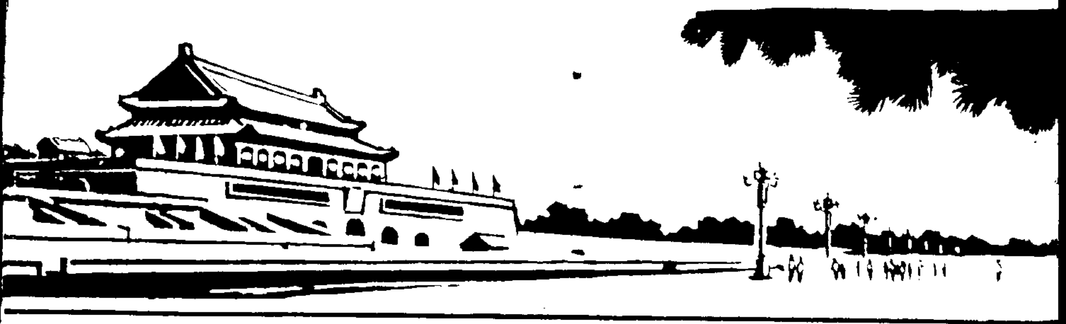

北京市中学课本

数学

第十册

北京市中学课本
数　学
第十册
北京市教育局教材编写组编
*
北京人民出版社出版
北京市新华书店发行
北京印刷四厂印刷
*
1973 年6月第1版　1974 年6月第2次印刷
书号：K7071・178　定价：0.25 元

毛 主 席 语 录

我们的教育方针，应该使受教育者在德育、智育、体育几方面都得到发展，成为有社会主义觉悟的有文化的劳动者。

学生也是这样，以学为主，兼学别样，即不但学文，也要学工、学农、学军，也要批判资产阶级。学制要缩短，教育要革命，资产阶级知识分子统治我们学校的现象，再也不能继续下去了。

说　明

彻底改革旧教材，编写无产阶级新教材，是无产阶级教育革命的重要组成部分。在毛主席教育革命思想的指引下，在本市广大工农兵、革命师生和有关单位的大力支持和帮助下，我们编写了这册教材，供本市中学五年级下学期使用。由于我们对伟大领袖毛主席的教育革命思想理解不深，教材中一定会有不少缺点和错误，望广大工农兵和革命师生批评指正。

北京市教育局教材编写组

一九七三年四月

目　录

第十九章　圆锥曲线(续)　123

第二十章　参数方程和极坐标　5.8

第十九章　圆锥曲线(续)

三　椭圆

1. 椭圆的方程

毛主席指示:“**我们也要搞人造卫星。**”1970年4月24日我国成功地发射了第一颗人造地球卫星，它的运行轨道是一个椭圆(图19-19).

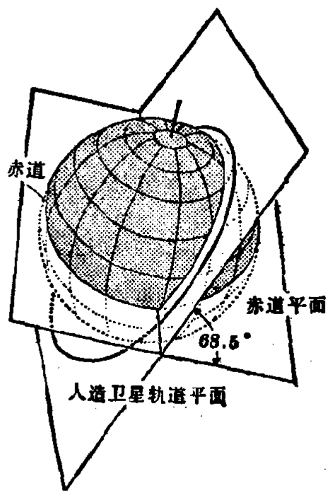

图　19-19

在生产实践和科学实验中，椭圆是一种常用的曲线. 例如,隧道的横断面、油车油箱的横截面都是椭圆(图19-20).

毛主席教导我们:“……**感觉到了的东西，我们不能立刻理解它，只有理解了的东西才更深刻地感觉它。**”从上面的例子我们观察到,椭圆比圆扁一些,但它和圆之间有什么内在联系?椭圆又是怎样的一种曲线?下面就来探讨这一问题.

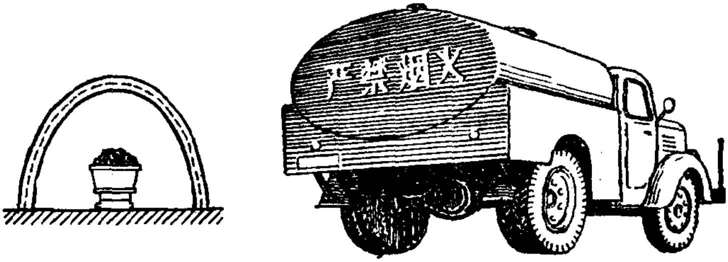

图 19-20

画圆时，可以取一条定长的绳子，把绳子两端连接起来，并把它套在画图板上一个定点处，用铅笔尖把绳子拉紧，使笔尖在图纸上慢慢移动，就可以画出一个圆．用类似的方法，也可以画出椭圆．现在我们取一条定长的绳子，把它的两端固定在画图板上 F_1 和 F_2 两点，用铅笔尖把绳子拉紧，使笔尖在图纸上移动，就可以画出一个椭圆(图 19-21)．

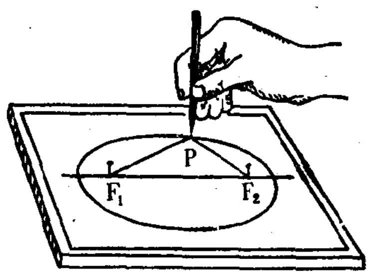

图 19-21

从上面画椭圆的方法中，可以看出，曲线上任何一点 P 到两定点 F_1 和 F_2 的距离的和都等于这条绳子的长．

如果平面内一个动点到两个定点的距离的和等于定长，那么这个动点的轨迹叫做**椭圆**．这两个定点叫做**焦点**，两个焦点的距离叫做**焦距**．

现在我们来研究椭圆的方程.

取经过焦点 F_1 和 F_2 的直线为 x 轴，线段 F_1F_2 的垂直平分线为 y 轴(图 19-22).

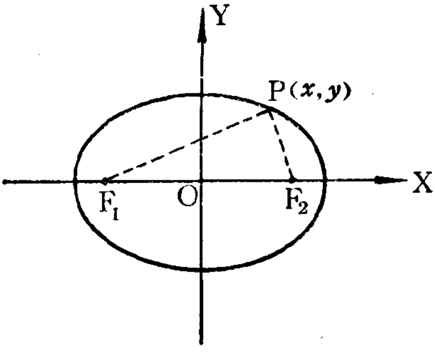

图 19-22

设椭圆的焦距是 $2c(c>0)$，那么 F_1 和 F_2 的坐标分别是 $(-c, 0)$ 和 $(c, 0)$. 设 $P(x, y)$ 是椭圆上的任意一点，它到两个焦点 F_1、F_2 的距离的和是定长 $2a(a>0)$，于是根据椭圆的定义，有

$$|PF_1|+|PF_2|=2a.$$

由两点间的距离公式，可以得出

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a.$$

这个方程刻划出了椭圆上点的特征，所以它就是椭圆的方程. 现在化简这个方程. 先移项，得

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

两边平方，得

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$
$$+(x-c)^2+y^2.$$

化简，得

$$cx-a^2=-a\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

两边再平方，得

$$(cx-a^2)^2=a^2[(x-c)^2+y^2],$$

就是

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

因为在 $\triangle PF_1F_2$中，$|PF_1|+|PF_2|>|F_1F_2|$，就是 $2a>2c$，所以 $a>c$，因此 $a^2-c^2>0$. 设 $a^2-c^2=b^2$ $(b>0)$. 代入上式，得

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2,$$

就是

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.} \qquad (1)$$

这里 $a>b$. 我们把这个方程叫做椭圆的标准方程. 这个方程所表示的椭圆上的点到两个焦点的距离的和是 $2a$，两个焦点的坐标是$(-c, 0)$和$(c, 0)$，焦距是 $2c$，这里 $c^2=a^2-b^2$. 应该注意，椭圆的标准方程是对于如下的坐标系来说的，这个坐标系，是以经过椭圆的焦点 F_1、F_2 的直线和线段 F_1F_2 的垂直平分线为坐标轴建立起来的.

通过上面求椭圆方程的方法，可以知道，动点 $P(x, y)$在曲线上的任何位置时，它与定点 F_1 和 F_2 的距离的和永远保持定长$2a$，因此它的坐标(x, y)一定适

合于方程(1). 这就是说，椭圆上任一点的坐标一定适合于方程(1). 反过来，也可以证明：如果曲线上某一点$P(x, y)$的坐标适合于方程(1)，那么这个点就一定在椭圆上. 也就是说满足条件$|PF_1|+|PF_2|=2a$(证明从略).

从椭圆的定义导出椭圆方程的过程中，使我们再一次认识到，曲线和方程是一个事物的两个方面，由曲线转化为方程的条件是建立坐标系，用坐标方法刻划曲线最本质的属性，从而求得曲线的方程.

2. 椭圆的性质

毛主席指出：“**矛盾着的两方面中，必有一方面是主要的，他方面是次要的。**”用坐标的方法探讨几何图形——曲线的性质时，曲线和方程这一矛盾中，方程就是矛盾的主要方面.

现在我们就椭圆的标准方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)\quad (1)$$

来研究椭圆的性质.

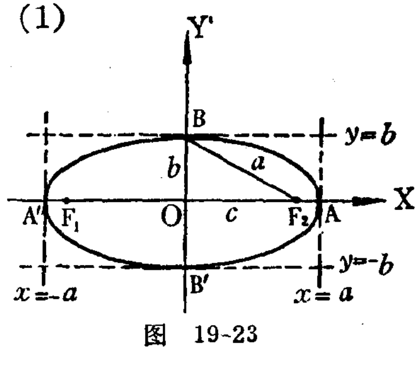

图 19-23

(1) 截距　当$x=0$时，$y=\pm b$，就是椭圆交y轴于$B(0, b)$和$B'(0, -b)$两点；当$y=0$时，

$x=\pm a$，就是椭圆交 x 轴于 $A(a, 0)$和$A'(-a, 0)$两点(图19-23)．A、A'、B、B'叫做椭圆的顶点．线段 $A'A$ 叫做椭圆的长轴，它的长等于 $2a$，a 叫做半长轴；线段 $B'B$ 叫做椭圆的短轴，它的长等于 $2b$，b 叫做半短轴．两轴的交点 O，叫做椭圆的中心．很明显，椭圆的焦点在长轴上．因为$a^2-c^2=b^2$，所以$|BF_2|=|BF_1|=a$．

(2) 对称性　因为以$-y$ 代 y，以$-x$ 代 x，方程(1)都不变，所以椭圆分别对于 x 轴、y 轴和原点是对称的*．

(3) 范围　从方程(1)得

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},\quad x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}.$$

由上面的两个式子可以知道，当$|x|\leqslant a$ 时，y 才有实数值；当 $|y|\leqslant b$ 时，x 才有实数值．因此，椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在四条直线 $x=a, x=-a, y=b, y=-b$ 所围成的矩形内(图 19-23)．

(4) 离心率　从图 19-23 可以看到，$\frac{b}{a}$的值愈小，椭圆就愈扁平．但一般我们不用这个比值，而用椭圆

* 两个图形，如果把其中一个图形绕定点旋转 180° 以后，能够与另一图形重合，这两个图形就叫做关于这个定点中心对称．定点叫做对称中心．当定点是原点的时候，图形就叫做关于原点是对称的．

的焦距和长轴的比来表示椭圆的扁平度，这个比叫做椭圆的离心率，通常用 e 来表示，就是

$$e=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}.$$

因为 $c<a$，所以 $e<1$.

由等式 $b^2=a^2-c^2$，可以得到

$$\frac{b}{a}=\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}}=\sqrt{1-e^2}.$$

从这个式子可以看出，当 e 的值愈大，即愈近于 1 时，$\frac{b}{a}$的值愈近于 0，椭圆就愈扁平；e 的值愈小，即愈近于 0 时，$\frac{b}{a}$的值愈近于 1，椭圆就愈近于圆；当 $e=0$ 时，$a=b$，方程(1)变成 $x^2+y^2=a^2$，椭圆就变成圆．这时 $c=0$，所以圆是椭圆的特殊情形.

由以上的讨论，可以知道：

椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的长轴的长为 $2a$，短轴的长为 $2b$，焦点是 $F_1(-c,\ 0)$、$F_2(c,0)$，离心率 $e=\frac{c}{a}$ $(c^2=a^2-b^2)$.

“一切客观事物本来是互相联系的和具有内部规律的”．我们用坐标的方法，通过曲线的方程来研究曲线时，总是要考虑到曲线在坐标轴上的截距，曲线对于

坐标轴或原点是不是对称，曲线的范围和离心率以及其他一些性质．这对今后研究双曲线、抛物线来说，都是带有一般性的．

例 1　求椭圆 $16x^2+25y^2=400$ 的长轴和短轴的长、离心率、焦点的坐标，并且画出它的图形．

解：把已知方程化成标准方程，得

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1.$$

所以 $a=5$, $b=4$, $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-16}=3$.

因此椭圆的长轴和短轴的长分别是 $2a=10$ 和 $2b=8$，离心率是 $e=\frac{c}{a}=0.6$，两个焦点的坐标分别是 $(-3,0)$ 和 $(3,0)$．

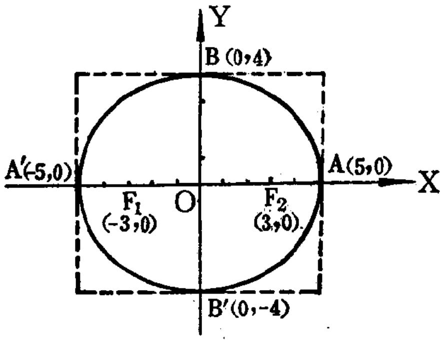

图　19-24

作出椭圆的四个顶点 $A(5,0)$、$A'(-5,0)$、$B(0,4)$、$B'(0,-4)$．由关系式

$$y=\pm\frac{4}{5}\sqrt{25-x^2},$$

在第 I 象限 $x\leqslant 5$ 的范围内计算几组 x、y 的对应值：

x	2,	3,	4, ……
y	3.7,	3.2,	2.4, ……

先描点画出椭圆在第Ⅰ象限内的一部分，再利用椭圆的对称性就可以画出如图 19-24 所示的椭圆.

例 2　已知椭圆的半长轴和半短轴长的和为 10，焦距为$4\sqrt{5}$，焦点在 x 轴上，求这个椭圆的标准方程.

解：因为

$$2c=4\sqrt{5},$$

所以 $$c^2=20,$$

就是 $$a^2-b^2=20.$$

又由题意，可以知道

$$a+b=10.$$

解由上面两个方程组成的方程组，得

$$a=6,\quad b=4.$$

所以所求的椭圆的标准方程为

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1.$$

如果椭圆的中心在原点，焦点在 y 轴上，如图 19-25 所示，那么它的方程是

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1(a>b>0).$$

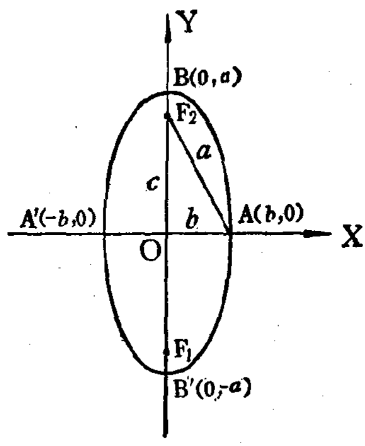

图　19-25

椭圆$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1(a>b>0)$ 的长轴的长是 $2a$，短轴

的长是 $2b$，焦点是 $F_1(0,\ -c)$、$F_2(0,\ c)$，离心率是 $\frac{c}{a}(c^2=a^2-b^2)$.

我们把这个方程，也叫做椭圆的标准方程.

例 3 求椭圆 $9x^2+4y^2=36$ 的长轴和短轴的长、离心率、焦点的坐标，并且画出它的图形.

解：把已知方程化成标准形式，得

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1.$$

它的图形是一个椭圆，中心在原点，焦点在 y 轴上. $a=3,\ b=2,\ c=\sqrt{5}$. 因此椭圆的长轴和短轴的长分别是 $2a=6$ 和 $2b=4$，离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$，两个焦点的坐标分别是 $(0,\ -\sqrt{5})$ 和 $(0,\ \sqrt{5})$.

画出椭圆的四个顶点 $A(2,\ 0)$、$A'(-2,\ 0)$、$B(0,3)$、$B'(0,\ -3)$. 由关系式

$$y=\pm\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2},$$

求得第 I 象限内几组 x、y 的对应值：

x	$\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$, ……
y	2.9, 2.6, 2.0, ……

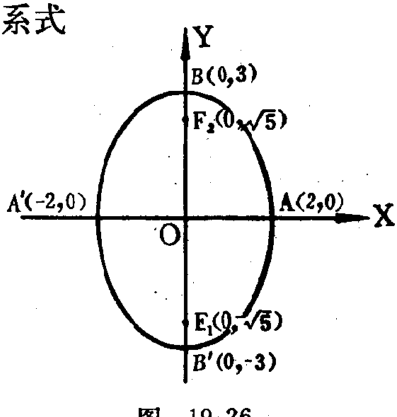

图 19-26

先描点画出椭圆在第Ⅰ象限内的图形，再利用对称性画出它的全部图形，如图 19-26 所示.

例 4 平移坐标轴化简方程 $4x^2+9y^2-8x+18y-23=0$，使新方程没有一次项，并且画出新旧坐标轴和方程所表示的曲线.

解：用平移公式代入所给方程，得

$$4(x'+h)^2+9(y'+k)^2-8(x'+h)+18(y'+k)-23=0.$$

就是

$$4x'^2+9y'^2+(8h-8)x'+(18k+18)y'+4h^2+9k^2-8h+18k-23=0. \quad (1)$$

为了使新方程没有一次项，我们令

$$\begin{cases}8h-8=0,\\ 18k+18=0.\end{cases}$$

解这个方程组，得 $h=1$，$k=-1$. 代入(1)，得到对于原点移到 $O'(1,-1)$ 的新坐标系的方程是

$$4x'^2+9y'^2=36,$$

就是

$$\frac{x'^2}{9}+\frac{y'^2}{4}=1.$$

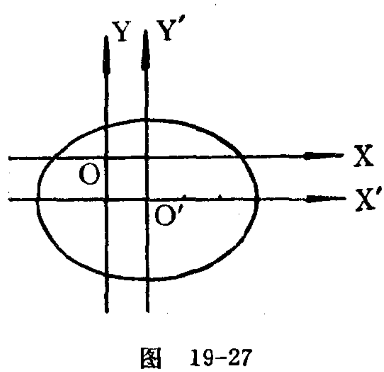

图 19-27

这是一个中心在新原点 O' 的椭圆的方程，O' 在旧坐标系中的坐标是 $(1,-1)$. 这个椭圆