邹开其　刘晓东　编著

CF代数

河北教育出版社

CF代数

邹开其　刘晓东　编著

河北教育出版社

冀新登字006号

责任编辑　刘贵廷
封面设计　张　华

CF代数
邹开其　刘晓东　编著

河北教育出版社出版（石家庄市城乡街44号）
河北新华印刷三厂印刷　河北省新华书店发行

850×1168毫米 1/32　20印张　498,000字　1993年9月第1版
1993年9月第1次印刷　定价:14.90元
ISBN 7-5434-1720-0/O·31

前　言

本书是作者多年来教学、科研的总结，是将经典的代数系统(Classical Algebraic Systems)和近年来逢勃发展起来的Fuzzy代数系统溶为一体的结晶，其中的许多章节是笔者自身的工作。

本书在立足阐述经典代数的基本概念的同时，介绍了自1971年以来出现的一个新分支——Fuzzy代数，它是由美国学者A. Rosenfeld于1971年首次提出来的。近年来，一些国内外数学工作者致力于这方面的研究，写出来不少漂亮的文章，得出许多诱人的结果。为将这方面的工作推向深入，有必要总结这些工作，因此笔者尝试撰写了本书，以满足对这一领域感兴趣的读者的需要。

在经典代数中，范畴作为一种工具，起着统观的作用，我们也将它Fuzzy化，这种Fuzzy化的范畴应用范围更广，这样，当全书学完时，用Fuzzy化的范畴去鸟瞰全书，有更上一层楼之感，得益匪浅。

众所周知，Fuzzy代数的研究如雨后春笋，迅猛俱增，它的触角已伸向代数的各个分支，因而要在一本书中概述所有的工作几乎是不可能的，加之笔者才疏学浅，在浩瀚如烟的学术文献中，只能择其一部分写入书中，遗漏之处，敬请广大作者和读者谅解。

笔者感谢北京师范大学的汪培庄教授，尽管他现在还在新加坡大学任客座教授，但对本书的写作和出版给以了很大的关心和帮助，他的鞭策和鼓励，使笔者增强了撰写本书的信心和勇气。同时，笔者感谢河北教育出版社给我们提供了这样一个机会，使本书得以问世，特别感谢刘贵廷同志，他对本书的编辑出版，付出

了辛勤的劳动。由于笔者水平有限，错误和不妥之处，衷心希望广大读者给以指正。

邹开其　刘晓东

1991年9月于大连

目　录

第一章　经典集合与 F 集合

§1　经典集合与类

集合是近代数学的一个基本概念．它的出现，无疑地给近代数学的研究奠定了基础. 但是它的不恰当的定义，又给近代数学带来了危机. 为此，我们首先给出类的概念.

一些对象的全体叫类，使得对每个给定的对象 x，均可决定 x 是否属于该类. 而类 A 叫做一个集合，当且仅当存在另一类 B，使得 $A\in B$. 故集合是一种特殊的类，类远比集合大得多. 不是集合的类叫本性类，本性类确实存在，为此，我们来看一个饶有趣味的例子.

某村有一理发师，规定这位理发师给且只给该村所有那些不给自己理发的人理发. 现在人们问："那位理发师自己的头发由谁理?"这就是著名的理发师悖论. 若假定理发师的头由他自己理，按规定，他只能给那些不给自己理发的人理发，故推出他不能为自己理发；若假定他的头发由别人理，即不给自己理，但按规定这位理发师应该去给自己理发. 所以，不管理发师的头由谁理，都得出矛盾. 将这个理发师悖论公式化，就是 1902 年由英国著名哲学家、数学家罗素(B. Russell)提出的罗素悖论.

设有类 $M=\{x\,|\,x$ 是集合，且 $x\notin x\}$. 这里 M 是一个本性类，若将 M 视为集合，则或 $M\in M$ 或 $M\notin M$. 若 $M\in M$，由 M 的定义必推出 $M\notin M$，而若 $M\notin M$，又必推出 $M\in M$. 不论那种情形，都导致一个不能容许的悖论.

上面的例子提醒我们，在使用集合这一术语时，要回避诸如"一切集合的集合"这类提法，以免重蹈悖论的覆辙. 至于公理化集合论，我们暂时回避它，因为在研究集合的运算（例如，并、交、补、笛卡尔积等）时，有充分多的公理保证这些运算在集合上进行时，其结果也是一个集合.

设 S 为任一集合，其中元素用 $a,b,c,\cdots$ 表示之，这些元素本身性质无关紧要，但须注意 $a\in S$ 与 $a\notin S$ 二者必居且仅居其一. 对每个集合 S，由 S 的所有子集合构成的类 $\mathscr{P}(S)$ 也是集合，称 $\mathscr{P}(S)$ 为 S 的幂集合. 有时，也记作 2^S.

$$\mathscr{P}(S)\triangleq=2^S=\{A\mid A\subset S\}$$

显然，若 S 是有 n 个元素的有限集合，记作 $|S|=n$，则 $|\mathscr{P}(S)|=2^n$.

设 I 是指标的集合，简称标集. 可以定义

$$\bigcup_{i\in I}A_i=\{x\mid\exists\ i\in I,使得\ x\in A_i\}$$

$$\bigcap_{i\in I}A_i=\{x\mid\forall\ i\in I,使得\ x\in A_i\}$$

若 I 是一个集合，则有公理保证 $\bigcup\limits_{i\in I}A_i$，$\bigcap\limits_{i\in I}A_i$ 均是一个集合. 若 $I=\{1,2,\cdots,n\}$，常写成 $\bigcup\limits_{i\in I}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$，$\bigcap\limits_{i\in I}A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$. 若 $A\cap B=\varnothing$，称 A 与 B 是不交的.

集合 A 在 B 中的相对补集定义如下：

$$B-A=\{x\mid x\in B\quad 且\ x\notin A\}$$

如果将我们的讨论限制在一个范围 U 内（U 称为论域），则

$$U-A\triangleq A^C=\{x\mid x\in U\quad 且\ x\notin A\}$$

容易证明下列一些命题：

$A\cap(\bigcup\limits_{i\in I}B_i)=\bigcup\limits_{i\in I}(A\cap B_i)$；

$A\cup(\bigcap\limits_{i\in I}B_i)=\bigcap\limits_{i\in I}(A\cup B_i)$；

$(\bigcup\limits_{i\in I}A_i)^C=\bigcap\limits_{i\in I}A_i{}^C$；

$(\bigcap_{i\in I} A_i)^C = \bigcup_{i\in I} A_i^C$; (De. Morgan 法则)

$(\bigcap_{i\in I} A_i)^C = \bigcup_{i\in I} A_i^C$;

$A\bigcup B = B \Leftrightarrow A\subset B \Leftrightarrow A\bigcap B = A$.

§2 映射及经典集合上的测度

映射是函数概念的推广，也是近代数学的一个重要概念.

定义 1.2.1 设 S、T 是给定的两个集合，如果有一个法则 α，通过它，对 $\forall\ s\in S$，$\exists\ t\in T$，使得 $\alpha(s)=t$，称 α 是 S 到 T 的一个映射．S 叫定义域，T 叫上域(Codomain)，记为 $\alpha: S\to T$.

定义 1.2.1 中是用通用的法则定义映射的方法，我们再给出用图象定义映射的方法．

设 S 和 T 是两个给定的集合，称

$$S\times T=\{(s,t)\mid s\in S, t\in T\}$$

为 S 和 T 的笛卡尔积．

定义 1.2.1′ 由 S 到 T 的一个映射 α 是 $S\times T$ 的一个子集，满足：

(1) $\forall\ s\in S$，$\exists\ t\in T$，使得 $(s,t)\in\alpha$；

(2) 若 (s,t)、$(s,t')\in\alpha$，则 $t=t'$.

此时，将 s 在 α 下的象记为 $\alpha(s)$.

显然定义 1.2.1 和定义 1.2.1′是等价的，后者更带有直观性，我们将经常使用它．

两个映射相等当且仅当它们有相同的定义域，相同的上域和相同的图象．

从 S 到 T 的映射的集合记为 T^S

$$T^S=\{\alpha\mid\alpha: S\to T\}$$

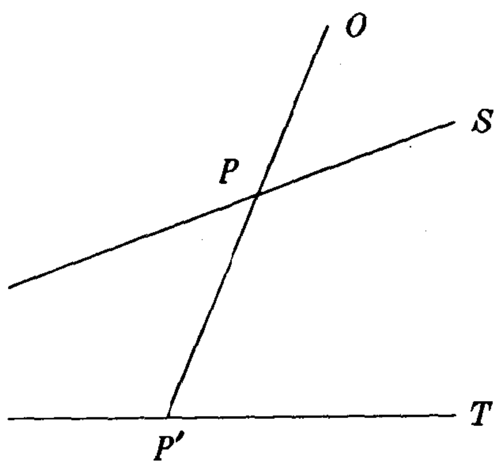
设 $A\subset S$，称 $\alpha(A)=\{\alpha(a)\mid a\in A\}$ 为 A 在 α 下的象，特别 α

(S)叫映射的象，记做 $\mathrm{im}\alpha$. 若把定义域限制在 S 的子集 A 上，则得到一个 A 到 T 的映射，即

$$\beta=\{(a,\alpha(a))\mid a\in A\}\subset A\times T$$

称 β 为 α 在 A 上的限制，记作 $\beta=\alpha|_A$. 反之，称 α 是 β 的扩张．

请看一个几何实例：直线 S 和 T 分别是定义域和上域，O 点是既不在 S 上又不在 T 上的一个固定点，将 S 上的任一点 P 映射到 OP 与 T 的交点 P'，显然这是一个映射，在射影几何中，称为透视．按定义 1.2.1′，这个映射由 S、T 以及 $S\times T$ 的一个子集 $\alpha=\{(P,P')\mid P\in S,P'\in T\}$构成．



当 $\mathrm{im}\alpha=T$ 时，称 α 为满射．此时上域 T 即为通常说的值域．若 $s_1\neq s_2\Rightarrow\alpha(s_1)\neq\alpha(s_2)$，称 α 为单射．若 α 既是单射，又是满射，则称 α 为双射．

设 $\alpha:S\to T,\beta:T\to V$，则 α 与 β 的合成映射定义为：$\beta\alpha:S\to V$. $\beta\alpha$ 具有定义域 S，上域 V，且

$$\beta\alpha=\{(s,\beta(\alpha(s)))\mid s\in S\}\subset S\times V$$

故 $\beta\alpha(s)=\beta(\alpha(s))$，它可用下面的三角形图形可换来表示：

$$
\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\gamma"'] & T \arrow[d, "\beta"] \\
 & V
\end{tikzcd}
$$

其中，$\gamma=\beta\alpha$.

类似，也有四边形图形可换法则.

设 $\alpha:S\to T,\beta:T\to U,\gamma:S\to V,\delta:V\to U$，则 $\beta\alpha=\delta\gamma$ 可用图形表示：

$$
\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\gamma"'] & T \arrow[d, "\beta"] \\
V \arrow[r, "\delta"'] & U
\end{tikzcd}
$$

映射的合成满足结合律，设 $\alpha:S\to T,\beta:T\to U,\gamma:U\to V$，则

$$\gamma(\beta\alpha)=(\gamma\beta)\alpha$$

证明是容易的，仅用示意图说明．映射的结合律说明，只要 $\triangle STU$ 和 $\triangle TUV$ 可换，则整个图形可换.

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "\beta"] \arrow[dr] & U \arrow[d, "\gamma"] \\ S \arrow[u, "\alpha"] \arrow[ur] & V \end{tikzcd}$$

对任意集合 S，定义恒等映射 $I_S:S\to S$，其中，

$$I_S=\{(s,s)\mid s\in S\}$$

称 I_S 为 S 的对角线，在不混淆的前提下，也可简记为 I.

若 $\alpha:T\to S$，显然有 $I_T\alpha=\alpha I_s$. 下面给出重要命题.

命题 1.2.1 $\alpha:S\to T$ 是双射当且仅当存在 $\beta:T\to S$，使得 $\beta\alpha=I_S$，$\alpha\beta=I_T$.

证明 $\Rightarrow$)$\forall\ s\in S$，由 $\alpha(s)\in T$，得

$$\beta=\{(\alpha(s),s)\mid s\in S\}\subset T\times S$$

对$\forall\ t\in T$，因 α 是满射，故$\exists\ s\in S$，使得 $\alpha(s)=t$，又 α 是单射，若(t,s_1)、$(t,s_2)\in\beta$，则

$$\alpha(s_1)=t=\alpha(s_2)\Rightarrow s_1=s_2$$

故 β 是映射.

又$\forall\ s\in S$，由$(s,\alpha(s))\in\alpha$ 和$(\alpha(s),s)\in\beta$，得

$$\beta\alpha(s)=\beta(\alpha(s))=s$$

故 $\beta\alpha=I_T$.

同理可证 $\alpha\beta=I_T$

$\Leftarrow$)$\forall\ t\in T$，则 $\beta(t)=s\in S$，因而

$$\alpha(s)=\alpha(\beta(t))=\alpha\beta(t)=I_T(t)=t$$

故 α 是满射.

若 $\alpha(s_1)=\alpha(s_2)$，则 $s_1=\beta(\alpha(s_1))=\beta(\alpha(s_2))=s_2$，故 α 是单射.

由此完成了命题的证明.

显然，满足 $\beta\alpha=I_S$ 和 $\alpha\beta=I_T$ 的 β 是唯一的，把这个 β 记作 α^{-1}，有$(\alpha^{-1})^{-1}=\alpha$.

命题 1.2.2 两个双射的积是双射，即设 $\alpha: S\to T$，$\beta: T\to V$ 都是双射，则 $\beta\alpha$ 也是双射，且

$$(\beta\alpha)^{-1}=\alpha^{-1}\beta^{-1}$$

证明 显然有 $\alpha^{-1}: T\to S$，$\beta^{-1}: V\to T$，且 $\alpha^{-1}\beta^{-1}: V\to S$.

$$(\beta\alpha)(\alpha^{-1}\beta^{-1})=\beta(\alpha\alpha^{-1})\beta^{-1}=\beta\beta^{-1}=I_V$$

$$(\alpha^{-1}\beta^{-1})(\beta\alpha)=\alpha^{-1}(\beta^{-1}\beta)\alpha=\alpha^{-1}\alpha=I_S$$

故 $(\beta\alpha)^{-1}=\alpha^{-1}\beta^{-1}$.

公式$(\beta\alpha)^{-1}=\alpha^{-1}\beta^{-1}$称为穿脱原理，尤如在穿脱鞋袜时，脱时按穿的相反顺序进行.

本节最后指出，笛卡尔积的概念可以推广到任意有限多个集合.

设 $S_1,S_2,\cdots,S_n$ 是任意 n 个集合，则称

$$\prod_{i=1}^{n}S_i\triangleq S_1\times S_2\times\cdots\times S_n=\{(s_1,s_2,\cdots,s_n)\mid s_i\in S_i,i=1,2,\cdots,n\}$$

为 n 个集合 $S_1,S_2,\cdots,S_n$ 的笛卡尔积.

此概念也可推广到任意无限多个集合，设 I 是任一指标集，则

$$\prod_{i\in I}s_i=\{\alpha\mid\alpha: I\to\bigcup_{i\in I}S_i,\alpha(i)\in S_i,\forall\ i\in I\}$$

下面我们研究集合上的测度.

定义 1.2.2 设 S 为集合，σ 为 S 的一个子集类，即 $\sigma\subset\mathscr{P}$

(S)，若

(1)$A\in\sigma$，则 $A^C\in\sigma$；

(2)$A,B\in\sigma$，则 $A\cap B\in\sigma$；

(3)$\{A_n\}_{n\in I}(A_n\in\sigma)$，$I$ 为一可数指标集，则 $\bigcup\limits_{n\in I}A_n\in\sigma$；

(4)$\varnothing,S\in\sigma$.

则称 σ 为 S 上的一个 σ—代数.

定义 1.2.3 设 S 为集合，σ 为 S 上的 σ—代数，$m:\sigma\to\overline{\mathbf{R}}$($\overline{\mathbf{R}}$ 表示实数 $\mathbf{R}$ 加上∞点)，m 满足：

(1)若 $\{A_n\}_{n\in I}$为 σ 的一个序列，且 $A_i\cap A_j=\varnothing$，$i\neq j$，则 $m(\bigcup\limits_{n\in I}A_n)=\sum\limits_{n\in I}m(A_n)$；

(2)$\forall A\in\sigma$，则 $m(A)\geqq0$；

(3)$m(S)=1$，$m(\varnothing)=0$.

则称 m 为(S,σ)的一个概率测度. 当 $m(S)\neq1$ 时，称为正测度，即普通的测度.

定义 1.2.4 设 S_1、S_2 为两个集合，σ_1、σ_2 分别为 S_1、S_2 上的 σ—代数，令 $f:S_1\to S_2$，如果满足 $\forall A\in\sigma_2$，有 $f^{-1}(A)\in\sigma_1$，则称 f 为可测函数.

命题 1.2.3 设 m 为(S,σ)上的概率测度，A、$B\in\sigma$，则 $m(A\cap B)=m(A)+m(B)-m(A\cup B)$.

证明 $A\cup B=A\cup(B-A\cap B)$，$A\cap(B-A\cap B)=\varnothing$

$B=(B-A\cap B)\cup(A\cap B)$，$(B-A\cap B)\cap(A\cap B)=\varnothing$

故由测度定义有

$$\begin{aligned}m(A\cup B)&=m(A\cup(B-A\cap B))\\&=m(A)+m(B-A\cap B)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}m(B)&=m((B-A\cap B)\cup(A\cap B))\\&=m(B-A\cap B)+m(A\cap B)\end{aligned}$$

$$m(A\cap B)=m(A)+m(B)-m(A\cup B)$$

命题 1.2.4 设 $\mathbf{R}$ 为实数集，σ 为 $\mathbf{R}$ 上的闭集、开集、半开半闭集所生成的 σ—代数，令 $m:\sigma\to\overline{\mathbf{R}}$，$(a,b)$，$[a,b]$，$(a,b]$，$[a,b)\in\sigma$，令

$$m((a,b))=m([a,b])=m((a,b])=m([a,b))=b-a$$

则 m 为 $(\mathbf{R},\sigma)$ 上的测度．把 σ 称为波雷尔集，m 称为勒贝格测度．

证明 显然．

§3 F 集合

一个经典集合 X 的元素个数通常是有限的，可数的，或不可数的．每个元素要么属于要么不属于集合 A，$A\subset X$.

这样的经典集合能用不同的方法描述，可以把属于这个集合的元素都列举出来，也可以用某些条件来描述，如 $A=\{x\mid x\leqq 5\}$，还可以用特征函数把这个集合表示出来．某个元素的特征函数值为 1 时，则这个元素属于这个集合，当它的特征函数值为 0 时，则不属于这个集合．而模糊集，它的特征函数值可取闭区间 $[0,1]$ 的任意值．

定义 1.3.1 设 X 是论域集（经典集合），则论域 X 上的一个模糊子集 $\widetilde{A}$（简称为 F 子集 $\widetilde{A}$）表示如下：

$$\widetilde{A}=\{(x,\mu_{\widetilde{A}}(x)\mid x\in X\}$$

$\mu_{\widetilde{A}}(x)$ 称为 X 在模糊子集 $\widetilde{A}$ 上的隶属度（也称为对比度或真值度），$\mu_{\widetilde{A}}$ 为 X 到隶属空间 M 的映射（M 为一经典集合），当 M 只有两个元素 0、1 时，$\widetilde{A}$ 就是分明的，$\mu_{\widetilde{A}}$ 即为经典集合的特征函数；当 M 取为 $[0,1]$ 时，$\mu_{\widetilde{A}}$ 就是模糊子集 A 的隶属函数，以后如不特别说明，M 都表示 $[0,1]$.

定义 1.3.2 设 $\widetilde{A}$ 为论域 X 上的一个模糊子集，令

$$S(\widetilde{A})=\{x\mid x\in X,\mu_{\widetilde{A}}(x)>0\}$$

称 $S(\widetilde{A})$ 为模糊子集 $\widetilde{A}$ 的支集，显然 $S(\widetilde{A})$ 为经典集合．