

545944

高等学校教学参考书

高等代数

上册

张禾瑞 郝炳新编



2

人民教育出版社

成都科技大学图书馆
基本馆藏

570499

315
1121.2
T2

15

高等学校教学参考书

高等代数

下册

张禾瑞 郝钢新 编



成都科学技术大学图书馆

基本馆藏

人民教育出版社

书号 13012·0365
定价 0.37 元

高等学校教学参考书

高等代数

上册

张禾瑞 郝炳新编

明

· 570499.

315
1121·2
T2

高等学校教学参考书

高等代数

下册

(第二版)

张禾瑞 郝炳新 编



高等学校教学参考书
高等代数
上册
张禾瑞 郝炳新编

*

人民教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32 印张 5 12/16 字数 139,000

1956 年第 1 版

1979 年 2 月第 2 版 1979 年 6 月第 1 次印刷

印数 00,001—130,000

书号 13012·0324 定价 0.43 元

高等学校教学参考书

高等代数

下册

张禾瑞 郝钢新 编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32 印张 4.875 字数 117,000

1956年第1版

1979年6月第2版 1979年11月第1次印刷

印数 000,001—70,000册

书号 13012·0365 定价 0.37元

第二版说明

本书第一版是根据中华人民共和国教育部1954年颁布的师范学院数学系高等代数教学大纲编写的，内容主要是多项式和方程，对于线性代数涉及较少。由于线性代数是数学工作者不可缺少的基础知识，因此在第二版中加强了线性代数部分。

第一版中有些章节，如根的存在定理，三次及四次方程，尺规作图问题等，从基础知识或基本训练的角度来看，显得不太必要；其它一些章节，如代数基本定理的证明，群、环、域的介绍，多元多项式，实根的近似计算等，可以在复变函数，近世代数和计算方法里更好地讲述。为了篇幅不致过大，第二版删去了这些内容。

关于一元多项式，行列式，线性方程组，二次型的一些章节，我们全部或部分地改写过，以便初学者更易于接受。

在编写过程中，我们的许多同事提出了不少宝贵的意见，谨向他们表示感谢。

希望读者多加指正。

作 者

1979年2月

目 录

第一章 基本概念	1
1.1 集合.....	1
1.2 映射.....	6
1.3 数学归纳法.....	13
1.4 复数.....	17
1.5 复数的几何表示和复数的平方.....	24
1.6 数域.....	33
第二章 一元多项式	35
2.1 一元多项式的定义和运算.....	35
2.2 多项式的整除性.....	39
2.3 多项式的最大公因式.....	45
2.4 多项式的分解.....	55
2.5 重因式.....	62
2.6 多项式函数 多项式的根.....	65
2.7 复数和实数域上多项式.....	71
2.8 有理数域上多项式.....	76
第三章 行列式	84
3.1 线性方程组和行列式.....	84
3.2 排列.....	87
3.3 n 阶行列式.....	91
3.4 子式和代数余子式 行列式的依行依列展开.....	103
3.5 克莱姆规则.....	115
第四章 线性方程组	120
4.1 消元法.....	120
4.2 矩阵的秩 线性方程组可解的判别法.....	132
4.3 线性方程组的公式解.....	138

第五章 矩阵	147
5.1 矩阵的运算	147
5.2 可逆矩阵 矩阵乘积的行列式	157
5.3 矩阵的分块	170

目 录

第六章 向量空间	181
6.1 定义和例子	181
6.2 子空间	186
6.3 向量的线性相关性	190
6.4 基和维数	199
6.5 坐标	206
6.6 向量空间的同构	214
6.7 矩阵的秩 齐次线性方程组的解空间	217
第七章 线性变换	225
7.1 线性映射	225
7.2 线性变换的运算	232
7.3 线性变换和矩阵	236
7.4 不变子空间	244
7.5 特征根和特征向量	248
7.6 可以对角化的矩阵	257
7.7 若当标准形介绍	266
第八章 欧氏空间	268
8.1 向量的内积	268
8.2 正交基	277
8.3 正交变换	289
第九章 对称内积和二次型	298
9.1 对称内积和对称矩阵	298
9.2 复数域和实数域上的对称矩阵	309
9.3 二次型	315
9.4 欧氏空间上的二次型	321

第一章 基本概念

作为大学数学基础课程的代数，是中学代数的继续和提高。

在学习这门课程时将会发现，它与中学代数有很大的不同。这种不同不仅表现在内容的深度上，更重要的是表现在观点和方法上。

在这个课程里将体现由具体事物抽象出一般概念，再从一般概念回到具体事物去的这种辩证观点和严格的逻辑推理方法。这一点在学习过程中将逐渐体会。

作为开始，我们先介绍一些最基本的概念和方法。这些概念和方法对于今后的学习是必要的。

1.1 集合

我们先从一个最简单的概念开始。

在日常生活中，常常谈论一组事物。例如，一班同学，一队解放军，一组自然数，一筐苹果，等等。这里，“一班”，“一队”，“一组”，“一筐”等都表示一定事物的集体。我们称它们为集合或集。组成集合的东西叫做这个集合的元素。

我们常用大写拉丁字母 A, B, C, \dots 表示集合，用小写拉丁字母 a, b, c, \dots 表示元素。

如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于 A ，记作 $a \in A$ ；或者说 A 包含 a ，记作 $A \ni a$ 。

如果 a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于 A ，记作 $a \notin A$ ；或者说 A 不包含 a ，记作 $A \not\ni a$ 。

例如，设 A 是一切偶数所成的集合。那么 $4 \in A$ ，而 $3 \notin A$ 。

一个集合可能只含有有限多个元素。这样的集合叫做有限集

合。例如，前十个自然数的集合；一个学校里全体学生的集合；一本书里所有汉字的集合等等都是有限集合。如果一个集合是由无限多个元素组成的，就叫做无限集合。例如，全体自然数的集合；全体实数的集合；小于1的全体正有理数的集合等等都是无限集合。

我们把一个含有 n 个元素 a_1, a_2, \dots, a_n 的有限集合记作 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 。

例如，前五个自然数的集合就记作 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 。

一个集合当然可以只含有一个元素。例如，一切偶素数的集合就只含有一个元素 2。只含有一个元素 a 的集合，用上面的记法，就记作 $\{a\}$ 。

设 A, B 是两个集合。如果 A 的每一元素都是 B 的元素，那么就说 A 是 B 的子集，记作 $A \subseteq B$ (读作 A 属于 B)，或记作 $B \supseteq A$ (读作 B 包含 A)。根据这个定义， A 是 B 的子集必要且只要对于每一元素 x ，如果 $x \in A$ ，就有 $x \in B$ 。

例如，一切整数的集合是一切有理数的集合的子集，而后者又是一切实数集合的子集。

我们现在引入几个记号。

用 $(\dots) \implies (\dots)$ 表示“如果 (\dots) ，则 (\dots) ”。例如，“如果 $x \in A$ ，则 $x \in B$ ”就记作 $x \in A \implies x \in B$ 。

用符号 $(\dots) \iff (\dots)$ 表示“ (\dots) 必要且只要 (\dots) ”。

因此，“ A 是 B 的子集”就可以表示为

$$(A \subseteq B) \iff (\text{对一切 } x: x \in A \implies x \in B).$$

如果 A 不是 B 的子集，就记作 $A \not\subseteq B$ 或 $B \not\supseteq A$ 。因此， A 不是 B 的子集必要且只要 A 中至少有一个元素不属于 B 。即

$$(A \not\subseteq B) \iff (\text{存在一个元素 } x, x \in A \text{ 但 } x \notin B).$$

例如，一切可以被 3 整除的整数所成的集，不是一切偶数所成

的集的子集，因为3属于前者但不属于后者。集合 $\{1, 2, 3\}$ 不是 $\{2, 3, 4, 5\}$ 的子集。

根据定义，一个集合 A 总是它自己的子集。即

$$A \subseteq A.$$

如果集合 A 与 B 是由完全相同的元素组成的，就说 A 与 B 相等，记作 $A=B$ 。我们有

$$(A=B) \Leftrightarrow (\text{对一切 } x: x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

例如，设 $A=\{1, 2\}$ ， B 是二次方程 $x^2-3x+2=0$ 的根的集合，则 $A=B$ 。

下列事实是明显的：

$$(A \subseteq B \text{ 且 } B \subseteq C) \Rightarrow (A \subseteq C).$$

$$(A \subseteq B \text{ 且 } B \subseteq A) \Leftrightarrow (A=B).$$

现在设 A, B 是两个集合。由 A 的一切元素和 B 的一切元素所成的集合叫做 A 与 B 的并，记作 $A \cup B$ 。

例如， $A=\{1, 2, 3\}$ ， $B=\{2, 3, 4\}$ ，则

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}.$$

又例如， A 是一切有理数的集合， B 是一切无理数的集合，则 $A \cup B$ 是一切实数的集合。显然 $A \subseteq A \cup B$ ， $B \subseteq A \cup B$ 。

根据定义，我们有

$$(x \in A \cup B) \Leftrightarrow (x \in A \text{ 或 } x \in B).$$

$$(x \notin A \cup B) \Leftrightarrow (x \notin A \text{ 且 } x \notin B).$$

由集合 A 与 B 的公共元素所组成的集合叫做 A 与 B 的交，记作 $A \cap B$ 。显然， $A \cap B \subseteq A$ ， $A \cap B \subseteq B$ 。

例如 $A=\{1, 2, 3, 4\}$ ， $B=\{2, 3, 4, 5\}$ ，则

$$A \cap B = \{2, 3, 4\}.$$

我们有

$$(x \in A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A \text{ 且 } x \in B).$$

$$(x \notin A \cap B) \Leftrightarrow (x \notin A \text{ 或 } x \notin B).$$

A 与 B 的并和交可以由下面的图来示意, 图 1.1 的阴影部分表示 $A \cup B$, 图 1.2 的阴影部分表示 $A \cap B$.

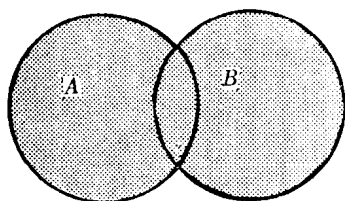


图 1.1

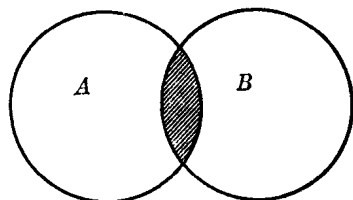


图 1.2

两个集合 A 与 B 自然不一定有公共元素. 为了说话方便, 这时就说它们的交是空集. 不含任何元素的集合叫做空集.

例如, 设 A 是一切有理数的集合, B 是一切无理数的集合. 那么 $A \cap B$ 是空集. 又如, 方程 $x^2 + 1 = 0$ 的实根的集合是一个空集.

我们用符号 \emptyset 表示空集, 并且约定空集是任意集合的子集.

例 1 我们证明

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

设 $x \in A \cap (B \cup C)$. 那么 $x \in A$ 且 $x \in B \cup C$, 于是 $x \in A$ 且 x 至少属于 B 与 C 中之一. 若 $x \in B$, 那么因为 $x \in A$, 所以 $x \in A \cap B$; 同样若 $x \in C$, 则 $x \in A \cap C$. 不论哪一种情形都有 $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. 所以

$$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

反之, 若 $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, 那么 $x \in A \cap B$ 或者 $x \in A \cap C$. 但 $B \subseteq B \cup C$, $C \subseteq B \cup C$, 所以不论哪一种情形都有 $x \in A \cap (B \cup C)$, 所以

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C).$$

这就证明了上述等式.

我们引入几种常用的记号:

\mathbf{Z} : 表示一切整数的集合.

\mathbf{Q} : 表示一切有理数的集合.

\mathbf{R} : 表示一切实数的集合.

例2 令 A 是一切满足条件 $-1 \leq x \leq 1$ 的实数 x 所成的集合. 我们引入以下的记法:

$$A = \{x \in \mathbf{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}.$$

类似地,

$$B = \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}$$

就是一切正实数所成的集合.

$$C = \{x \in \mathbf{R} \mid -1 < x < 2\}.$$

就是一切大于 -1 且小于 2 的实数所成的集合. 那么

$$B \cup C = \{x \in \mathbf{R} \mid x > -1\}.$$

$$B \cap C = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 < x < 2\}.$$

$$A \cap (B \cup C) = \{x \in \mathbf{R} \mid -1 < x \leq 1\}.$$

$$A \cup (B \cap C) = \{x \in \mathbf{R} \mid -1 \leq x < 2\}.$$

习 题

1. 设 A 是一切整数的集合, B 是一切不等于零的有理数的集合, A 是不是 B 的子集?
2. 设 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$. 求 $A \cup B$ 和 $A \cap B$.
3. 设 a 是集合 A 的一个元素. $\{a\}$ 表示什么? 写法 $\{a\} \in A$ 对不对?
4. 写出含有四个元素的集合的一切子集.
5. 证明下列等式:
 - (i) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
 - (ii) $A \cap (A \cup B) = A$.
 - (iii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
6. 设 A 是含有 n 个元素的集合, A 中含有 k 个元素的子集共有多少个?

1.2 映射

一个班里共有 15 名男同学. 我们用 $1, 2, \dots, 15$ 来表示这 15 名同学. 入学时分配宿舍, 共有 10 个房间可供分配. 号码从 301 到 310. 分配方案如下: $1, 2, 3, 4$ 住 301; $5, 6, 7, 8$ 住 302; $9, 10, 11, 12$ 住 305; $13, 14, 15$ 住 306. 这样, 对于每一个同学, 就有一个确定的房间与他对应. 令 A 表示这 15 名男同学的集合, 令 B 表示供分配的十个房间的集合. 那么上面这种方案就给出一个确定的法则, 通过这个法则, 对于 A 中每一个元素, 有 B 中一个唯一确定的元素与它对应.

再看一个例子. 正方形的边长 x 与面积 y 的关系可以表示为 $y=x^2$. 对于 x 的每一个值(正实数), 通过这个关系, 就有唯一确定的正实数 $y(=x^2)$ 与它对应. 如果令 A, B 都表示正实数的集合, 那么正方形的边长与面积的关系就给出了一个法则, 通过这个法则, 对于 A 中每一个数 x , 有 B 中一个唯一确定的数 y 与它对应.

上面这两个例子虽然就其内容来说似乎毫不相干, 然而它们有一个共同之点, 就是在两个集合的元素间建立了一种对应关系. 在日常生活和科学技术领域里, 这一类的例子到处可见. 撇开那些具体的东西, 只着眼于元素之间的对应关系, 就形成了数学上一个非常有用的概念——映射.

定义 1 设 A, B 是两个集合. 如果通过一个确定的法则, 对于 A 中每一个元素 x , 有集合 B 中一个唯一确定的元素 y 与它对应, 那么就称这个法则是 A 到 B 的一个映射.

我们常用字母 f, g, \dots 表示映射. 如果 f 是 A 到 B 的一个映射, 那么就写作

$$f: A \rightarrow B.$$

如果 A 中的元素 x 通过映射 f 有 B 的元素 y 与它对应, 就写作