜友李等同志的大力帮助，在此表示衷心感谢。

限于编者水平，教材中存在的不妥之处，恳请使用者给予批评指正。

编　者

一九八六年五月

目　录

第一章　函　　数……………………………………………………1
第一节　实数与数轴……………………………………………………1
一、实　　数……………………………………………………1
二、数　　轴……………………………………………………2
三、绝对值……………………………………………………3
四、区间和邻域……………………………………………………3
第二节　集　　合……………………………………………………5
一、集合及其表示方法……………………………………………………5
二、子　　集……………………………………………………6
三、集合的运算……………………………………………………7
第三节　函　　数……………………………………………………8
一、函数的概念……………………………………………………8
二、函数的图形……………………………………………………12
三、函数的运算……………………………………………………13
四、反函数……………………………………………………16
第四节　函数的简单性质……………………………………………………18
一、单调性……………………………………………………19
二、奇偶性……………………………………………………19
三、周期性……………………………………………………21
四、有界性……………………………………………………22
第五节　初等函数……………………………………………………22
第六节　双曲函数……………………………………………………27
一、双曲函数的定义……………………………………………………27
* 二、反双曲函数……………………………………………………29
小　　结……………………………………………………30

习题一……………………………………………………32
第二章　极限与连续……………………………………39
第一节　极限概念……………………………………39
一、数列的极限……………………………………39
二、函数的极限……………………………………43
第二节　无穷小与无穷大……………………………48
一、无穷小…………………………………………48
二、无穷小与极限的关系…………………………49
三、无穷小的运算法则……………………………50
四、无穷大…………………………………………51
第三节　极限运算法则………………………………52
第四节　两个重要极限………………………………58
一、夹逼定理………………………………………58
二、两个重要极限…………………………………59
第五节　无穷小的比较………………………………65
第六节　连续函数……………………………………67
一、连续函数的概念………………………………67
二、连续函数的运算性质…………………………70
三、初等函数的连续性……………………………70
四、间断点的分类…………………………………71
五、在闭区间上连续函数的性质…………………73
* 第七节　极限的精确定义…………………………76
一、数列极限的精确定义…………………………76
二、函数极限的精确定义…………………………78
小　　结……………………………………………82
习题二………………………………………………84
第三章　一元函数微分学………………………………91
第一节　导数的概念…………………………………91
一、引　　例………………………………………91
二、导数定义………………………………………92

三、导数的几何意义……………………………………95
四、可导与连续的关系……………………………………96
五、导函数……………………………………………97
六、导数的物理意义 ……………………………………100
第二节 求导法则 ………………………………………101
一、函数的和、差的导数 ………………………………102
二、函数的积的导数 ……………………………………102
三、函数的商的导数 ……………………………………104
四、复合函数的导数 ……………………………………106
五、反函数的导数 ………………………………………110
六、初等函数的导数公式 ………………………………113
七、高阶导数 ……………………………………………115
八、隐函数的导数 ………………………………………116
九、用参数方程表示的函数的导数 ……………………118
第三节 微分中值定理 …………………………………122
一、拉格朗日定理 ………………………………………122
二、柯西定理 ……………………………………………126
第四节 罗必塔法则 ……………………………………127
一、$\frac{“0”}{0}$型 ……………………………………128
二、$\frac{“\infty”}{\infty}$型 ……………………………………130
三、“$0\cdot\infty$”型和“$\infty-\infty$”型 ………………………130
四、“0^0”、“1^∞”、“∞^0”型 ……………………131
第五节 导数的应用 ……………………………………133
一、函数增减性的判定 …………………………………134
二、函数的极值 …………………………………………135
三、弧的凹、凸及拐点 …………………………………137
四、渐近线 ………………………………………………139
五、函数图形的描绘 ……………………………………140

六、函数在闭区间上的最大值与最小值 ……………………142
第六节　方程的近似解 ……………………………………………147
第七节　微分及其应用 ……………………………………………149
一、微分概念 ………………………………………………………149
二、微分的运算 ……………………………………………………151
三、微分的应用 ……………………………………………………153
第八节　弧长的微分与曲率 ………………………………………156
一、弧长的微分 ……………………………………………………156
二、曲　　率 ………………………………………………………157
第九节　泰勒公式 …………………………………………………160
小　　结 ……………………………………………………………168
习题三 ………………………………………………………………170
第四章　一元函数积分学 …………………………………………182
第一节　不定积分的概念和性质 …………………………………182
一、原函数 …………………………………………………………182
二、基本积分表 ……………………………………………………184
三、不定积分的性质 ………………………………………………186
四、不定积分的几何意义 …………………………………………187
第二节　积分方法 …………………………………………………188
一、换元积分法 ……………………………………………………188
二、分部积分法 ……………………………………………………200
三、有理函数和三角有理式的积分举例 …………………………204
四、积分表的用法 …………………………………………………210
第三节　定积分的概念与性质 ……………………………………212
一、引　　例 ………………………………………………………212
二、定积分的定义 …………………………………………………216
三、定积分的几何意义 ……………………………………………219
四、定积分的基本性质 ……………………………………………220
第四节　定积分的计算 ……………………………………………223
一、微积分基本定理 ………………………………………………223

二、定积分的换元积分法和分部积分法 ……226
三、原函数存在定理 ……230
四、数值积分法 ……232
第五节 定积分的应用 ……238
一、平面图形的面积 ……240
二、体　积 ……246
三、弧　长 ……249
四、液体的侧压力 ……252
五、功 ……254
六、连续变化的量的平均值 ……256
* 七、重　心 ……258
* 八、旋转体的侧面积 ……262
第六节 广义积分 ……264
一、无限区间上的积分 ……264
二、无界函数的积分 ……266
习　题　四 ……268
小　结 ……279
第五章 微分方程 ……284
第一节 微分方程的概念 ……284
第二节 一阶微分方程 ……287
一、可分离变量的微分方程 ……287
二、一阶线性微分方程 ……290
第三节 可降阶的微分方程 ……298
一、$y^{(n)}=f(x)$型 ……298
二、$y''=f(x,y')$型 ……298
三、$y''=f(y,y')$型 ……301
四、$y''=f(y)$型 ……303
第四节 二阶常系数线性微分方程 ……304
一、通解的结构 ……304
二、二阶常系数线性齐次微分方程 ……307

三、二阶常系数线性非齐次微分方程 ……………………310
第五节　二阶常系数线性微分方程应用举例 ……………316
一、无阻尼自由振动 ……………………………………316
二、有阻尼自由振动 ……………………………………318
三、无阻尼强迫振动 ……………………………………320
习　题　五 ………………………………………………321
小　　结 …………………………………………………325
部分习题答案 ……………………………………………327
附录一　积分式 …………………………………………349
附录二　几种曲线的参数方程或极坐标方程 ……………363

第一章　函　数

在某一自然现象或某一技术过程中，不变化、恒取同一值的量叫**常量**；变化、可以取不同值的量叫**变量**。例如在自由落体运动中，下落时间、下落速度、下落距离等量都是变量，而落体的重力加速度则通常记作常量，常量往往具有相对性，比如重力加速度 g，在同一地点（或在较小范围内）来说是常量，但在较大的范围内就随地点的不同而取不同的值。初等数学主要是以常量为研究对象，随着工业生产的发展，以常量为标志的初等数学满足不了生产活动的需要。工业生产活动的特征是运动，而运动反映到数学中就是变量。变量的变化不是孤立的，而是相互依赖的。变量间往往存在着一定的对应关系，变量间的这种对应关系叫函数。函数是高等数学的主要研究对象。

本章将介绍函数概念，作为预备知识，也把中学学过的实数与集合的有关内容给予复习和补充。

第一节　实数与数轴

一、实　数

从学习自然数开始，我们逐步扩充了有关数的知识。本书仅讨论实数。实数包括有理数和无理数，而有理数又包括整数和分数，如下所示：

- 实数
  - 有理数
    - 整数
      - 正整数（自然数）
      - 零
      - 负整数
    - 分数
      - 正分数
      - 负分数
  - 无理数

有理数可以表示为$\frac{p}{q}$（其中p、q为互质的整数，且$q \neq 0$）的形式；有理数又可以表示为有限小数或无限循环小数，如

$$\frac{3}{4}=0.75, \qquad -\frac{1}{3}=-0.333\cdots=-0.\dot{3}。$$

无理数就是可用无限不循环小数表示的数，如

$$\sqrt{2}=1.4142\cdots \qquad \pi=3.14159\cdots。$$

二、数　　轴

设有一条直线，在这直线上取一点O，称为原点。规定一个正方向，再规定一个单位长度，这种具有原点、正方向与单位长度的直线称为数轴，如图1—1所示。

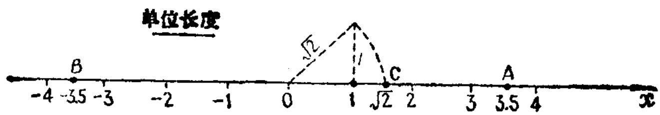

图　1—1

对于任何一个有理数，在数轴上可以找到唯一的一个点与之对应，这个点叫有理点，与之对应的有理数叫作该点的坐标。例如，数零可取原点与之对应；对于数3.5可在正半轴上取一点A，OA的长等于3.5个单位长度，使A点与3.5相对应；对于数-3.5可在负半轴上取一点B，OB的长等于3.5个单位长度，使B点与-3.5相对应；对于任何一个无理数，在数轴上也可以找到一点与之对应，这个点叫无理点，与之对应的无理数叫做该点的坐标。例如，无理数$\sqrt{2}$，可以在正半轴取一点C，使OC的长度等于边长为1的正方形的对角线的长度，使点C与$\sqrt{2}$对应等等。这样，数轴上的点与实数之间就建立了一一对应的关系，即数轴上的每一个点对应一个实数，且一个实数也与数轴上的某一个点相对应。今后，为了叙述方便，我们把一个数与它在数轴上的对应点不加区别，比如，把数a在数轴上的对应点直接称为点a。

三、绝 对 值

在数轴上，点$+3$与-3到原点的距离都是3，正数3叫做$+3$或-3的绝对值。$+3$、-3的绝对值分别记作$|+3|$和$|-3|$，即$|+3|=3$，$|-3|=3$（图1—1）。

一般地，实数a的绝对值定义为：

$$|a|=\begin{cases} a & \text{当 } a\geqslant 0; \\ -a & \text{当 } a<0。\end{cases}$$

实数a的绝对值$|a|$是个非负的实数，它表示数a在数轴上的对应点到原点的距离。根据$|a|$的定义，有

（1）$|-a|=|a|$，$\sqrt{a^2}=|a|$；

（2）$-|a|\leqslant a\leqslant |a|$；

（3）$|ab|=|a|\,|b|$，$\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}(b\neq 0)$；

（4）$|a+b|\leqslant |a|+|b|$；

（5）$|a-b|\geqslant |a|-|b|$；

（6）$|a|\leqslant k \Longleftrightarrow -k\leqslant a\leqslant k$ $(k>0)$。

仅以（1）中$\sqrt{a^2}=|a|$为例给以证明。

因为$\sqrt{a^2}$表示a^2的算术根，所以$\sqrt{a^2}\geqslant 0$。当$a>0$时，$\sqrt{a^2}=a=|a|$；当$a<0$时，$\sqrt{a^2}=-a=|a|$，所以

$$\sqrt{a^2}=|a|$$

四、区间和邻域

设a，b为实数，且$a<b$，则：

满足条件$a\leqslant x\leqslant b$的全体实数称为闭区间，记为$[a,b]$；满足条件$a<x<b$的全体实数称为开区间，记为(a,b)。

类似地可定义半开区间$[a,b)$及$(a,b]$。在上述各种区间中，点a、b叫区间的端点，$b-a$叫区间的长度。在数轴上，闭区间$[a,b]$是包含端点的一个线段；开区间(a,b)是不包

含端点的一个线段（图1—2）。

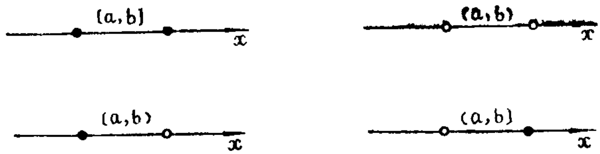

图 1—2

又称满足条件$-\infty < x < +\infty$的全体实数为无穷区间，记作$(-\infty, +\infty)$。类似地可定义半无穷区间$(a, +\infty)$，$[a, +\infty)$，$(-\infty, b)$，$(-\infty, b]$（图1—3）。

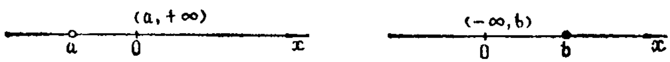

图 1—3

记号“$+\infty$”、“$-\infty$”读作正、负无穷大。注意，正、负无穷大不是数，只是一个记号。

设$\delta>0$，开区间$(x_0-\delta, x_0+\delta)$称为点x_0的δ邻域，x_0称为邻域的中心，δ称为邻域的半径（图1—4）。

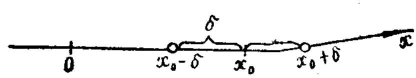

图 1—4

x_0的δ邻域又可用不等式表示为$|x-x_0|<\delta$或者$x_0-\delta<x<x_0+\delta$。

讨论思考题

1. 除$\sqrt{2}$和π外，你还能再举出几个无理数吗？
2. 为什么我们可将一个数a直接称为点a？
3. $|ab|=ab$吗？为什么？在什么情况下该等式成立？

第二节　集　　合

一、集合及其表示方法

集合是数学中的一个基础概念。例如，某个班级的全体学生是一个集合；某人所有的书是一个集合；某柜台的所有商品是一个集合；所有不超过5的自然数是一个集合等等。以上各例所谈的集合都是由有限个人、物、数所组成的，称为有限集合。组成集合的对象称为该集合的元素。含有无穷多个元素的集合叫无穷集合。例如，大于1而小于3的一切实数的集合就是一个无穷集合。

集合通常用大写字母表示；集合中的元素通常用小写字母表示。

某元素x属于集合A，记作

$$x \in A;$$

某元素x不属于集合A，记作

$$x \overline{\in} A$$

全体实数所成的集合记为R，全体自然数的集合记为N。全体整数（正、负整数和零）的集合记为J。

集合的表示方法：

（1）列举法　在一个花括号内列出集合的全体元素。例如，数轴上坐标分别为1，2，3的三个点组成的集合可表示为

$$A=\{1,2,3\}$$

（2）描述法　当集合中的元素无法一一列举或列举不方便时，可以在花括号内，左边写出元素的一般符号，右边写出元素满足的一般条件，中间用一竖线隔开来表示。

【例1】　不小于3的一切自然数的集合可表示为

$$D=\{n \mid n\geqslant 3,\ n\in N\}$$

或

$$D=\{n\in N \mid n\geqslant 3\}$$

【例2】　设A为方程$x^4-1=0$的全体实根所组成的集合，

则A可表示为

$$A=\{x\,|x^4-1=0,\ x\in R\}=\{x\in R\,|x^4-1=0\}=\{1,-1\}$$

我们已经知道，区间$[a,\ b]$是满足$a\leqslant x\leqslant b$（$a,\ b\in R$，且$a<b$）的全体实数，因此，它就是一个集合，即

$$[a,\ b]=\{x\in R\,|a\leqslant x\leqslant b\}$$

本书中常用的集合为数集及直线上、平面上、空间内的点集。

二、子　　集

子集　设集合A的元素都属于集合B，则称A是B的子集，记作

$$A\subseteq B\ \text{或}\ B\supseteq A$$

读作"A包含于B"或"B包含A"（图1—5）。

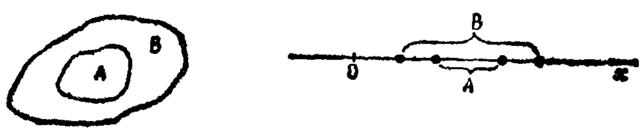

图　1—5

显然，对于任何集合A，有$A\subseteq A$，即一个集合是它本身的子集。

如果$A\subseteq B$，且存在$b\in B$，但$b\overline{\in}A$，则称A为B的**真子集**，记作$A\subset B$。

【例3】　设　$A=\{x\,|0\leqslant x\leqslant 1\}$，$B=\{x\,|0\leqslant x\leqslant 2\}$；显然$A\subset B$。

相等的集合　设有两个集合A和B，如果$A\subseteq B$且$B\subseteq A$，则称A等于B，记作

$$A=B。$$

【例4】　设　$A=\{-1,\ 1\}$，$B=\{x\in R\,|x^4-1=0\}$，则$A=B$。

空集 不含任何元素的集合叫空集，记为ϕ。

我们规定，空集是任何一个集合的子集。

【例5】 设方程$3x^2-x+1=0$的全体实根所成的集合记为A，因为这个方程的判别式$\Delta=(-1)^2-4\cdot3\cdot1<0$，所以该方程没有实根，因而$A$是空集，即$A=\phi$。

三、集合的运算

并集 集合A和集合B的元素合在一起，相同的元素只取一次所成的集合，称为A和B的并集，记作

$$A\cap B$$

读作“A并B”见图1—6(a)。

例如 $\{1,2,3,4\}\cup\{3,4,5,6\}=\{1,2,3,4,5,6\}$

交集 集合A和集合B中的公共元素所组成的集合，称为A和B的交集，记作

$$A\cap B$$

读作“A交B”见图1—6(b)。

差集 设有两个集合A和B，属于A而不属B的元素所成的集合称为A，B的差集，记作

$$A\setminus B$$

读作“A减B”（图1—6 c）。注意，在差集$A\setminus B$中，不要求B是A的子集。

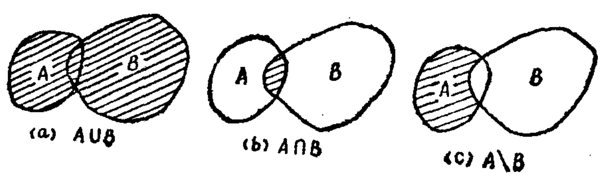

图 1—6

讨论思考题

试用集合的描述表示法分别表示$A\cup B$，$A\cap B$及$A\setminus B$。